

СИСТЕМА АБСТРАКТНЫХ СВЯЗНЫХ ПОДГРАФОВ
ЛИНЕЙНОГО ГРАФА

В. Н. Салий

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия***E-mail:** SaliiVN@info.sgu.ru

Линейным графом называется граф, полученный из некоторой цепи путём какой-либо ориентации её рёбер. Множество всех графов, изоморфных связным подграфам заданного линейного графа L , упорядочивается отношением вложимости. Выясняется, для каких L это упорядоченное множество будет решёткой.

Ключевые слова: *линейный граф, абстрактный подграф, упорядоченное множество, решётка, двоичный вектор, двойственность.*

Под ориентированным графом (далее — граф) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество и $\alpha \subseteq V \times V$ — отношение на нём. Элементы множества V называются вершинами графа, а пары, входящие в отношение смежности α , — дугами. Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершина u является началом дуги (u, v) , а вершина v — её концом. Граф G можно изобразить на плоскости, сопоставляя каждой его вершине некоторую точку и проводя отрезок, ориентированный от точки u к точке v , если $(u, v) \in \alpha$.

Если $V' \subseteq V$ и $\alpha' = \alpha \cap (V' \times V')$, то граф $G' = (V', \alpha')$ называется подграфом графа G . При $|V| = n$ граф $G = (V, \alpha)$ имеет 2^n подграфов (включая и пустой подграф).

Изоморфизмом графа $G = (V, \alpha)$ на граф $H = (W, \beta)$ называется биекция $\varphi : V \rightarrow W$, такая, что $(\forall u, v \in V)((u, v) \in \alpha \iff (\varphi(u), \varphi(v)) \in \beta)$. Два графа изоморфны тогда и только тогда, когда они допускают одно и то же немое (т. е. с точностью до обозначения вершин) изображение. Если граф G изоморфен некоторому подграфу графа H , то говорят, что G вкладывается в H . Класс $\mathbf{G}'$ графов, изоморфных подграфу G' графа G , можно трактовать как абстрактный подграф графа G , представленный в G подграфом G' .

Вершины $u, v \in V$ графа G называются связанными, если $(\exists u_1, u_2, \dots, u_k \in V)((u, u_1) \in \alpha \cup \alpha^{-1}) \& ((u_1, u_2) \in \alpha \cup \alpha^{-1}) \& \dots \& ((u_k, v) \in \alpha \cup \alpha^{-1})$). Граф, в котором любые две вершины связаны, по определению является связным.

Маршрутом с началом u и концом v называется последовательность примыкающих дуг $(u, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_k, v)$. Маршрут можно представить в виде перечисления проходимых вдоль него вершин: $uu_1u_2 \dots u_kv$. Цепь — это маршрут, в котором все вершины разные. Цепь, состоящую из m дуг, обозначим через P_m и будем использовать далее её стандартную запись $P_m = v_0v_1 \dots v_m$.

Линейным графом длины m назовём граф L , полученный из цепи P_m переориентацией некоторых её дуг. Линейные графы рассматривались в [1] в связи с задачей построения минимальных примитивных расширений графов.

Прямое изображение линейного графа L длины m получается, если его вершины $v_0, v_1, v_2, \dots, v_m$ расположить в этом порядке слева направо на горизонтальной оси. Отобразив этот рисунок относительно вертикальной оси, проведённой правее вершины v_m , и пометив отображённые вершины слева направо как $v_0, v_1, v_2, \dots, v_m$, получим обратное изображение графа L .

Если L' — связный подграф линейного графа L , то прямое изображение для L' представляет собой в естественном понимании отрезок в прямом изображении графа L .

Пусть L' и L'' — два линейных графа и L' допускает вложение в L'' . Тогда в качестве отрезка в L'' содержится одно из изображений графа L' — прямое или обратное — с согласованным для каждого случая обозначением соответствующих вершин.

Для линейного графа L через $\text{ASubc } L$ обозначим совокупность всех линейных графов, вложимых в L . Элементы этого множества можно считать абстрактными связными подграфами графа L . Множество $\text{ASubc } L$ упорядочивается отношением вложимости: $\mathbf{L}' \leq \mathbf{L}''$ для двух его элементов означает, что граф L' вкладывается в граф L'' .

Рассмотрим вопрос о том, для каких линейных графов L упорядоченное множество $\text{ASubc } L$ является решёткой, т. е. когда в нём для любых $\mathbf{L}', \mathbf{L}''$ существуют точные грани $\inf(\mathbf{L}', \mathbf{L}'')$ и $\sup(\mathbf{L}', \mathbf{L}'')$.

Для неориентированных (т. е. с симметричным и антирефлексивным отношением смежности) графов G близкие вопросы рассматривались различными авторами. Так, в [2] установлены некоторые общие свойства упорядоченных множеств вида $(\text{ASubc } G, \leq)$. В [3] показано, что не для всякого G упорядоченное множество связных абстрактных подграфов будет шпернеровым. В [4] дана абстрактная характеристика упорядоченных множеств рассматриваемого вида. В [5] изучаются решёточные упорядочения на множестве $\text{ASubc } G$. В других работах (см., например, [6, 7]) авторы отказываются от условия связности и исследуют упорядоченное множество всех вообще абстрактных подграфов данного неориентированного графа. В частности, в [7] доказано, что упорядоченное множество всех абстрактных подграфов неориентированного графа тогда и только тогда будет решёткой, когда либо сам этот граф, либо его дополнение представляет собой полный многодольный граф.

Пусть $\mathbf{b}$ — некоторый двоичный вектор. Двойственным для него называется вектор $\mathbf{b}^\delta$, получаемый из $\mathbf{b}$, если компоненты вектора $\mathbf{b}$ записать в обратном порядке, а затем взаимно заменить в компонентах нули и единицы, т. е. осуществить преобразование $\mathbf{b} \mapsto (\mathbf{b}^{-1})'$. Понятно, что $\mathbf{b}^{\delta\delta} = \mathbf{b}$. Например, для $\mathbf{b} = 011100$ будет $\mathbf{b}^\delta = 110001$.

Под отрезками вектора понимаются блоки, состоящие из подряд идущих компонент этого вектора. Через $\text{ASubc } \mathbf{b}$ обозначим совокупность всех попарно не двойственных отрезков двоичного вектора $\mathbf{b}$. На множестве $\text{ASubc } \mathbf{b}$ вводится порядок: $\mathbf{b}' \leq \mathbf{b}''$, если $\mathbf{b}'$ или $(\mathbf{b}')^\delta$ является отрезком в $\mathbf{b}''$.

Двоичные векторы естественным образом кодируют линейные графы, а именно, линейному графу L длины m соотносится двоичный m -мерный вектор $\mathbf{b} = \mathbf{b}(L)$ путём сопоставления каждой дуге графа в прямом изображении символа 1, если эта дуга направлена от v_0 к v_m , и символа 0 в противном случае. С другой стороны, каждому m -мерному двоичному вектору $\mathbf{b}$ соответствует линейный граф $L = L(\mathbf{b})$ длины m , получающийся из цепи P_m в прямом изображении переориентацией её дуг, согласованной со значениями компонент вектора $\mathbf{b}$. Двоичным кодом каждого связного подграфа линейного графа L , очевидно, является отрезок вектора $\mathbf{b}(L)$.

Линейный граф L длины m имеет $m(m+1)/2$ связных подграфов, среди которых могут оказаться и изоморфные, так что в $\text{ASubc } \mathbf{b}$ в общем случае будет меньше элементов. Например, у линейного графа L , представленного вектором 0110, имеется 10 связных подграфов: 0, 01, 011, 0110, 1, 11, 110, 1, 10, 0, различны (т. е. неизоморфны) из которых 7, а именно: 0, 01, 011, 0110, 11, 110, 10. У графа $L=0101$ из 10 связных подграфов различными являются 5: 0, 01, 010, 0101, 10.

Лемма 1. Если L — линейный граф и $\mathbf{b}$ — соответствующий ему двоичный вектор, то упорядоченные множества $(\text{ASubc } L, \leq)$ и $(\text{ASubc } \mathbf{b}, \leq)$ изоморфны.

Доказательство. Между множествами $\text{ASubc } L$ и $\text{ASubc } \mathbf{b}$ устанавливается взаимно однозначное соответствие $L' \mapsto \mathbf{b}(L')$, $\mathbf{b}' \mapsto L(\mathbf{b}')$. Пусть $L', L'' \in \text{ASubc } L$ и $L' \leq L''$, т. е. L' допускает вложение в L'' . Это означает, что в L'' содержится в качестве отрезка граф L' в его прямом или обратном изображении. Тогда в векторе $\mathbf{b}(L'')$ имеется отрезок, совпадающий с $\mathbf{b}(L')$ или с $(\mathbf{b}(L'))^\delta$, т. е. $\mathbf{b}(L') \leq \mathbf{b}(L'')$. Аналогично, если $\mathbf{b}' \leq \mathbf{b}''$ для некоторых $\mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in \text{ASubc } \mathbf{b}$, то $L(\mathbf{b}')$ вкладывается в $L(\mathbf{b}'')$, т. е. $L(\mathbf{b}') \leq L(\mathbf{b}'')$. ■

Из леммы следует, что упорядоченное множество $(\text{ASubc } L, \leq)$ абстрактных связанных подграфов линейного графа L является решёткой тогда и только тогда, когда решёткой является упорядоченное множество $(\text{ASubc } \mathbf{b}, \leq)$ попарно не двойственных отрезков двоичного вектора $\mathbf{b}$, кодирующего граф L .

Пример 1. Рассмотрим диаграммы упорядоченных множеств $(\text{ASubc } \mathbf{b}, \leq)$ для двоичных векторов $\mathbf{b} = 00010$ (рис. 1, а) и $\mathbf{b} = 00100$ (рис. 1, б).

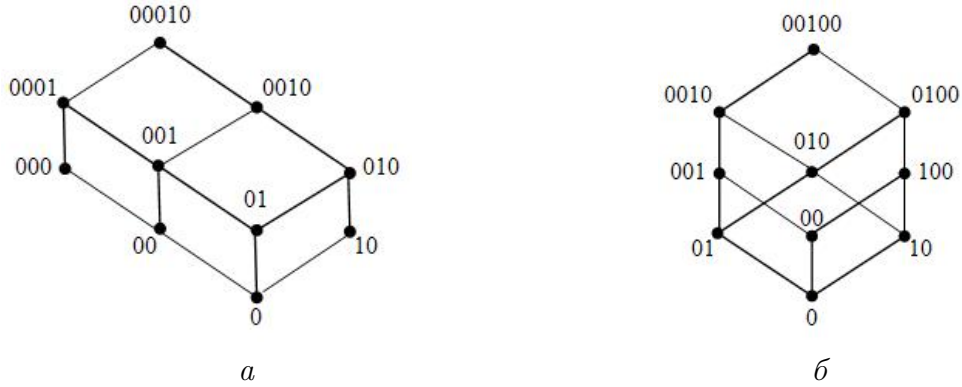


Рис. 1. Диаграмма упорядоченного множества $(\text{ASubc } \mathbf{b}, \leq)$: а — $\mathbf{b} = 00010$; б — $\mathbf{b} = 00100$

Как видим, первое из этих упорядоченных множеств является решёткой, а второе — нет, так как в нем не определён, например, $\inf(0010, 100)$: у элементов 0010 и 100 общими нижними гранями являются элементы 0, 00 и 10, но среди них нет наибольшего.

В дальнейшем при записи двоичных векторов будем группировать одинаковые компоненты и использовать экспоненциальную запись: $01100110010 = 0(1^2 0^2)^2 10$ и т. п.

Теорема 1. Пусть L — линейный граф. Упорядоченное множество $(\text{ASubc } L, \leq)$ его связанных абстрактных подграфов тогда и только тогда является решёткой, когда двоичный вектор $\mathbf{b}$, кодирующий этот граф, имеет вид $\mathbf{b} = 0^k(1^l 0^t)^s 1^t$ или $\mathbf{b} = 1^k(0^l 1^t)^s 0^t$, где k, l, s, t — неотрицательные целые числа.

Доказательство. Необходимость. Пусть для линейного графа L упорядоченное множество $(\text{ASubc } L, \leq)$ является решёткой. Вследствие леммы решёткой будет и изоморфное ему упорядоченное множество $(\text{ASubc } \mathbf{b}, \leq)$, где $\mathbf{b}$ — двоичный вектор, кодирующий L . Покажем, что в составе вектора $\mathbf{b}$ не могут присутствовать одновременно триграммы 001, 010 и 100. Пусть это не так и в составе $\mathbf{b}$ есть все указанные триграммы. Тогда в составе $\mathbf{b}$ обязательно содержится хотя бы одна из тетраграмм 0010 или 0100. Допустим, что таких тетраграмм в $\mathbf{b}$ нет. По предположению, в составе $\mathbf{b}$ есть триграмма 010. Посмотрим, как может расширяться этот отрезок в $\mathbf{b}$. Добавление 0 ни слева, ни справа невозможно, так как получим запрещённые 0010 или 0100. Значит, слева и справа могут быть только 1, т. е. получатся 0101 или 1010.

Далее, как только появятся два одинаковых соседних символа (00 или 11), получим 0010 (возможно, в виде 1011) или 0100 (возможно, в виде 1101). Следовательно, $\mathbf{b}$ состоит из чередующихся 0 и 1. Но тогда в составе $\mathbf{b}$ нет ни 001, ни 100, что противоречит предположению.

Итак, $\mathbf{b}$ содержит все три триграммы 001, 010 и 100 и хотя бы одну из тетраграмм 0010 или 0100. Если в $\mathbf{b}$ есть 0010, то в $(\text{ASubc } \mathbf{b}, \leq)$ не существует точной нижней грани для 0010 и 100. Действительно, общими нижними гранями для 0010 и 100 являются 0, 00 и 10, но среди них нет наибольшей. Аналогично, если в $\mathbf{b}$ присутствует отрезок 0100, то не существует точной нижней грани для 0100 и 001: общими нижними гранями для этих элементов будут 0, 00 и 01, но среди них нет наибольшей.

Проведённые рассуждения показывают, что в составе $\mathbf{b}$ нет по крайней мере одной из триграмм 001, 010 или 100. Рассмотрим три случая:

- 1) если в $\mathbf{b}$ отсутствует 001, то $\mathbf{b} = 1^k(01)^s0^t$, так что этот вектор имеет требуемый вид;
- 2) если в $\mathbf{b}$ отсутствует 100, то $\mathbf{b} = 0^k(10)^s0^t$ — требуемый вид;
- 3) если в $\mathbf{b}$ отсутствует 010, то $\mathbf{b} = 0^k1^{l_1}0^{l_2}1^{l_3} \dots 0^{l_s}1^t$ или $\mathbf{b} = 1^k0^{l_1}1^{l_2}0^{l_3} \dots 1^{l_s}0^t$, где $l_i > 1, 1 \leq i \leq s$.

Покажем, что все внутренние блоки имеют одинаковую длину, т.е. что $l_1 = l_2 = l_3 = \dots = l_s$. Предположим, что это не так и в составе $\mathbf{b}$ есть внутренние блоки 0^λ и 0^μ разной длины. Так как эти блоки внутренние, то $\mathbf{b}$ содержит отрезки $10^\lambda1$ и $10^\mu1$. В $\text{ASubc } \mathbf{b}$ эти элементы не имеют точной нижней грани, поскольку оба они содержат 01 и 10, но в указанном упорядоченном множестве нет элемента, который содержал бы 01 и 10 и содержался бы в $10^\lambda1$ и в $10^\mu1$. Если же в составе $\mathbf{b}$ есть внутренние блоки 0^λ и 1^μ разной длины, то в $\text{ASubc } \mathbf{b}$ не существует $\inf(10^\lambda1, 01^\mu0)$, так как оба эти элемента содержат 01 и 10, но в указанном упорядоченном множестве нет никакого элемента, содержащего 01 и 10 и содержащегося в $10^\lambda1$ и $01^\mu0$. Итак, $\mathbf{b} = 0^k(1^l0^l)^s1^t$ или $\mathbf{b} = 1^k(0^l1^l)^s0^t$, где $l > 1$, что соответствует утверждению теоремы.

Достаточность. Пусть $\mathbf{b} = 0^k(1^l0^l)^s1^t$, где k, l, s, t — неотрицательные целые числа (второй случай рассматривается вполне аналогично). Возможными отрезками в $\mathbf{b}$ являются векторы следующих видов: 1) 0^a ; 2) 0^a1^b ; 3) $0^a1^l0^b$; 4) $0^a1^l0^l1^b$; 5) $0^a1^l0^l1^l0^b$; 6) $0^a(1^l0^l)^\sigma1^b$; 7) $0^a(1^l0^l)^\sigma1^l0^b$, где a, b, σ — положительные целые числа. Покажем, что у любых двух отрезков есть точная нижняя грань в $(\text{ASubc } \mathbf{b}, \leq)$, т.е. что это упорядоченное множество является нижней полурешёткой. В п. ij указывается точная нижняя грань для отрезков i и j , $1 \leq i \leq j \leq 7$. Заметим ещё, что $\inf((\mathbf{b}_1)^\delta, (\mathbf{b}_2)^\delta) = (\inf(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2))^\delta$ для любых отрезков $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ вектора $\mathbf{b}$.

- 11) $\inf(0^a, 0^b) = 0^{\min(a,b)}$;
- 12) $\inf(0^a, 0^b1^c) = 0^{\min(a, \max(b,c))}$;
- 13) $\inf(0^a, 0^b1^l0^c) = 0^{\min(a, \max(b,l,c))}$;
- 14) $\inf(0^a, 0^b1^l0^l1^c) = 0^{\min(a, \max(b,l,c))}$;
- 15) $\inf(0^a, 0^b1^l0^l1^l0^c) = 0^{\min(a, \max(b,l,c))}$;
- 16) $\inf(0^a, 0^b(1^l0^l)^\sigma1^c) = 0^{\min(a, \max(b,l,c))}$;
- 17) $\inf(0^a, 0^b(1^l0^l)^\sigma1^l0^c) = 0^{\min(a, \max(b,l,c))}$;
- 22) $\inf(0^a1^b, 0^c1^d) = 0^{\min(\max(a,b), \max(c,d))} 1^{\min(a,b,c,d)}$;
- 23) $\inf(0^a1^b, 0^c1^l0^d) = 0^{\min(\max(a,b), \max(c,l))} 1^{\min(a,b, \max(a,l))}$;
- 24) $\inf(0^a1^b, 0^c1^l0^l1^d) = 0^{\min(\max(a,b), \max(c,d,l))} 1^{\min(a,b, \max(c,d,l))}$;
- 25) $\inf(0^a1^b, 0^c1^l0^l1^l0^d) = 0^{\min(\max(a,b), \max(c,l))} 1^{\min(a,b, \max(c,l))}$;

- 26) $\inf(0^a 1^b, 0^c (1^l 0^l)^\sigma 1^d) = 0^{\min(\max(a,b), \max(c,d,l))} 1^{\min(a,b, \max(c,d,l))};$
- 27) $\inf(0^a 1^b, 0^c (1^l 0^l)^\sigma 1^l 0^d) = 0^{\min(\max(a,b), \max(c,l))} 1^{\min(a,b, \max(c,l))};$
- 33) $\inf(0^a 1^l 0^b, 0^c 1^l 0^d) = 0^{\min(\max(a,b), \max(c,l))} 1^l 0^{\min(\max(a,b), \max(d,l))};$
- 34) $\inf(0^a 1^l 0^b, 0^c 1^l 0^l 1^d) = 0^{\min(a, \max(c,d))} 1^l 0^{\min(b,l)};$
- 35) $\inf(0^a 1^l 0^b, 0^c 1^l 0^l 1^l 0^d) = 0^{\min(a, \max(c,l))} 1^l 0^{\min(b, \max(d,l))};$
- 36) $\inf(0^a 1^l 0^b, 0^c (1^l 0^l)^\sigma 1^d) = 0^{\min(a, \max(c,d,l))} 1^l 0^{\min(b,l)};$
- 37) $\inf(0^a 1^l 0^b, 0^c (1^l 0^l)^\sigma 1^l 0^d) = 0^{\min(a, \max(c,d,l))} 1^l 0^{\min(b,l)};$
- 44) $\inf(0^a 1^l 0^l 1^b, 0^c 1^l 0^l 1^d) = 0^{\min(\max(a,b), \max(c,d))} 1^l 0^l 1^{\min(a,b,c,d)};$
- 45) $\inf(0^a 1^l 0^l 1^b, 0^c 1^l 0^l 1^l 0^d) = 0^{\min(\max(a,b), \max(c,l))} 1^l 0^l 1^{\min(a,b,c,d)};$
- 46) $\inf(0^a 1^l 0^l 1^b, 0^c (1^l 0^l)^\sigma 1^d) = 0^{\min(\max(a,b), \max(c,d,l))} 1^l 0^l 1^{\min(a,b,c,d,l)};$
- 47) $\inf(0^a 1^l 0^l 1^b, 0^c (1^l 0^l)^\sigma 1^l 0^d) = 0^{\min(\max(a,b), \max(c,l))} 1^l 0^l 1^{\min(a,b,c,l)};$
- 55) $\inf(0^a 1^l 0^l 1^l 0^b, 0^c 1^l 0^l 1^l 0^d) = 0^{\min(\max(a,c), \max(c,l))} 1^l 0^l 1^l 0^{\min(b,d)};$
- 56) $\inf(0^a 1^l 0^l 1^l 0^b, 0^c (1^l 0^l)^\sigma 1^d) = 0^{\min(a, \max(c,l))} 1^l 0^l 1^l 0^{\min(b,l)};$
- 57) $\inf(0^a 1^l 0^l 1^l 0^b, 0^c (1^l 0^l)^\sigma 1^l 0^d) = 0^{\min(a, \max(c,l))} 1^l 0^l 1^l 0^{\min(b,d,l)};$
- 66) $\inf(0^a (1^l 0^l)^\sigma 1^b, 0^c (1^l 0^l)^\tau 1^d) = 0^{\min(a, \max(c,d,l))} (1^l 0^l)^{\min(\sigma, \tau)} 1^{\min(a,b,c,d,l)};$
- 67) $\inf(0^a (1^l 0^l)^\sigma 1^b, 0^c (1^l 0^l)^\tau 1^l 0^d) = 0^{\min(\max(a,b), \max(c,l))} (1^l 0^l)^{\min(\sigma, \tau)} 1^{\min(b,c,l)};$
- 77) $\inf(0^a (1^l 0^l)^\sigma 1^l 0^b, 0^c (1^l 0^l)^\tau 1^l 0^d) = 0^{\min(a, \max(c,l))} (1^l 0^l)^{\min(\sigma, \tau)} 1^l 0^{\min(b,d,l)}.$

Таким образом, доказано, что упорядоченное множество $(\text{ASubc } \mathbf{b}, \leq)$ является нижней полурешёткой, а поскольку в нём есть наибольший элемент $\mathbf{b}$, то оно является и решёткой. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Салий В. Н. Минимальные примитивные расширения ориентированных графов // Прикладная дискретная математика. 2008. № 1(1). С. 116–119.
2. Trotter W. T. and Moore J. I. Some theorems on graphs and posets // Discr. Math. 1976. V. 15. No. 1. P. 79–84.
3. Jacobson M. S., Kézdy F. E., and Seif S. The poset of connected induced subgraphs of a graph need not be Sperner // Order. 1995. V. 12. No. 3. P. 315–318.
4. Kézdy A. E. and Seif S. When is a poset isomorphic to the poset of connected induced subgraphs of a graph? // Southwest J. Pure Appl. Math. 1996. V. 1. P. 42–50. (Electronic.)
5. Nieminen J. The lattice of connected subgraphs of a connected graph // Comment. Math. Prace Mat. 1980. V. 21. No. 1. P. 187–193.
6. Adams P., Eggleton R. B., and MacDougall J. A. Degree sequences and poset structure of order 9 graphs // Proc. XXXV Southeast. Conf. Comb., Graph Theory and Computing. Boca Raton, FL, USA. 2004. V. 166. P. 83–95.
7. Leach D. and Walsh M. A characterization of lattice-ordered graphs // Proc. Integers Conf. 2005. N. Y.: Gruyter, 2007. P. 327–332.