ПРИКЛАДНАЯ ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

2009 Теоретические основы прикладной дискретной математики №1(3)
DOI 10.17223/20710410/3/3
УДК 519.816

ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ И АНАЛИЗА МОДЕЛЕЙ ВЫБОРА[1]

Л. А. Шоломов

Институт системного анализа РАН, г. Москва

E-mail: sholomov@isa.ru

Логические методы используют представление функций выбора и моделей выбора в виде формул некоторого логического языка и сводят задачи построения и исследования моделей выбора к формальным преобразованиям и анализу этих представлений. Они позволяют решать широкий круг конструктивных задач, связанных с построением, анализом, упрощением и оценкой сложности формальных моделей выбора, дают возможность применить к задачам выбора методологию Шеннона—Яблонского—Лупанова изучения управляющих систем. В данной статье систематизируются результаты автора по исследованию моделей выбора логическими методами, полученные в разное время и опубликованные в разных изданиях. Приводятся относящиеся к этой области результаты других авторов.

Ключевые слова: *функция выбора, модель выбора, анализ, синтез, аппроксимация, оптимизация, оценка сложности, последовательный выбор, параллельный выбор, оператор группового выбора, декомпозиция, агрегирование, порядковое отношение, порядковая модель.*

Введение

В связи с широким применением вычислительной техники в процедурах принятия и реализации решений повышается роль формальных методов исследования моделей выбора вариантов. При построении и исследовании моделей выбора возникает ряд задач конструктивного характера. Основной является задача синтеза — построения модели из заданного класса, реализующей требуемый выбор. При синтезе существенная роль отводится сложности моделей и обычно решается задача построения моделей малой (лучше минимальной) сложности. Иногда ставят задачу минимизации — нахождения по заданной модели эквивалентной ей модели наименьшей сложности. Если выбор не представим моделями рассматриваемого класса, возникает задача его аппроксимации в этом классе (наилучшей в условленном смысле). Важную роль играет задача анализа моделей — выяснения, обладает ли модель или реализуемый ей выбор требуемыми свойствами. Кроме этого рассматриваются задачи агрегирования нескольких моделей выбора в одну и декомпозиции модели на более простые.

В теории и приложениях имеют дело с двумя основными типами моделей выбора. В моделях первого типа варианты считаются некоторыми целостными объектами, не имеющими структурного описания, и предпочтительность одного варианта другому выявляется на основе их непосредственного сравнения. Выбор в рамках таких моделей будем называть свободным в соответствии с термином «свободный», принятым в математике и означающим отсутствие дополнительных соотношений. В моделях второго типа вариантам сопоставляются оценки по заданной совокупности критериев, и

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ОНИТ РАН по программе «Фундаментальные основы информационных технологий и систем».

варианты сравниваются на основе этих оценок. Выбор такого типа называют многокритериальным. В качестве моделей многокритериального выбора часто используются порядковые модели, в которых важны не сами величины оценок по критериям, а их соотношения (больше, меньше, равно).

Логические методы используют представление функций и моделей выбора в виде формул некоторого логического языка и сводят задачи, связанные с построением и анализом моделей, к формальным преобразованиям и исследованию этих представлений. Вид применяемого логического языка зависит от типа моделей. В задачах свободного выбора с конечным числом вариантов в качестве логического языка используется язык булевой алгебры. В случае, когда число вариантов потенциально бесконечно, логические описания требуют привлечения кванторов и применяется некоторый вариант языка первого порядка. В частности, это относится к многокритериальному (в том числе порядковому) выбору, где множество вариантов (наборов значений критериев), вообще говоря, бесконечно. Поскольку результат сравнения оценок может иметь три исхода (больше, меньше, равно), исследование свойств порядковых отношений основывается на языке (3,2)-значной логики.

Логические методы оказались весьма эффективными в силу ряда причин. Описание многих моделй выбора использует теоретико-множественные операции над множествами вариантов, различные логические связки и кванторы. Поскольку имеется естественное соответствие между теоретико-множественными и логическими операциями, а связки и кванторы присутствуют в логическом языке, такие описания легко переводятся в формулы языка. Часто более сложные модели выбора строятся из простых с помощью некоторых операций (агрегирование отношений, параллельное и последовательное соединение моделей и др.). Этим операциям соответствуют определенные преобразования логических формул, что дает возможность находить логические представления достаточно сложных иерархических моделей выбора. Богатая система формальных преобразований позволяет переходить от одних записей в логическом языке к другим, существенно упрощать представления. Имеется возможность привлечения результатов, методов и технических приемов, развитых в математической логике и теории моделей. Логические методы позволяют применять к задачам выбора методологию исследования управляющих систем, заложенную в работах К. Э. Шеннона и получившую существенное развитие в научной школе С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова. Все это делает логические методы удобным и универсальным инструментом для решения широкого круга конструктивных задач в области выбора. Впервые логическое описание функций (но не моделей) выбора использовалось в [1]. Логические методы исследования моделей выбора ведут начало от [2]. Различные варианты логических методов для задач выбора применялись в [3–6].

Важную роль при решении конструктивных задач в области выбора играют сложностные аспекты, и им уделяется значительное внимание в проводимых исследованиях. Рассматриваются два типа характеристик сложности:

- сложность моделей выбора, измеряемаяемая каким-либо существенным параметром, связанным с описанием или структурой моделей;

- сложность (трудность) задач, относящихся к построению либо анализу моделей выбора, характеризуемая размером какого-либо вычислительного ресурса (времени, памяти), затрачиваемого на их решение.

В области оценок сложности моделей выбора большое внимание уделено асимптотическим результатам. Они дают возможность получить качественное представление о поведении сложности, выяснить влияние на нее тех или иных параметров задачи выбора, зависимость от класса используемых моделей, взаимоотношение различных характеристик сложности. При исследовании трудности задач основная роль отведена их анализу на полиномиальность, NP-полноту и алгоритмическую неразрешимость. Согласно существующей точке зрения считается, что задачи с полиномиальной оценкой трудоемкости эффективно решаемы, NP-полные задачи труднорешаемы, алгоритмически неразрешимые задачи в принципе не решаемы.

Часть I. МОДЕЛИ СВОБОДНОГО ВЫБОРА

1. Логическое представление свободного выбора

1.1. Функции выбора

Пусть задано множество A *вариантов* (конечное или бесконечное). Подмножества $X \subseteq A$ называются *предъявлениями* (более точно — множествами, предъявленными для выбора). *Функция выбора* (ФВ) C на множестве вариантов A представляет собой отображение $2^A \to 2^A$, сопоставляющее каждому $X \subseteq A$ множество вариантов $C(X) \subseteq X$, *выбранных* в предъявлении X.

Более общим понятием является *функция неполного выбора* (ФНВ) [2, 7], которая задается множеством $\mathcal{A} \subseteq 2^A$ *допустимых предъявлений* и функциями $C^1, C^0 : \mathcal{A} \to 2^A$ такими, что $C^1(X) \subseteq X$, $C^0(X) \subseteq X$, $C^1(X) \cap C^0(X) = \varnothing$ для любого $X \in \mathcal{A}$. Варианты из множества $C^1(X)$ называются *принятыми* (в предъявлении X), из множества $C^0(X)$ — *отвергнутыми*. Такую ФНВ будем обозначать $\langle \mathcal{A}, C^1, C^0 \rangle$. Поскольку всякую ФВ C можно рассматривать как ФНВ при $\mathcal{A} = 2^A$, $C^1(X) = C(X)$ и $C^0(X) = X \setminus C(X)$, все дальнейшие понятия будут формулироваться применительно к ФНВ.

Доопределением ФНВ $\langle \mathcal{A}, C^1, C^0 \rangle$ будем называть любую ФВ C (всюду определенную), для которой $C^1(X) \subseteq C(X) \subseteq X \setminus C^0(X)$, $X \in \mathcal{A}$. Всякой модели (механизму, правилу, процедуре) выбора M соответствует некоторая ФВ C_M, которая сопоставляет каждому предъявлению $X \subseteq A$ множество вариантов $C_M(X)$, выбранных из X моделью M. Скажем, что модель M *реализует* ФНВ $\langle \mathcal{A}, C^1, C^0 \rangle$, если C_M является доопределением этой функции.

1.2. Логическое представление функций выбора

Пока не оговорено противное, будем рассматривать модели свободного выбора с конечным множеством вариантов A; пусть его мощность равна n. Не различая варианты и их номера, будем полагать $A = A^{(n)} = \{1, \ldots, n\}$. С каждым вариантом i свяжем булеву переменную x_i, и предъявление X будем задавать набором $\tilde{X} = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i = 1$ и $x_i = 0$ соответственно при $i \in X$ и $i \notin X$. ФНВ $\langle \mathcal{A}, C^1, C^0 \rangle$ будем описывать n частичными булевыми функциями $C^{(i)}(\tilde{X})$, $1 \leqslant i \leqslant n$ [2, 7], где

$$C^{(i)}(\tilde{X}) = \begin{cases} 1, & \text{если } X \in \mathcal{A} \wedge i \in C^1(X), \\ 0, & \text{если } (X \in \mathcal{A} \wedge i \in C^0(X)) \vee i \notin X, \\ * & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $*$ обозначает неопределенное значение. Совокупность n функций $C^{(i)}(\tilde{X})$ будем называть *логическим представлением* функции неполного выбора. Включение $C^1(X) \subseteq X$ эквивалентно тому, что каждая функция $C^{(i)}(\tilde{X})$ выразима в виде $C^{(i)}(\tilde{X}) = x_i C^{(i)}(\tilde{X}^{(i)})$, где $\tilde{X}^{(i)} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $C^{(i)}(\tilde{X}^{(i)})$ — частичная булева функция, полученная из $C^{(i)}(\tilde{X})$ подстановкой $x_i = 1$. В случае ФВ представляющие булевы функции всюду определены.

Модель выбора M реализует ФНВ $\langle \mathcal{A}, C^1, C^0 \rangle$ тогда и только тогда, когда при каждом i булева функция $C_M^{(i)}(\tilde{X})$ доопределяет частичную функцию $C^{(i)}(\tilde{X})$.

1.3. Логическое представление выбора по отношению

Обычно модели выбора строятся с использованием бинарных отношений $r \subseteq A^2$ (на множестве вариантов A), в которых соотношение xry интерпретируется как «вариант x предпочтительнее y». Для $i \in A$ обозначим $r(i) = \{j \mid irj\}$, $r^{-1}(i) = \{j \mid jri\}$. В теории и приложениях используются различные правила выбора по бинарным отношениям (см., например, [8, 9]). Приведем три из них:

- выбор *максимальных* вариантов $C_{r,1}(X) = \{x \in X \mid (\forall y \in X) y\bar{r}x\}$;
- выбор *лучших* вариантов $C_{r,2}(X) = \{x \in X \mid (\forall y \in X) xry\}$;
- выбор *отбраковкой худших* вариантов $C_{r,3}(X) = X \setminus \{x \in X \mid (\forall y \in X) x\bar{r}y \wedge (\exists z \in X) zrx\}$.

В первом и третьем правилах отношение предполагается иррефлексивным ($x\bar{r}x$), во втором — рефлексивным (xrx). Указанные правила имеют следующие логические представления [7]:

$$C_{r,1}^{(i)}(\tilde{X}) = x_i \bigwedge_{j \in r^{-1}(i)} \bar{x}_j, \quad C_{r,2}^{(i)}(\tilde{X}) = x_i \bigwedge_{j \in \bar{r}(i)} \bar{x}_j, \quad C_{r,3}^{(i)}(\tilde{X}) = x_i \Big(\bigvee_{l \in r(i)} x_l \vee \bigvee_{j \in r^{-1}(i)} \bar{x}_j \Big).$$

Двойственным отношением к r называется отношение $r^* = \bar{r}^{-1}$ (операции $^-$ и $^{-1}$ перестановочны и их порядок не существен). Правила выбора максимальных и лучших вариантов сводятся друг к другу путем перехода к двойственному отношению: $C_{r,1} = C_{r^*,2}$, $C_{r,2} = C_{r^*,1}$. Основным правилом выбора по отношению обычно считают первое, и, если не оговорено противное, будем под выбором по отношению понимать $C_{r,1}$ и использовать для него обозначение C_r. Класс всех моделей выбора по отношению (использующих первое правило) обозначим через **Rl**.

1.4. Суперпозиция логических представлений

Данный раздел написан по материалам [2, 10, 11], систематическое изложение имеется в [7].

Введем некоторые операции над функциями и моделями выбора. Операция *суперпозиции* $C_1 \circ C_2$ функций выбора C_1 и C_2 задается равенством $(C_1 \circ C_2)(X) = C_2(C_1(X))$. Логическое представление суперпозиции выражается через логические представления исходных ФВ в виде

$$(C_1 \circ C_2)^{(i)}(\tilde{X}) = C_2^{(i)}(C_1^{(1)}(\tilde{X}), \ldots, C_1^{(n)}(\tilde{X})).$$

Эта операция возникает при последовательном соединении моделей выбора M_1 и M_2, когда выход модели M_1 подается на вход M_2. Полученная модель реализует ФВ $C_{M_1 M_2} = C_{M_1} \circ C_{M_2}$.

Операция суперпозиции ФВ ассоциативна: $(C_1 \circ C_2) \circ C_3 = C_1 \circ (C_2 \circ C_3)$, поэтому можно рассматривать многоместную операцию $C_1 \circ C_2 \circ \cdots \circ C_k$, которая не зависит от расстановки скобок. Последовательное соединение k моделей выбора по отношению дает *модель последовательного выбора глубины* k. Для нее $C_{r_1 r_2 \ldots r_k} = C_{r_1} \circ C_{r_2} \circ \cdots \circ C_{r_k}$, или в другой записи

$$C_{r_1 r_2 \ldots r_k}(X) = C_{r_k}(\ldots C_{r_2}(C_{r_1}(X)) \ldots).$$

С использованием приведенных выше формул можно найти логическое представление этой модели. В частности, для моделей глубины 2 оно преобразуется к виду

$$C_{r_1 r_2}(\tilde{X}) = x_i \bigwedge_{j\in r_1^{-1}(i),\, m\in r_2^{-1}(i)} \bar{x}_j\Big(\bar{x}_m \vee \bigvee_{l\in r_1^{-1}(m)} x_l\Big).$$

Классы моделей последовательного выбора произвольной глубины и глубины k обозначим соответственно через $\mathbf{Sq}$ и $\mathbf{Sq}_k$.

1.5. Композиция логических представлений

Операция *композиции* функций выбора $C_1, \ldots, C_k$ при *способе композиции* $F = F(Y_1, \ldots, Y_k)$ реализует ФВ $C(X) = F(C_1(X), \ldots, C_k(X))$. В качестве F обычно используется монотонная теоретико-множественная операция (операция голосования). В этом случае логическое представление композиции имеет вид

$$C^{(i)}(\tilde{X}) = f(C_1^{(i)}(\tilde{X}), \ldots, C_k^{(i)}(\tilde{X})),$$

где $f = f(y_1, \ldots, y_k)$ — монотонная булева функция, естественным образом сопоставленная операции F. Операция композиции возникает при параллельном соединении моделей $M_1, \ldots, M_k$, когда их выходы подаются на вход блока, реализующего k-местный оператор F. Если в качестве $M_1, \ldots, M_k$ использовать модели выбора по отношениям $r_1, \ldots, r_k$, получим *модель параллельного выбора ширины* k. Ей соответствует логическое описание

$$C^{(i)}_{F, r_1, \ldots, r_k}(\tilde{X}) = f(C^{(i)}_{r_1}(\tilde{X}), \ldots, C^{(i)}_{r_k}(\tilde{X})).$$

Класс моделей параллельного выбора обозначим через $\mathbf{Pr}$.

С помощью введенных операций над моделями выбора можно определить более сложные модели — последовательно-параллельного выбора [12], обобщенного математического программирования [13] и др. — и найти их логическое описание.

Помимо суперпозиции и композиции используются и другие операции над моделями выбора. В их числе операция ветвления, когда в зависимости от наличия некоторого свойства применяется та или иная модель выбора, операция ограниченной обратной связи, при которой выбор производится в несколько туров, каждый из которых зависит от результатов предыдущего тура. Для реализации этих операций используются более сильные логические средства — логика первого порядка [14] (см. п. 6.2). Весьма распространенным способом выбора на основе нескольких отношений является выбор по некоторому отношению, образованному их агрегированием. Исследование этой модели производится в рамках языка (3,2)-значной логики, развитого для порядковых отношений (см. п. 8.2).

2. Сложность задач, связанных с анализом и синтезом моделей

2.1. Формулировка задач

Пусть задан некоторый класс $\mathbf{M}$ моделей выбора. Будем говорить, что ФНВ $\langle \mathcal{A}, C^1, C^0 \rangle$ *представима в классе* $\mathbf{M}$, если она реализуется некоторой моделью этого класса. *Задача синтеза* в классе $\mathbf{M}$ состоит в том, чтобы по заданной ФНВ установить, представима ли она в этом классе, и, если представима, — построить реализующую ее модель $M \in \mathbf{M}$.

ФВ C^* (ФВ C_*) называется *мажорантой* (*минорантой*) заданной ФНВ $\langle \mathcal{A}, C^1, C^0 \rangle$, если для любого $X \in \mathcal{A}$ выполнено $C^1(X) \subseteq C^*(X)$ $(C^0(X) \subseteq X \setminus C_*(X))$. ФВ C^+

(ФВ C^-) называется *верхней* (*нижней*) *аппроксимацией* заданной ФНВ $\langle \mathcal{A}, C^1, C^0 \rangle$ в классе моделей $\mathbf{M}$, если C^+ — мажоранта (C^- — миноранта) этой ФНВ, представимая в классе $\mathbf{M}$, и для всякой ее мажоранты C^* (миноранты C_*), представимой в $\mathbf{M}$, при всех X выполнено включение $C^*(X) \supseteq C^+(X)$ $(C_*(X) \subseteq C^-(X))$. Легко видеть, что верхняя (нижняя) аппроксимация, если она существует, — единственна. *Задача об аппроксимации* (верхней или нижней) в классе $\mathbf{M}$ состоит в том, чтобы по ФНВ узнать, имеет ли она соответствующую аппроксимацию в этом классе, и, если имеет, — найти ее.

Пусть с моделью M связана некоторая характеристика *сложности* $l(M)$. *Задача оптимального синтеза* в классе моделей $\mathbf{M}$ ставится как задача построения по ФНВ реализующей ее модели $M \in \mathbf{M}$ с минимальным значением $l(M)$. Модели M_1 и M_2 будем называть *эквивалентными*, если $C_{M_1} = C_{M_2}$. *Задача минимизации* в классе $\mathbf{M}$ состоит в том, чтобы по модели $M \in \mathbf{M}$ построить эквивалентную модель $M' \in \mathbf{M}$, имеющую наименьшую сложность.

Приведем результаты по исследованию перечисленных задач на NP-трудность и полиномиальность применительно к классам моделей **Rl**, **Sq** и **Pr**, введенным выше.

2.2. Результаты для класса **Rl**

Под сложностью $l(r)$ отношения r будем понимать число входящих в него пар. Пусть задана ФНВ $\langle \mathcal{A}, C^1, C^0 \rangle$. С каждым i, $1 \leqslant i \leqslant n$, свяжем множество

$$\Sigma_i = \bigcup_{X \mid i \in C^1(X)} X.$$

Если оно пусто, полагаем $\Sigma_i = \{i\}$. Образуем отношение $\check{r}$, задав $\check{r}^{-1}(i) = A \setminus \Sigma_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Кроме того, построим *парно-выявленное отношение* $\hat{r}$, где $i\hat{r}j \Longleftrightarrow \{i,j\} \in \mathcal{A} \wedge j \in C^0(\{i,j\})$.

Теорема 1 [7, 10].

1. ФНВ $\langle \mathcal{A}, C^1, C^0 \rangle$ представима в классе **Rl** тогда и только тогда, когда $(\forall X \in \mathcal{A})(X \subseteq \Sigma_i \Rightarrow i \notin C^0(X))$, и при выполнении этого условия в качестве ее реализации может быть взято отношение $\check{r}$.

2. Всякая ФНВ имеет в классе **Rl** верхнюю аппроксимацию, которая реализуется отношением $\check{r}$.

3. Нижняя аппроксимация в классе **Rl** для ФНВ существует тогда и только тогда, когда $(\forall X \in \mathcal{A})(C_{\hat{r}}(X) \cap C^0(X) = \varnothing)$, и при выполнении этого условия нижняя аппроксимация реализуется отношением $\hat{r}$.

4. Задача оптимального синтеза в классе **Rl** является NP-трудной.

Для всюду определенных ФВ п. 3 теоремы доказан в [15]. Теорема показывает, что задачи синтеза и аппроксимации в классе **Rl** полиномиальны, а оптимального синтеза — NP-трудна. Задача минимизации в классе **Rl** не возникает, поскольку разным отношениям соответствуют разные ФВ. Отметим, что если рассматривать выбор лучших вариантов (правило 2), то все перечисленные задачи (включая задачу оптимального синтеза) оказываются полиномиальными [7].

2.3. Результаты для класса **Sq**

Модель M последовательного выбора задается набором отношений $(r_1, \ldots, r_k)$. С такой моделью M будем связывать две сложностные характеристики: $l(M)$ — суммарное число пар в отношениях модели M и $k(M)$ — число отношений в M. Эти характеристики будем называть соответственно *сложностью* и *глубиной* модели. Для уменьшения сложности модели можно использовать операцию *приведения*, при выполнении которой для каждых $i, j \in A$ связывающие их пары (i, j) и (j, i) удаляются из всех отношений, кроме того, где они встретились впервые. Приведенная модель эквивалентна исходной [10].

При решении конструктивных задач для моделей последовательного выбора возникают трудности принципиального характера, поскольку в большинстве своем эти задачи оказываются NP-трудными.

Теорема 2 [7, 10, 16].

1. При любом $k \geqslant 2$ задача синтеза моделей в классе $\mathbf{Sq}_k$ NP-трудна.

2. При любом $k \geqslant 2$ задачи нахождения верхней и нижней аппроксимаций в классе $\mathbf{Sq}_k$ NP-трудны.

3. При любом k задача минимизации сложности в классе $\mathbf{Sq}_k$ полиномиальна: минимальной по сложности является приведенная модель.

4. При любом $k \geqslant 3$ задача минимизации глубины в классе $\mathbf{Sq}_k$ NP-трудна. При $k = 2$ она полиномиальна.

NP-трудность задач синтеза и аппроксимации в классе $\mathbf{Sq}_k$ объясняется тем, что задача о реализуемости ФНВ в этом классе является NP-трудной (данный факт доказан в [7] для $k = 2$, но может быть распространен на произвольные k). В связи с выявленной трудностью этих задач рассматривались некоторые их ослабленные постановки, для которых удалось найти эффективные способы решения. В [7] описан метод последовательной аппроксимации, который с полиномиальной трудоемкостью при определенных статистических предположениях относительно множества допустимых предъявлений $\mathcal{A}$ строит при каждом k для почти всех (при $n \to \infty$) функций, представимых в $\mathbf{Sq}_k$, модели, одновременно лучшие по сложности и глубине. В [16] изучен некоторый ослабленный вариант задачи минимизации глубины (задача сжатия), и в случае, когда модель использует лишь ацикличные отношения (определение см. в п. 4.2), предложен полиномиальный алгоритм ее решения. Отметим, что в прикладных задачах обычно применяются ацикличные отношения, ибо лишь они гарантируют непустоту выбора.

2.4. Результаты для класса **Pr**

Пусть модель M параллельного выбора использует отношения $r_1, \ldots, r_k$ и оператор F. С такой моделью M будем связывать две сложностные характеристики: $l(M)$ — суммарное число пар в отношениях модели M и $k(M)$ — число отношений в M. Эти характеристики будем называть соответственно *сложностью* и *шириной* модели.

В большинстве своем конструктивные задачи, относящиеся к модели **Pr**, оказываются эффективно решаемыми. В определенной степени это объясняется тем, что имеется простой алгоритм проверки представимости ФНВ в классе **Pr**, основанный на том, что необходимым и достаточным условием представимости в классе **Pr** является антимонотонность частичных булевых функций $C^{(i)}(\tilde{X}^{(i)})$, $1 \leqslant i \leqslant n$ (антимонотонные функции — отрицания монотонных) [7, 11].

Теорема 3 [7, 11].

1. Задача синтеза моделей в классе **Pr** полиномиальна.

2. Верхняя и нижняя аппроксимации в классе **Pr** существуют для всех ФНВ, и задача их построения полиномиальна.

3. Задача минимизации сложности в классе **Pr** полиномиальна.

4. Задача минимального синтеза в классе **Pr** NP-трудна.

Нахождение верхней (нижней) аппроксимации в классе **Pr** сводится к построению минимальных (максимальных) всюду определенных антимонотонных функций, не меньших (не больших) $C^{(i)}(\tilde{X}^{(i)})$. В случае верхней аппроксимации такие функции имеют вид

$$\check{C}^{(i)}(\tilde{X}^{(i)}) = \bigvee_{Z|\ Z=\{i\}\vee Z\in\mathcal{A}\wedge i\in C^1(Z)} \ \bigwedge_{j\in A\setminus Z} \bar{x}_j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Для нижней аппроксимации функции строятся двойственным образом. Если ФНВ представима в классе **Pr** (т. е. функции $C^{(i)}(\tilde{X}^{(i)})$ антимонотонны), то в качестве ее реализации может быть взята модель, реализующая верхнюю аппроксимацию.

Что касается задачи минимизации ширины модели (которая в теореме не упомянута), то скорее всего она NP-трудна, ибо к ней полиномиально сводится задача о минимальном дизъюнктивном базисе системы множеств, не сравнимых по включению [7]. Задача о минимальном дизъюнктивном базисе NP-трудна [17] и, по-видимому, то же справедливо при условии несравнимости множеств системы.

3. Сложность моделей выбора

3.1. Характеристики сложности

Пусть $\mathbf{M}$ — некоторый класс моделей выбора и $\mathfrak{C}_{\mathbf{M}}^{(n)}$ — класс ФВ на n-элементном множестве вариантов $A^{(n)}$, представимых моделями из $\mathbf{M}$. Пусть с каждой моделью $M \in \mathbf{M}$ связана некоторая характеристика сложности $l(M)$. *Сложностью функции выбора* $C \in \mathfrak{C}_{\mathbf{M}}^{(n)}$ (в классе моделей $\mathbf{M}$) называется величина

$$l_{\mathbf{M}}(C) = \min\{l(M) \mid M \in \mathbf{M},\ C_M = C\}.$$

Сложность класса моделей $\mathbf{M}$ характеризуется функцией

$$l_{\mathbf{M}}(n) = \max\{l_{\mathbf{M}}(C) \mid C \in \mathfrak{C}_{\mathbf{M}}^{(n)}\}.$$

Возникает задача исследования поведения функции $l_{\mathbf{M}}(n)$ и разработки методов синтеза, гарантирующих оценки, близкие к $l_{\mathbf{M}}(n)$. Ставятся и другие задачи оценочного характера. Одна из них связана с изучением взаимного влияния различных характеристик сложности. Пусть помимо $l(M)$ задана некоторая характеристика сложности $k(M)$ моделей $M \in \mathbf{M}$. Введем величину

$$l^*_{\mathbf{M}}(C) = \min\{l(M) \mid M \in \mathbf{M},\ C_M = C,\ k(M) = k_{\mathbf{M}}(C)\}.$$

Сравнение величин $l^*_{\mathbf{M}}(C)$ с $l_{\mathbf{M}}(C)$ показывает, к какому увеличению сложности l приводит минимизация k. Аналогично может быть введена величина $k^*_{\mathbf{M}}(C)$ и на ее основе изучено влияние l на k.

Исследуем поведение сложностных характеристик для классов моделей **Sq** и **Pr**. Как и раньше, для моделей M из этих классов в качестве характеристик сложности будем рассматривать суммарное число $l(M)$ пар в отношениях модели M и число отношений $k(M)$. Отметим, что в классе **Rl** нетривиальной характеристикой является лишь $l_{\mathbf{Rl}}(n)$, ибо $k_{\mathbf{Rl}}(n) = 1$. Из достаточно простых соображений следует, что $l_{\mathbf{Rl}}(n) = n(n-1)$.

3.2. Сложность моделей класса Sq

Асимптотически точные значения сложности и глубины моделей класса **Sq** даются следующим утверждением.

Теорема 4 [7, 10].

$$l_{\mathbf{Sq}}(n) \sim n^2, \qquad k_{\mathbf{Sq}}(n) \sim n^2/2.$$

Следует отметить, что обе асимптотики могут быть достигнуты одновременно (в одной модели).

Для выяснения взаимного влияния параметров реализации в классе **Sq** рассмотрим величины $l^*_{\mathbf{Sq}}(C)$ и $k^*_{\mathbf{Sq}}(C)$. Если обозначить через $l^*_{\mathbf{Sq}}(n)$ и $k^*_{\mathbf{Sq}}(n)$ их максимумы по всем $C \in \mathfrak{C}^{(n)}_{\mathbf{Sq}}$, то можно показать, что они совпадают с $l_{\mathbf{Sq}}(n)$ и $k_{\mathbf{Sq}}(n)$. Поэтому для изучения взаимного влияния $l(M)$ и $k(M)$ в классе **Sq** будем использовать другие функции. Введем величины

$$\lambda^l_{\mathbf{Sq}}(C) = l^*_{\mathbf{Sq}}(C)/l_{\mathbf{Sq}}(C), \qquad \lambda^l_{\mathbf{Sq}}(n) = \max\{\lambda^l_{\mathbf{Sq}}(C) \mid C \in \mathfrak{C}^{(n)}_{\mathbf{Sq}}\},$$

характеризующие увеличение сложности при минимизации глубины. Аналогично введем характеристики $\lambda^k_{\mathbf{Sq}}(C)$ и $\lambda^k_{\mathbf{Sq}}(n)$ увеличения глубины при минимизации сложности.

Теорема 5 [7, 10].

$$\lambda^l_{\mathbf{Sq}}(n) \sim n, \qquad n^2/4 \lesssim \lambda^k_{\mathbf{Sq}}(n) \leqslant n^2/2.$$

Доказательство теоремы показывает, что асимптотически максимальное увеличение сложности может произойти при уменьшении глубины всего на 1, а максимальное по порядку увеличение глубины — при небольшом уменьшении сложности.

3.3. Сложность моделей класса **Pr**

Асимптотически точные значения сложности и ширины моделей класса **Pr** приводятся в следующем утверждении.

Теорема 6 [7, 11].

$$l_{\mathbf{Pr}}(n) \sim n^2, \qquad k_{\mathbf{Pr}}(n) \sim n.$$

В отличие от класса **Sq** здесь не удалось совместить обе асимптотики в одной конструкции. Однако для произвольной функции C из $\mathfrak{C}^{(n)}_{\mathbf{Pr}}$ построена модель M, параметры которой отличаются от $l_{\mathbf{Sq}}(n)$ и $k_{\mathbf{Sq}}(n)$ не более чем в 2 раза. Более точно, $l(M) \leqslant 2n(n-1)$, $k(M) \leqslant 2n+1$. Кроме того, в случае, когда в модели используются лишь частичные порядки и сложность отношения измеряется числом дуг в базисном графе, в [18] предложена конструкция, асимптотически наилучшая одновременно по сложности и ширине.

Для выяснения взаимного влияния параметров реализации в классе **Pr** рассмотрим величины $l^*_{\mathbf{Pr}}(C)$ и $k^*_{\mathbf{Pr}}(C)$ и обозначим через $l^*_{\mathbf{Pr}}(n)$ и $k^*_{\mathbf{Pr}}(n)$ их максимумы по всем $C \in \mathfrak{C}^{(n)}_{\mathbf{Pr}}$. Получены следующие результаты.

Теорема 7 [7, 11].

$$l^*_{\mathbf{Pr}}(n) \sim n^3, \qquad 0,94n^{3/2} \lesssim k^*_{\mathbf{Pr}}(n).$$

Из них вытекает, что минимизация ширины приводит к увеличению максимальной сложности асимптотически в n раз, а минимизация сложности — к увеличению максимальной ширины моделей по порядку не менее чем в $\sqrt{n}$ раз (легко доказать, что это возрастание не может превзойти n). В конструкции из теоремы асимптотически максимальное увеличение сложности происходит при уменьшении ширины на 1.

Следующая теорема показывает, что для конкретных ФВ минимизация сложности может сопровождаться экспоненциальным увеличением ширины, и такой рост максимален.

Теорема 8 [7]. Для любой функции $C \in \mathfrak{C}^{(n)}_{\mathbf{Pr}}$ выполнено $\log_2 k^*_{\mathbf{Pr}}(C) \leqslant k_{\mathbf{Pr}}(C)$ и существует последовательность функций $C_n \in \mathfrak{C}^{(n)}_{\mathbf{Pr}}$ такая, что $\log_2 k^*_{\mathbf{Pr}}(C_n) \sim k_{\mathbf{Pr}}(C_n)$.

3.4. Полные модели

Пусть $\mathbf{M}$ — некоторая модель выбора. Обозначим через $H_n(\mathbf{M})$ *энтропию* (двоичный логарифм числа ФВ) класса $\mathfrak{C}^{(n)}_{\mathbf{M}}$, а через H_n — энтропию класса всех ФВ на множестве $A^{(n)}$. Справедливы следующие оценки энтропии [7]: $H_n = n2^{n-1}$, $H_n(\mathbf{Rl}) = n(n-1)$, $H_n(\mathbf{Sq}_k) \sim (n^2 \log_2(3k+1))/2$, $(n^2 \log_2 n)/4 < H_n(\mathbf{Sq}) \lesssim n^2 \log_2 n$, $H_n(\mathbf{Pr}) \sim \sqrt{n/2\pi}2^n$. Из них следует, что в рассматривавшихся выше классах моделей реализуема лишь малая доля ФВ. В связи с этим представляют интерес классы моделей, в которых представимы произвольные ФВ. Такие классы будем называть *полными*.

Примером полного класса может служить класс $\mathbf{Pr}'$ моделей *параллельного выбора на основе отбраковки худших вариантов* [19]. Они отличаются от рассматривавшихся ранее моделей параллельного выбора тем, что выбор по отношениям осуществляется в соответствии с правилом 3 на с. 41. Сложность модели $M \in \mathbf{Pr}'$ будем характеризовать *шириной* — числом $k(M)$ используемых в ней отношений. При естественной интерпретации величина $k(M)$ совпадает с числом участников процедуры выбора.

Теорема 9 [7, 19].

1. Класс моделей $\mathbf{Pr}'$ полон.
2. Справедливы оценки

$$c_1 n \leqslant k_{\mathbf{Pr}'}(n) \leqslant c_2 n,$$

где c_1 и c_2 — некоторые положительные константы.

Из доказательства теоремы следует, что класс $\mathbf{Pr}'$ остается полным, если в нем ограничиться отношениями, в которых варианты делятся на три класса («хорошие», «удовлетворительные», «плохие») и выбор по отношению производится удалением из предъявления группы «плохих» вариантов. Для такого класса остаются справедливыми оценки теоремы.

Изучены и другие модели со свойством полноты (последовательно-параллельный выбор [7, 12], многошаговые схемы обобщенного математического порграммирования [7, 20]), получены оценки их сложностных параметров.

4. Агрегирование отношений

4.1. Задача синтеза агрегирующих операторов

При необходимости выбора по набору отношений $(r_1, \ldots, r_n)$ часто используют модель, в которой некоторым способом строится агрегированное отношение $r = F(r_1, \ldots, r_n)$ и осуществляется выбор по r. Обычно это бывает в задачах группового выбора, поэтому отношения $r_1, \ldots, r_n$ называют *индивидуальными*, а r — *групповым*.

Систематическое изучение операторов группового выбора F ведет начало от исследований К. Эрроу [21, 22], который сформулировал ряд аксиоматических требований к операторам, каждое из которых представляется необходимым, и доказал их несовместность (теорема невозможности Эрроу [23]). Данный факт получил в литературе название «парадокса Эрроу». Критический анализ использованных аксиом привел к рассмотрению других требований, видоизменивших парадокс, но не устранивших его. Позднее изучение парадокса Эрроу приняло более конструктивный характер. Появился ряд исследований, в которых рассматривались совместные наборы условий и был найден явный вид удовлетворяющих им операторов. Эта задача получила название задачи синтеза операторов группового выбора. Остановимся на ней подробнее.

Задача синтеза операторов группового выбора состоит в том, чтобы найти явный вид операторов F, удовлетворяющих заданным *характеристическим условиям* и *структурным ограничениям* [23]. Характеристические условия представляют собой аксиоматически заданные требования к операторам, структурные ограничения задаются указанием классов отношений $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ (обычно $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$) и требованием, чтобы при использовании индивидуальных отношений из $\mathcal{R}_1$ групповое принадлежало классу $\mathcal{R}_2$. Будем говорить, что соответствующий оператор имеет тип $\mathcal{R}_1^n \to \mathcal{R}_2$.

Будем рассматривать операторы, удовлетворяющие характеристическим условиям бинарности, нейтральности (к вариантам) и ненавязанности [23]. Такие операторы (и только они) представимы в виде

$$F(r_1, \ldots, r_n) = \Phi(r_1, \ldots, r_n, r_1^{-1}, \ldots, r_n^{-1}),$$

где Φ — нетривиальная (не дающая тождественно пустого или полного множества) операция. Вместо r_i^{-1} удобно иметь дело с двойственными отношениями r_i^*. Заменив r_i^{-1} на $\overline{r_i^*}$ и модифицировав соответствующим образом оператор Φ, будем рассматривать представления

$$F(r_1, \ldots, r_n) = \Phi(r_1, \ldots, r_n, r_1^*, \ldots, r_n^*).$$

Если на оператор F наложено дополнительное условие монотонности [23], то операция Φ монотонна, т. е. выразима через $\cap$ и $\cup$.

Для того чтобы указать структурные ограничения, опишем основные классы отношений, используемых в моделях выбора.

4.2. Классы отношений

Отношение r называется (а) *рефлексивным*, (б) *иррефлексивным*, (в) *асимметричным*, (г) *антисимметричным*, (д) *полным*, (е) *связным*, (ж) *транзитивным*, (з) *негатранзитивным*, (и) *ацикличным*, если оно удовлетворяет условию (а) xrx, (б) $x\bar{r}x$, (в) $xry \Rightarrow y\bar{r}x$, (г) $x \neq y \wedge xry \Rightarrow y\bar{r}x$, (д) $xry \vee yrx$, (е) $x \neq y \Rightarrow xry \vee yrx$, (ж) $xry \wedge yrz \Rightarrow xrz$, (з) $x\bar{r}y \wedge y\bar{r}z \Rightarrow x\bar{r}z$, (и) $x_1rx_2 \wedge x_2rx_3 \wedge \ldots \wedge x_{k-1}rx_k \Rightarrow x_k\bar{r}x_1$, $k = 1, 2, \ldots$

Транзитивное иррефлексивное отношение называется *частичным порядком* (строгим), связный частичный порядок — *линейным порядком*, а негатранзитивное ацикличное отношение — *слабым порядком*. Частичный порядок r со свойством $xry \wedge zrv \Rightarrow xrv \vee zry$ называется *интервальным порядком*, а интервальный порядок со свойством $xry \wedge yrz \Rightarrow xrv \vee vrz$ — *полупорядком*. Указанные типы порядков наиболее распространены в задачах выбора. Это связано с тем, что линейные порядки представимы строгим критерием, слабые порядки — нестрогим критерием, интервальные порядки — критерием с погрешностью, полупорядки — критерием с постоянной погрешностью, частичные порядки — совокупностью критериев [24].

Обозначим соответственно через $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ и $\mathcal{A}$ классы отношений частичного, линейного, слабого, интервального порядка, полупорядка, ацикличных и транзитивных отношений. Справедливы строгие включения

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{P} \subset (\mathcal{T}, \mathcal{A}).$$

Классы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{A}$ не сравнимы по включению и оба содержат $\mathcal{P}$.

В качестве классов $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$, задающих структурные ограничения, будем использовать произвольные пары классов из $\{\mathcal{L}, \mathcal{W}, \mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{A}\}$, удовлетворяющие включению $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$. Всего имеется 27 типов таких операторов $\mathcal{R}_1^n \to \mathcal{R}_2$.

Логические средства, используемые для исследования операторов, подобны средствам, применяемым для изучения порядковых отношений, и будут представлены в п. 8.2.

4.3. Явный вид агрегирующих операторов

Чтобы описать явный вид операторов агрегирования, введем некоторые специальные операторы.

Первый из них хорошо известен. Это *оператор лексикографии*

$$\Lambda(r_1, \ldots, r_n) = \bigcup_{j=1}^{k} \Big(r_j \cap \bigcap_{i=1}^{j-1} r_i^* \Big), \qquad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Оператор транзитивной лексикографии является оператором одного из двух типов [25]. Первый имеет вид

$$T(r_1, \ldots, r_n) = \bigcup_{j=1}^{k} \Big(r_j^* \cap \bigcap_{i=1}^{j-1} r_i \Big), \qquad k \in \{1, \ldots, n\},$$

второй получается из него заменой члена $r_1 \cap \ldots \cap r_{k-1} \cap r_k^*$ на $r_1 \cap \ldots \cap r_k$ (такой оператор также будем обозначать T). Дальше, говоря об операторах Λ и T, будем понимать операторы указанного вида, в которых вместо $r_1, \ldots, r_k$ могут быть использованы произвольные отношения $r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}$ набора $(r_1, \ldots, r_n)$.

Чтобы описать следующий тип операторов [26], дадим ряд определений. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *пороговой*, если существуют такие числа $w_1, \ldots, w_n$ (*веса*) и t (*порог*), что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow w_1 x_1 + \ldots + w_n \geqslant 1.$$

Набор $(w_1, \ldots, w_n, t)$ называется *реализацией* функции f. Обозначим через $Th_{1/2}$ класс пороговых функций, для которых существует реализация с $w_1 \geqslant 0, \ldots, w_n \geqslant 0$, $w_1 + \ldots + w_n = 1$, $t = 1/2$. Функции из $Th_{1/2}$ монотонны. Представим функцию $f \in Th_{1/2}$ в виде $f = \bigvee_{\{i_1, \ldots, i_s\}} x_{i_1} \ldots x_{i_s}$, где отсутствуют поглощения конъюнкций (для монотонных функций указанное представление единственно), и сопоставим ей оператор

$$\Theta(r_1, \ldots, r_n) = \bigcup_{\{i_1, \ldots, i_s\}} \; \bigcap_{i \in \{i_1, \ldots, i_s\}} r_i \bigcap_{j \notin \{i_1, \ldots, i_s\}} r_j^*,$$

который с учетом его содержательных свойств будем называть *оператором взвешенного большинства с правом вето*. Операторы T и Θ до работ автора в научной литературе не встречались.

Будем говорить, что некоторый оператор *однотипен* с $F(r_1, \ldots, r_n)$, если он получается из F заменой каких-либо из отношений r_i на r_i^{-1}. При этом в представлении оператора необходимо заменить отношение r_i на $\overline{r_i^*}$ и r_i^* — на $\bar{r}_i$. Для оператора, однотипного с F, будем использовать обозначение $\hat{F}$. В частности, $\hat{\Lambda}$ означает оператор, однотипный с лексикографией, а $\hat{r}_i$ представляет собой отношение r_i либо r_i^{-1}.

Двойственным оператору F называется оператор F^*, получающийся заменой в представлении F теоретико-множественной операции Φ двойственной операцией

$\Phi^*(Y_1,\dots,Y_n,Z_1,\dots,Z_n)=\bar\Phi(\bar Y_1,\dots,\bar Y_n,\bar Z_1,\dots,\bar Z_n)$ и отношений r_i двойственными r_i^* (при этом r_i^* заменяются на r_i). Можно проверить, что двойственный оператор Λ^* отличается из Λ лишь тем, что вместо члена $r_1^*\cap\ldots\cap r_{k-1}^*\cap r_k$ в нем присутствует $r_1^*\cap\ldots\cap r_k^*$.

Следующая теорема указывает явный вид всех операторов типа $\mathcal{R}_1^n\to\mathcal{R}_2$, где $\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2\in\{\mathcal{L},\mathcal{W},\mathcal{S},\mathcal{I},\mathcal{P},\mathcal{T},\mathcal{A}\}$, $\mathcal{R}_1\subseteq\mathcal{R}_2$.

Теорема 10 [25–28]. Оператор агрегирования имеет тип $\mathcal{R}_1^n\to\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2\in\{\mathcal{L},\mathcal{W},\mathcal{S},\mathcal{I},\mathcal{P},\mathcal{T},\mathcal{A}\}$, $\mathcal{R}_1\subseteq\mathcal{R}_2$, тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде, указанном в табл. 1.

Чтобы получить явный вид монотонных операторов типа $\mathcal{R}_1^n\to\mathcal{R}_2$, нужно всюду в табл. 1 заменить $\hat r_i$, $\hat\Lambda_i$, $\hat T_i$ и $\hat\Theta_i$ соответственно на r_i, Λ_i, T_i и Θ_i, а произвольные операторы G — монотонными.

Строки и столбцы в таблице отвечают классам $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ соответственно, а в элементах для пар $(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)$, таких, что $\mathcal{R}_1\not\subseteq\mathcal{R}_2$, проставлен прочерк. Под G понимается произвольный оператор (остальные обозначения введены выше). Часть представленных результатов, относящаяся к операторам $\mathcal{W}^n\to\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_2\in\{\mathcal{W},\mathcal{P},\mathcal{T},\mathcal{A}\}$, получена (другими методами) в [5, 24, 29, 30, 31].

Таблица 1

$\mathcal{R}_1 \backslash \mathcal{R}_2$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{L}$	$\hat r_i$	$\hat r_i$	$\hat r_i$	$\hat r_i$	$\bigcap_i \hat r_i$	$\bigcap_i \hat r_i\cap\bigcap_j \hat r_j^*$	$\hat r_i\cap G$
$\mathcal{W}$	–	$\hat\Lambda$	$\hat\Lambda$	$\hat\Lambda$	$\bigcap_i \hat\Lambda_i$	$\bigcap_i \hat\Lambda_i\cap\bigcap_j \hat\Lambda_j^*$	$\hat\Lambda\cap G$
$\mathcal{S}$	–	–	$\hat r_i$	$\hat r_i$	$\bigcap_i \hat r_i$	$\bigcap_i \hat r_i$	$\hat\Theta\cap G$
$\mathcal{I}$	–	–	–	$\hat r_i$	$\bigcap_i \hat r_i$	$\bigcap_i \hat r_i$	$\hat r_i\cap G$
$\mathcal{P}$	–	–	–	–	$\bigcap_i \hat r_i$	$\bigcap_i \hat r_i$	$\hat r_i\cap G$
$\mathcal{T}$	–	–	–	–	–	$\bigcap_i \hat T_i$	–
$\mathcal{A}$	–	–	–	–	–	–	$\hat r_i\cap G$

4.4. Сложность распознавания типов операторов

Теорема описывает способ порождения всех операторов заданного типа, но не дает способа проверки по произвольному оператору, представим ли он в виде, указанном в табл. 1. Будем считать, что теоретико-множественная операция Φ, задающая оператор F, представлена в форме $\cup\cap$ объединения пересечений множеств или их дополнений, либо в форме $\cap\cup$ пересечения объединений множеств или их дополнений. Им соответствуют булевы функции в виде ДНФ либо КНФ. Для монотонной операции Φ существует единственное представление в виде приведенной ДНФ и КНФ (т. е. без отрицаний переменных и поглощений). Будем считать, что монотонная операция типа $\cup\cap$ либо $\cap\cup$ задана приведенной ДНФ либо КНФ, а для представления произвольной операции соответствующего типа может быть взята любая ДНФ или КНФ. Сформулируем результаты о сложности проверки по оператору F (в форме $\cup\cap$ или $\cap\cup$), осуществляет ли он требуемое отображение $\mathcal{R}_1^n\to\mathcal{R}_2$. Ответ на этот вопрос нам не известен лишь для монотонных операторов $\mathcal{S}^n\to\mathcal{A}$ в форме $\cap\cup$.

Теорема 11 [26]. Для пар классов $\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2\in\{\mathcal{L},\mathcal{W},\mathcal{S},\mathcal{I},\mathcal{P},\mathcal{T},\mathcal{A}\}$, $\mathcal{R}_1\subseteq\mathcal{R}_2$, задача выяснения по оператору F, заданному в форме $\cup\cap$ или $\cap\cup$, осуществляет ли он отображение $\mathcal{R}_1^n\to\mathcal{R}_2$, является а) полиномиальной во всех случаях, когда оператор F монотонен, исключая, быть может, указанный выше случай, где ответ неизвестен;

б) NP-трудной во всех случаях, когда F немонотонен, исключая случаи с $\mathcal{R}_2 = \mathcal{A}$ и F в форме $\cup\cap$, в которых она полиномиальна.

5. Декомпозиция отношений

5.1. Оценки сложности декомпозиций

Будем рассматривать операторы над отношениями, имеющие тот же вид, что и в предыдущем разделе. *Задача декомпозиции отношений* обратна задаче агрегирования и состоит в том, чтобы представить заданное отношение r в виде

$$r = \Phi(r_1, \ldots, r_d, r_1^*, \ldots, r_d^*),$$

где $r_1, \ldots, r_d$ — отношения некоторого класса $\mathcal{R}$; Φ — теоретико-множественная операция. Будем предполагать, что класс $\mathcal{R}$ обеспечивает возможность декомпозиции произвольного отношения r (иррефлексивного). Под *сложностью декомпозиции* будем понимать число d используемых в ней отношений. *Сложность отношения* r (в классе $\mathcal{R}$) будем измерять величиной $d_{\mathcal{R}}(r)$, равной минимальной из сложностей его декомпозиций над $\mathcal{R}$ (использующих произвольные операции Φ). Максимум значений $d_{\mathcal{R}}(r)$ по всем отношениям r на $A^{(n)}$ обозначим $d_{\mathcal{R}}(n)$. Введем аналогичные величины $d^+_{\mathcal{R}}(r)$ и $d^+_{\mathcal{R}}(n)$ для случая, когда в декомпозициях применяются лишь монотонные операции Φ, если класс $\mathcal{R}$ допускает возможность такой декомпозиции для произвольных отношений.

В качестве $\mathcal{R}$ будем использовать классы $\mathcal{L}$, $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}^{(k)}$ отношений линейного порядка, слабого порядка и слабого порядка, имеющих не более k уровней. Напомним [24], что множество A с заданным на нем слабым порядком w разбивается на группы (*уровни*), элементы которых не сравнимы, и уровни могут быть занумерованы так, что xwy тогда и только тогда, когда y принадлежит уровню с большим номером, чем x. Указанный выбор классов для декомпозиции связан с тем, что отношения классов $\mathcal{L}$, $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}^{(k)}$ представимы строгими, нестрогими и k-значными критериями. Эти классы обеспечивают возможность декомпозиции произвольных отношений, в том числе и при использовании лишь монотонных операций Φ [7].

Теорема 12 [7, 32, 33]. Справедливы асимптотические оценки

$$d_{\mathcal{L}}(n) \sim 2\log_2 n,$$
$$2\log_3 n \lesssim d_{\mathcal{W}}(n) \leqslant d_{\mathcal{W}^{(k)}}(n) \leqslant d_{\mathcal{W}^{(2)}}(n) \lesssim 2\log_2(n), \quad 5/3\ \log_2 n \lesssim d_{\mathcal{W}^{(2)}}(n).$$

Величины $d^+_{\mathcal{L}}(n)$, $d^+_{\mathcal{W}}(n)$ и $d^+_{\mathcal{W}^{(k)}}(n)$ асимптотически совпадают с $d_{\mathcal{L}}(n)$, $d_{\mathcal{W}}(n)$ и $d_{\mathcal{W}^{(k)}}(n)$ соответственно.

Ранее в научной литературе исследовалась сложность декомпозиции отношений при использовании специальных типов операций — пересечения [34–36]и мажоритарной [37]. Изложение соответствующих результатов (с доказательствами) имеется в [7].

5.2. Декомпозиции последовательного типа

Этот тип декомпозиций связан с моделью последовательного выбора. Будем говорить, что набор отношений $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ образует *декомпозицию (последовательного типа)* отношения r, если для всех $X \subseteq A$ выполнено

$$C_{r_k}(\ldots C_{r_2}(C_{r_1}(X))\ldots) = C_r(X).$$

В этом случае $r = \Lambda(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ [7, 10], где Λ — оператор лексикографии, в представлении которого участвуют все k отношений. Декомпозицию $(r_1, \ldots, r_k)$ назовем *коммутативной*, если любая перестановка этого набора также образует декомпозицию. При этом исходное отношение представимо в виде $r = r_1 \cup \ldots \cup r_k$ [38].

Пусть задан некоторый класс отношений $\mathcal{R}$. Будем рассматривать декомпозиции (последовательного типа), в которых $r_1, \ldots, r_k \in \mathcal{R}$. *Сложность декомпозиции* будем характеризовать числом k входящих в нее отношений, а *сложность отношения* r будем измерять величиной $k_{\mathcal{R}}(r)$ минимальной сложности его декомпозиций в классе $\mathcal{R}$ (если таких декомпозиций нет, $k_{\mathcal{R}}(r)$ не определено). С r свяжем еще одну сложностную характеристику $k^0_{\mathcal{R}}(r)$, определяемую аналогично при дополнительном условии коммутативности декомпозиций. Исследуем вопрос, сколь сильно могут различаться характеристики $k_{\mathcal{R}}(r)$ и $k^0_{\mathcal{R}}(r)$.

Рассмотрим в качестве $\mathcal{R}$ класс $\mathcal{D} = \mathcal{W}^{(2)}$ (отношения из него называются *дихотомиями*). Следующее утверждение показывает, что переход к коммутативным декомпозициям может привести к экспоненциальному росту сложности декомпозиций в сравнении с минимально возможной.

Теорема 13 [38]. Если $r \in \mathcal{W}^{(s)}$, $s \geqslant 2$, то $k_{\mathcal{D}}(r) = \lceil \log_2 s \rceil$, $\quad k^0_{\mathcal{D}}(r) = s - 1$, где $\lceil a \rceil$ означает ближайшее к a целое число, не меньшее a.

Из результатов работы [39] следует, что задача выяснения по произвольному набору отношений $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$, образует ли он декомпозицию (последовательного типа) отношения $r = \Lambda(r_1, \ldots, r_k)$, является NP-трудной. В связи с этим представляет интерес изучение отношений r, для которых любое представление $r = \Lambda(r_1, \ldots, r_k)$ дает декомпозицию $(r_1, \ldots, r_k)$. Такие отношения r будем называть *вполне разделимыми*. Будем рассматривать также *коммутативно вполне разделимые отношения* r, для которых всякое представление $r = r_1 \cup \ldots \cup r_k$ дает коммутативную декомпозицию.

Чтобы описать класс всех вполне разделимых отношений, введем некоторые понятия. Скажем, что отношение r', заданное на множестве A', получено из отношения r на множестве A *расщеплением элементов* $x_1, \ldots, x_s \in A$, если $A' = A \cup \{x'_1, \ldots, x'_s\}$ и r' образовано из r добавлением при $i = 1, \ldots, s$ пар (x_i, x'_i), (x'_i, x_i), а также (y, x'_i) и (x'_i, z) для всех таких y и z из A, что $y r x_i$ и $x_i r z$. Если r — отношение и для элемента x нет таких y, что $x r y$, то x называется *минимальным* в r.

Теорема 14 [38].

1. Отношение вполне разделимо тогда и только тогда, когда оно может быть получено из частичного порядка расщеплением некоторых минимальных элементов.

2. Отношение коммутативно вполне разделимо тогда и только тогда, когда оно является частичным порядком.

Из теоремы следует, что в случае асимметричных отношений оба типа вполне разделимости определяют один и тот же класс $\mathcal{P}$ отношений частичного порядка. Теорема 13 показывает, что использование для отношений этого класса коммутативных декомпозиций может привести к экспоненциальному росту сложности.

6. Контекстно-независимые модели

6.1. Понятие контекстно-независимого выбора

Под контекстной независимостью модели выбора понимается отсутствие в описании модели элементов, зависящих от предъявленного множества вариантов. Классические модели выбора, базирующиеся на критериях или отношениях предпочтения, считаются контекстно-независимыми (КН), поскольку на критериальные оценки или результаты парного сравнения вариантов не влияет состав предъявления. Наличие зависимости от контекста значительно усложняет исследование моделей выбора [8]. Строгого понятия КН-выбора, пригодного для моделей достаточно общего вида, не было, и обсуждения, связанные с контекстной зависимостью либо независимостью, велись на неформальном уровне и касались конкретных моделей. Отсутствие точного определения не позволяло сделать КН-выбор предметом строгого изучения.

Формальное определение КН-выбора дано в [14]. Из этой работы следует, что класс моделей, не зависящих от контекста, включает основные модели, используемые в приложениях. КН-модели допускают единообразное формальное описание и единые методы исследования. Работа [14] в значительной мере основана на результатах из [40], где исследовались КН-модели частного вида — порядковые. Данный раздел написан по материалам [14, 40].

Дальше мы отказываемся от предположения о конечности множества вариантов A — оно может быть произвольным. Предлагаемый подход использует язык узкого исчисления предикатов [41]. Формулы этого языка содержат (наряду с предметными переменными, запятыми и скобками) символы предикатов, логические связки и кванторы, примененные к предметным переменным. Рассматриваются интерпретации формул, в которых предметные переменные принимают значения из множества A и предикаты заданы на всем A. Если $\mathcal{F}(x,\ldots,z)$ — формула, всеми свободными переменными которой являются $x,\ldots,z$, и если заданы $X\subseteq A$, $\hat{x},\ldots,\hat{z}\in X$, то через $\mathcal{F}(\hat{x},\ldots,\hat{z})|_X$ будем обозначать значение формулы $\mathcal{F}$ (истина либо ложь) на множестве X при $x=\hat{x},\ldots,z=\hat{z}$ (связанные переменные принимают значения из X). Функция выбора C на множестве A называется *контекстно-независимой*, если существует формула $\mathcal{C}(x)$ с одним предметным переменным x такая, что для всех $X\subseteq A$ и $x\in X$ выполнено $x\in C(X)\Leftrightarrow \mathcal{C}(x)|_X$. В этом случае $\mathcal{C}$ называется *формализацией* функции C. Она обеспечивает единое при всех X описание ФВ C (более подробное обсуждение в [14]).

В качестве примеров приведем формализации для трех правил выбора по отношению, введенных в п. 1.3:

$$\mathcal{C}_{r,1}(x)=(\forall y)xr^*y,\quad \mathcal{C}_{r,2}(x)=(\forall y)xry,\quad \mathcal{C}_{r,3}(x)=(\exists y)xry\vee(\forall z)xr^*z,$$

где r^* — двойственное отношение.

6.2. Операции над формализациями

Непосредственное построение формализаций для сколь-нибудь сложных моделей связано со значительными трудностями. Для упрощения этого процесса рассмотрим некоторые операции над КН-функциями и укажем соответствующие преобразования формализаций.

Суперпозиция. Определение этой операции дано в п. 1.4. Чтобы описать формализацию суперпозиции, введем некоторые понятия [42]. Пусть $\mathcal{A}$ — формула узкого исчисления предикатов и P — одноместный предикат. Формула $\mathcal{A}_P$, полученная из $\mathcal{A}$ заменой всех подформул $\forall y\mathcal{F}$ на $\forall y(P(y)\to\mathcal{F})$ и всех подформул $\exists y\mathcal{F}$ на $\exists y(P(y)\wedge\mathcal{F})$, называется *релятивизацией* $\mathcal{A}$ *относительно* P [42]. Если $\mathcal{C}_1(x)$ и $\mathcal{C}_2(x)$ — формализации ФВ C_1 и C_2, то суперпозиция $C_1\circ C_2$ имеет формализацию [40]

$$\mathcal{C}(x)=\mathcal{C}_1(x)\wedge\mathcal{C}_{2,\mathcal{C}_1}(x),$$

где $\mathcal{C}_{2,\mathcal{C}_1}$ — релятивизация $\mathcal{C}_2(x)$ относительно $\mathcal{C}_1(x)$.

В качестве примера приведем формализацию функции последовательного выбора $C_{r_1r_2}$ глубины 2, полученную с использованием формализаций для функций C_{r_i} выбора по отношениям, ассоциативности операции суперпозиции и некоторых эквивалентных преобразований:

$$\mathcal{C}_{r_1r_2}(x) = \forall y \exists z(xr_1^* y \wedge (zr_1 y \vee xr_2^* y)).$$

Композиция. Определение этой операции дано в п. 1.5. Если ФВ C образована композицией КН-функций $C_1, \ldots, C_k$ с помощью теоретико-множественной операции F, т. е. $C(X) = F(C_1(X), \ldots, C_k(X))$, то она является КН-функцией и имеет формализацию

$$\mathcal{C}(x) = f(\ \mathcal{C}_1(x), \ldots, \mathcal{C}_k(x)),$$

где f — булева функция, соответствующая операции F.

Ветвление. Пусть Q —некоторое свойство выбора. Будем записывать $Q_X(C)$, если $C(X)$ удовлетворяет свойству Q. *Оператор ветвления* ∇_Q сопоставляет функциям выбора C_1 и C_2 функцию

$$(C_1 \nabla_Q C_2)(X) = \begin{cases} C_1(X), & \text{если } Q_X(C), \\ C_2(X), & \text{если } \bar{Q}_X(C). \end{cases}$$

Свойство Q назовем *формализуемым*, если существует замкнутая формула $\mathcal{Q}(\mathsf{C})$ узкого исчисления предикатов, содержащая переменный одноместный предикат C, и такая, что для любой КН-функции C и ее формализации $\mathcal{C}$ выполнено $\mathcal{Q}(\mathcal{C})|_X \Leftrightarrow Q_X(C)$. Примером может служить свойство «выбирается не более k вариантов». Его формализация имеет вид $\forall x_1 \ldots \forall x_{k+1}(\mathsf{C}(x_1) \wedge \ldots \wedge \mathsf{C}(x_{k+1}) \to \bigvee\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant k+1} x_i = x_j)$.

Если C_1 и C_2 — КН-функции и свойство Q формализуемо, то $C = C_1 \nabla_Q C_2$ также является КН-функцией, ибо

$$\mathcal{C}(x) = (\mathcal{C}_1(x) \wedge \mathcal{Q}(\mathcal{C}_1)) \vee (\mathcal{C}_2(x) \wedge \bar{\mathcal{Q}}(\mathcal{C}_1)).$$

Ограниченная обратная связь. Нетрудно видеть, что операция ∇_Q ассоциативна и потому можно рассматривать многоместную операцию $C_1 \nabla_Q C_2 \nabla_Q \ldots \nabla_Q C_s$. При заданном s введем операцию *ограниченной обратной связи*

$$\mathcal{BF}(C_1, C_2, \ldots, C_s \mid Q) = C_1 \nabla_Q C_2 \nabla_Q \ldots \nabla_Q C_s \nabla_Q C^1,$$

где $C^1(X) \equiv X$. Эта операция описывает s-туровую процедуру выбора с обратной связью: выбор $C_i(X)$, произведенный на туре i, считается окончательным, если удовлетворяет свойству Q, в противном случае переходят к туру $i+1$. Если процедура в течение s туров не завершится, она прерывается и возвращается в исходное состояние. Операция $\mathcal{BF}$ в применении к КН-функциям и формализуемому свойству дает КН-функцию, поскольку выражается через ветвление.

Результаты данного пункта могут быть подытожены следующим утверждением.

Теорема 15. Операции суперпозиции, композиции, ветвления и ограниченной обратной связи, примененные к контекстно-независимым функциям выбора, дают контекстно-независимые функции.

Отсюда видно, что большинство используемых в приложениях моделей выбора порождает КН-функции. Иногда с помощью этих операций удается доказать, что модель, исходно построенная как контекстно зависимая, реализует КН-выбор. Примером может служить [14] модель выбора «по числу первых мест», когда выбор осуществляется по некоторой совокупности критериев и выбираются варианты, являющиеся лучшими в данном предъявлении по наибольшему числу критериев.

6.3. Упрощение и анализ формализаций

Будем рассматривать формализации, приведенные к предваренной (пренексной) форме [42]:

$$\mathcal{C}(x) = Q_1 y_1 \dots Q_s y_s \mathcal{F}(x, y_1, \dots, y_s),$$

где $Q_1, \dots, Q_s \in \{\forall, \exists\}$, $\mathcal{F}$ — бескванторная формула. Такое прдставление будем называть $(Q_1 \dots Q_s)$-*формулой.* Число s кванторов будем называть *рангом формулы.* Ранг характеризует размерность модели выбора. В связи с этим возникает задача минимизации ранга.

Рассмотрим эту задачу применительно к моделям последовательного выбора $C_{r_1 \dots r_k}$ и параллельного выбора $C_{F, r_1 \dots r_k}$. Непосредственное построение формализаций методами п. 6.2 с последующим приведением к предваренной форме дают для этих функций формализации, ранг которых экспоненциально зависит от k. Применение эквивалентных преобразований логики предикатов с использованием ассоциативности операции суперпозиции позволяет существенно уменьшить эту величину.

Теорема 16 [14, 40]. Для последовательного выбора глубины k и параллельного выбора ширины k существуют формализации, ранг которых не превосходит k.

Формализации могут быть использованы для исследования свойств КН-функций. Остановимся на двух свойствах, наиболее часто встречающихся в научной литературе (см., например, [23]). Говорят, что ФВ C обладает свойством

- *наследования*, если $C(X_1 \cup X_2) \subseteq C(X_1) \cup C(X_2)$;
- *согласия*, если $C(X_1 \cup X_2) \supseteq C(X_1) \cap C(X_2)$.

Теорема 17 [40]. Если функция выбора C формализуема посредством (а) $(\forall \dots \forall)$-формулы, (б) $(\forall\exists \dots \exists)$-формулы, то она обладает свойством (а) наследования, (б) согласия.

Рассмотрим примеры применения теоремы. Функция параллельного выбора описывается $(\forall \dots \forall)$-формулой, поэтому она удовлетворяет свойству наследования. Последовательный выбор глубины 2 имеет $(\forall\exists)$-формализацию (см. выше), поэтому для него справедливо свойство согласия. Выбор по отношению описывается $(\forall)$-формулой и, следовательно, удовлетворяет обоим свойствам. Выбор по отношению, основанный на исключении худших вариантов, может быть представлен $(\forall\exists)$-формулой и потому обладает свойством согласия.

Другие применения формализаций для исследования ФВ будут приведены в разделе, относящемся к порядковым моделям выбора.

Часть II. ПОРЯДКОВЫЕ МОДЕЛИ ВЫБОРА

7. Порядковые отношения на $\mathbb{R}^n$

7.1. Порядковые отношения

Будем рассматривать n-мерное действительное пространство $\mathbb{R}^n$, точки которого будем обозначать через $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ и т. д. Для $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\operatorname{sgn}(x_1 - y_1), \dots, \operatorname{sgn}(x_n - y_n)),$$

где $\operatorname{sgn} z = -1$, 0 и 1 при $z < 0$, $z = 0$ и $z > 0$ соответственно. Отношение ρ на $\mathbb{R}^n$ называется *порядковым*, если

$$\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Delta(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') \Longrightarrow \boldsymbol{x} \rho \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}' \rho \boldsymbol{y}'.$$

Если дополнительно выполнено условие $\boldsymbol{x}\rho\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{z}\rho\boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{x} \Leftrightarrow z_1 \geqslant x_1, \ldots, z_n \geqslant x_n$, порядковое отношение (ПО) ρ называется *правильным.*

Порядковые отношения (обычно правильные) часто используются в задачах многокритериального выбора [3]. Точки пространства $\mathbb{R}^n$ интерпретируются как наборы оценок вариантов по n заданным критериям. Хорошо известными примерами правильных ПО являются *отношение Парето* $\boldsymbol{x}\pi\boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ и *лексикография*

$$\boldsymbol{x}\lambda\boldsymbol{y} \Longleftrightarrow x_1 > y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 > y_2) \vee \ldots \vee (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} = y_{k-1} \wedge x_k > y_k),$$

$k \leqslant n$. При $k = n$ лексикография называется *полной.*

7.2. Логическое описание

Обозначим через $P_{3,2}$ класс двузначных функций $g(u_1, \ldots, u_n) = g(\tilde{u})$ от трехзначных аргументов, $u_s \in \{-1, 0, +1\}$, $1 \leqslant s \leqslant n$, $\forall \tilde{u}(g(\tilde{u}) \in \{0, 1\})$. ПО ρ однозначно задается *представляющей функцией* $g_\rho(\tilde{u})$, связанной с ρ соотношением $\boldsymbol{x}\rho\boldsymbol{y} \Leftrightarrow g_\rho(\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = 1$. Нетрудно видеть, что отношение ρ правильно тогда и только тогда, когда функция g_ρ монотонна, т. е. удовлетворяет условию $\tilde{u} \geqslant \tilde{v} \Rightarrow g_\rho(\tilde{u}) \geqslant g_\rho(\tilde{v})$.

Введем функции $p(u), p'(u) \in P_{3,2}$ от одного аргумента, положив $p(u) = 1 \Leftrightarrow u > 0$, $p'(u) = 1 \Leftrightarrow u \geqslant 0$. Всякая функция $g \in P_{3,2}$ представима в виде [26]

$$g(u_1, \ldots, u_n) = \varphi(p(u_1), \ldots, p(u_n), p'(u_1), \ldots, p'(u_n)),$$

где φ — булева функция. Введя обозначения p_i, p'_i вместо $p(u_i)$, $p'(u_i)$ и положив $P = (p_1, \ldots, p_n)$, $P' = (p'_1, \ldots, p'_n)$, будем записывать такое представление в виде $g = \varphi(P, P')$. Имея это в виду, иногда будем считать g функцией переменных (P, P') и писать $g(P, P')$.

Выделим два специальных представления функций $g \in P_{3,2}$ — ДНФ и КНФ [26]. С учетом эквивалентных соотношений $p_i \wedge p'_i = p_i$ и $\bar{p}'_i \wedge \bar{p}_i = \bar{p}'_i$ любая конъюнкция $K \not\equiv 0$ от переменных (P, P') может быть приведена к виду $K = q_1 q_2 \ldots q_n$ (значки $\wedge$ конъюнкции опущены), где $q_i \in \{p_i, p'_i, \bar{p}_i, \bar{p}'_i, p'_i\bar{p}_i, 1\}$ ($q_i = 1$ означает отсутствие соответствующего сомножителя). Такие конъюнкции будем называть *элементарными конъюнкциями*, а сомножители q_i — *элементарными сомножителями.* Дизъюнкцию элементарных конъюнкций назовем *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ). Всякая функция $g \not\equiv 0$ представима в виде ДНФ, а ДНФ функции $g \equiv 0$ считаем равной 0. Любая монотонная функция единственным образом реализуется в виде *приведенной ДНФ*, т. е. ДНФ, не содержащей отрицаний переменных и поглощаемых с учетом соотношений $p_i \leqslant p'_i$ конъюнкций (K_1 поглощает K_2 , если $K_1 \geqslant K_2$). Двойственным образом вводится понятие *элементарной дизъюнкции* $D = d_1 \vee \ldots \vee d_n$, где $d_i \in \{p_i, p'_i, \bar{p}_i, \bar{p}'_i, p_i \vee \bar{p}'_i, 0\}$ называется *элементарным слагаемым.* Всякая функция $g \not\equiv 1$ представима *конъюнктивной нормальной формой* — конъюнкцией элементарных дизъюнкций, а всякая монотонная функция единственным образом представима *приведенной КНФ*, т. е. КНФ, не содержащей отрицаний переменных и поглощаемых дизъюнкций (D_1 поглощает D_2, если $D_1 \leqslant D_2$). Приведенные ДНФ и КНФ функции $g \equiv \mathrm{const}$ считаются совпадающими с этой константой.

Укажем явный вид приведенных ДНФ и КНФ представляющей функции отношения лексикографии:

$$g_\lambda = p_1 \vee p'_1 p_2 \vee p'_1 p'_2 p_3 \vee \ldots \vee p'_1 \ldots p'_{k-1} p_k,$$
$$g_\lambda = p'_1 (p_1 \vee p'_2)(p_1 \vee p_2 \vee p'_3) \ldots (p_1 \vee \ldots \vee p_{k-2} \vee p'_{k-1})(p_1 \vee \ldots \vee p_k).$$

7.3. Операции над отношениями и представляющими функциями

Существенную роль при исследовании свойств ПО играет возможность описания основных операций над ПО в терминах преобразования представляющих функций [26, 43].

1°. Если $\rho = F(\rho_1, \ldots, \rho_k)$, где F — теоретико-множественная операция, $\rho_1, \ldots, \rho_k$ — ПО, то

$$g_\rho(P, P') = \varphi_F(g_{\rho_1}(P, P'), \ldots, g_{\rho_k}(P, P')),$$

где φ_F — булева функция, соответствующая операции F.

Скажем, что ρ' получено из ρ *инвертированием оси* 1, если

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\rho'(y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow (y_1, x_2, \ldots, x_n)\rho(x_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Аналогично определяется результат инвертирования оси i. Отношение $\hat{\rho}$, полученное из ρ инвертированием некоторых осей, называется *однотипным* с ρ.

2°. Если ρ' образовано из ПО ρ инвертированием оси i, то представляющая функция $g_{\rho'}$ может быть получена из g_ρ заменой p_i и p'_i соответственно на $\bar{p}'_i$ и $\bar{p}_i$, т. е. при $i = 1$ имеет вид

$$g_{\rho'}(p_1, \ldots, p_n, p'_1, \ldots, p'_n) = g_\rho(\bar{p}'_1, p_2, \ldots, p_n, \bar{p}_1, p'_2, \ldots, p'_n).$$

В случае однотипных отношений указанную замену нужно произвести для всех инвертированных осей.

3°. Представляющая функция отношения ρ^{-1}, обратного к ПО ρ, может быть записана в виде

$$g_{\rho^{-1}}(P, P') = g_\rho(\bar{P}', \bar{P}),$$

где $\bar{P} = (\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)$, $\bar{P}' = (\bar{p}'_1, \ldots, \bar{p}'_n)$.

4°. Представляющая функция отношения ρ^*, двойственного к ρ, имеет вид

$$g_{\rho^*}(P, P') = g^*_\rho(P', P),$$

где g^*_ρ — булева функция, двойственная к g_ρ.

Введем операцию композиции $g \circ \hat{g}$ функций $g(P, P')$ и $\hat{g}(P, P')$, которая позволит найти представляющую функцию произведения отношений. Операцию $\circ$ определим вначале для элементарных сомножителей, затем для элементарных конъюнкций и, наконец, — для функций, заданных посредством ДНФ.

Композиция $q_i \circ \hat{q}_i$ элементарных сомножителей находится согласно табл. 2, содержащей в пересечении строки q_i и столбца $\hat{q}_i$ значение $q_i \circ \hat{q}_i$. Композицией элементарных конъюнкций $K = q_1 \ldots q_n$ и $\hat{K} = \hat{q}_1 \ldots \hat{q}_n$ назовем элементарную конъюнкцию

Таблица 2

	p_i	p'_i	$\bar{p}_i$	$\bar{p}'_i$	$p'_i\bar{p}_i$	1
p_i	p_i	p_i	1	1	p_i	1
p'_i	p_i	p'_i	1	1	p'_i	1
$\bar{p}_i$	1	1	$\bar{p}_i$	$\bar{p}'_i$	$\bar{p}_i$	1
$\bar{p}'_i$	1	1	$\bar{p}'_i$	$\bar{p}'_i$	$\bar{p}'_i$	1
$p'_i\bar{p}_i$	p_i	p'_i	$\bar{p}_i$	$\bar{p}'_i$	$p'_i\bar{p}_i$	1
1	1	1	1	1	1	1

$K \circ \hat{K} = (q_1 \circ \hat{q}_1) \dots (q_n \circ \hat{q}_n)$. Композицию функций $g, \hat{g} \not\equiv 0$, заданных посредством ДНФ $g = K_1 \vee \ldots \vee K_s$ и $\hat{g} = \hat{K}_1 \vee \ldots \vee \hat{K}_t$, определим равенством

$$g \circ \hat{g} = \bigvee_{1 \leqslant u \leqslant s,\, 1 \leqslant v \leqslant t} K_u \circ \hat{K}_v.$$

Теорема 18. Представляющая функция произведения $\rho_1\rho_2$ находится как композиция $g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$ представляющих функций для ρ_1 и ρ_2.

Если определить *степень* g^k *функции* g, положив $g^1 = g$, $g^k = g^{k-1} \circ g$, $k \geqslant 2$, то последовательность степеней не убывает, т. е. $g \leqslant g^2 \leqslant \ldots \leqslant g^k \leqslant \ldots$, и ограничена [26]. Результат ее стабилизации обозначим $[g]$.

Произведение порядковых отношений обладает рядом свойств, не имеющих места для произвольных отношений. В их числе коммутативность $\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$ (вытекающая из коммутативности операции композиции) и свойство неубывания степеней $\rho \subseteq \rho^2 \subseteq \ldots \subseteq \rho^k \subseteq \ldots$, где $\rho^1 = \rho$, $\rho^k = \rho^{k-1}\rho$, $k \geqslant 2$. Результат стабилизации этой неубывающей ограниченной последовательности, который обозначим $[\rho]$, является транзитивным замыканием отношения ρ. Легко видеть, что оно является порядковым отношением (а для правильного отношения ρ — правильным) и функция $g_{[\rho]}$ совпадает с $[g_\rho]$.

7.4. Распознавание свойств отношений

Следующая теорема связывает свойства порядковых отношений, определенные в п. 4.2, со свойствами представляющих функций. Пусть $\tilde{0} = (0, \ldots, 0)$ и $\tilde{1} = (1, \ldots, 1)$ — наборы длины n, $D_0 = p_1 \vee \ldots \vee p_n \vee \bar{p}'_1 \vee \ldots \vee \bar{p}'_n$.

Теорема 19 [26]. Порядковое отношение ρ (а) рефлексивно, (б) иррефлексивно, (в) асимметрично, (г) антисимметрично, (д) полно, (е) связно, (ж) транзитивно, (з) негатранзитивно, (и) ациклично тогда и только тогда, когда

(а) $g_\rho(\tilde{0}, \tilde{1}) = 1$, (б) $g_\rho(\tilde{0}, \tilde{1}) = 0$, (в) $g_\rho(P, P') \leqslant g^*_\rho(P', P)$, (г) $D_0 g_\rho(P, P') \leqslant D_0 g^*_\rho(P', P)$, (д) $g_\rho(P, P') \geqslant g^*_\rho(P', P)$, (е) $D_0 g_\rho(P, P') \geqslant D_0 g^*_\rho(P', P)$, (ж) $g_\rho(P, P') \circ g_\rho(P, P') \leqslant g_\rho(P, P')$, (з) $g^*_\rho(P', P) \circ g^*_\rho(P', P) \leqslant g^*_\rho(P', P)$, (и) $[g_\rho](\tilde{0}, \tilde{1}) = 0$.

Рассмотрим вопрос о сложности распознавания свойств отношений по их представляющим функциям. Будем считать, что представляющие функции заданы посредством ДНФ или КНФ, причем для ПО общего вида эти ДНФ и КНФ произвольны, для правильных ПО являются приведенными. В [26, 43] проведено исследование на NP-трудность и полиномиальность задач распознавания свойств отношений, сформулированных в п. 4.2. Получены следующие результаты.

Теорема 20 [43]. Задачи проверки по представляющим функциям порядковых отношений, заданных в виде ДНФ либо КНФ, обладают ли они свойствами рефлексивности, иррефлексивности, асимметричности, антисимметричности, полноты, связности, транзитивности, негатранзитивности, ацикличности, являются полиномиальными либо NP-трудными в соответствии с тем, как указано в табл. 3, где P и NP означают соответственно полиномиальность и NP-трудность.

7.5. Синтез порядковых отношений с заданными свойствами

Выше логические методы применялись для анализа ПО. Использование этих методов для построения ПО с требуемыми свойствами проиллюстрируем примером отношений с заданным соотношением критериев по важности. Многие алгоритмы построения многокритериальных моделей существенно используют информацию о важности

Таблица 3

Свойство	**Тип отношений**			
	произвольные		правильные	
	Вид задания			
	ДНФ	КНФ	ДНФ	КНФ
Рефлексивность Иррефлексивность	P	P	P	P
Асимметрия Антисимметрия	P	NP	P	NP
Полнота Связность	NP	P	NP	P
Транзитивность Негатранзитивность	NP	NP	P	P
Ацикличность	P	NP	P	P

критериев. Формальные понятия, связанные с важностью (силой) критериев введены в [44, 45] и получили развитие в ряде исследований (см., например, [3]). Дадим соответствующие определения [46], которые несколько отличаются от используемых в указанных работах, поскольку ориентированы на ПО и произвольное соотношение критериев по важности.

Пусть на множестве критериев $\{1,\ldots,n\}$ задано рефлексивное отношение r *силы критериев*. Будем считать, что в случаях (а) irj, (б) $irj \wedge j\bar{r}i$, (в) $irj \wedge jri$, (г) $i\bar{r}j \wedge j\bar{r}i$ критерий (а) *не слабее* j, (б) *сильнее* j, критерии i и j (в) *равноценны*, (г) *несравнимы*. Обозначим через $\tilde{u}_{ij}$ набор, полученный из $\tilde{u} \in \{-1,0,+1\}^n$ перестановкой компонент u_i и u_j, $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Скажем, что ПО ρ *согласовано с отношением силы* r, если

$$(g_\rho(\tilde{u}) = 1 \wedge irj \wedge (u_i = -1) \wedge (u_j = 1)) \Rightarrow g_\rho(\tilde{u}_{ij}) = 1.$$

Обозначим через τ_r наименьшее транзитивное ПО, согласованное с r и включающее отношение Парето π.

В [46] найден явный вид представляющей функции отношения τ_r для произвольного отношения r силы критериев. Сложность формулы (число символов переменных), задающей представляющую функцию, не превосходит $n(n+1)/2$. Укажем ее для случая, когда r — частичный порядок.

Теорема 21 [46]. Если r — отношение частичного порядка, то

$$g_{\tau_r} = \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(p_i' \vee \bigvee_{j\in r^{-1}(i)\setminus\{i\}} p_j\Big).$$

Рассмотрим важный для приложений частный случй, когда r — слабый порядок. Пусть множество критериев разбито на группы $I_1,\ldots,I_k$ и считается, что при $s<t$ критерии из группы I_s сильнее критериев из I_t (а внутри группы они несравнимы). Можно показать, что тогда отношение τ_r приобретает вид $\tau_r = \pi(I_1)\cup\pi(I_1\cup I_2)\cup\ldots\cup\pi(I_1\cup\ldots\cup I_k)$, где через $\pi(I)$ обозначено отношение Парето на множестве критериев $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$. Отсюда в силу теоремы 14 следует, что выбор по отношению τ_r может быть заменен последовательным выбором по набору отношений Парето. Для паретовского выбора могут быть применены известные эффективные процедуры.

8. Связь порядковых отношений и операторов группового выбора

8.1. Явный вид порядковых отношений

Теорема 19 позволяет найти явный вид порядковых отношений из классов $\mathcal{L}, \mathcal{W}, \mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{A}$, определенных в п. 4.2. Отношения, однотипные с лексикографиями и полными лексикографиями, т. е. полученные из них инвертированием некоторых осей, будем называть *обобщенными лексикографиями* и *обобщенными полными лексикографиями*.

Теорема 22 [26, 43]. Порядковое отношение является (а) линейным порядком; (б) слабым порядком, полупорядком, интервальным порядком; (в) частичным порядком; (г) транзитивным отношением; (д) ацикличным отношением тогда и только тогда, когда оно представляет собой (а) обобщенную полную лексикографию; (б) обобщенную лексикографию; (в)пересечение обобщенных лексикографий; (г) пересечение обобщенных лексикографий или пересечение отношений, двойственных обобщенным лексикографиям; (д) может быть дополнено до обобщенной лексикографии.

В случае правильных ПО нужно всюду в формулировке заменить обобщенные и полные обобщенные лексикографии лексикографиями и полными лексикографиями.

Таким образом, для ПО на $\mathbb{R}^n$ классы $\mathcal{W}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{I}$ совпадают, в то время как в общем случае имеют место строгие включения $\mathcal{W} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{I}$.

Приведем результаты о сложности проверки по представляющим функциям порядковых отношений (произвольных и правильных) в форме ДНФ и КНФ их принадлежности рассматриваемым классам.

Теорема 23 [26, 43]. Задача распознавания по представляющей функции в виде ДНФ или КНФ принадлежности отношения ρ классу $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{L}, \mathcal{W}, \mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{A}\}$ решается полиномиально для правильных ПО, а для ПО общего вида является NP-трудной во всех случаях, исключая сучай $\mathcal{Q} = \mathcal{A}$ и g_ρ в виде ДНФ, в котором задача решается полиномиально.

8.2. Сведение задачи синтеза операторов группового выбора к распознаванию свойств ПО

Вернемся к задаче синтеза операторов группового выбора для модели свободного выбора, сформулированной и рассмотренной в п. 4.1. Ниже будут приведены результаты, показывающие, что эта задача родственна задаче анализа свойств порядковых отношений, а в некоторых постановках — эквивалентна ей. Найденное соответствие между операторами и порядковыми отношениями позволяет унифицировать исследования в этих областях, ранее проводившиеся параллельно. Оно дает возможность связать ряд результатов по агрегированию с фактами из классической теории отношений (леммой Шпильрайна, теоремой Душника–Миллера) и объяснить наблюдаемые аналогии. Данный подход сводит достаточно сложные объекты (операторы над отношениями) к простым объектам (порядковым отношениям), что облегчает исследование операторов, позволяет использовать геометрическую интуицию. Он предложен в [26], расширен в [25, 27], его изложению и обсуждению посвящен обзор [28]. Связь этого подхода с методом интерпретаций, применяемым в теории моделей, рассмотрен в [47].

Свойства отношений r и классы отношений обычно задаются системами аксиом, которые в большинстве случаев имеют вид

$$\forall x_1 \ldots \forall x_s P(x_1, \ldots, x_s),$$

где P — бескванторная формула, содержащая (наряду с предметными переменными x_i и логическими операциями) вхождения двуместного предиката $x_i r x_j$ и предиката равенства $x_i = x_j$. Такие свойства и классы отношений будем называть *универсально аксиоматизируемыми.* В частности, универсально аксиоматизируемыми являются все свойства и классы отношений, введенные в п. 4.2 (кванторы общности там опущены и аксиомы записаны в форме $P(x_1, \ldots, x_s)$). Если равенства в аксиомах отсутствуют, то они являются формулами узкого исчисления предикатов [41], и соответствующие свойства и классы отношений будем называть *узко универсально аксиоматизируемыми.* В п. 4.2 такими являются все свойства, исключая антисимметрию и связность, в определении которых участвуют неравенства (отрицания равенств), и все классы, исключая $\mathcal{L}$.

Установим соответствие между опраторами группового выбора рассматриваемого типа $F = \Phi(r_1, \ldots, r_n, r_1^*, \ldots, r_n^*)$ и функциями (3,2)-значной логики, сопоставив оператору F функцию $g_F = \varphi(p_1, \ldots, p_n,\, p_1', \ldots, p_n')$, где φ — булева функция, отвечающая теоретико-множественной операции Φ. Нетрудно видеть, что это соответствие взаимно однозначно. Обозначим через ρ_F ПО с представляющей функцией $g_{\rho_F} = g_F$. Следующая теорема устанавливает связь между операторами F типа $\mathcal{W}^n \to \mathcal{R}$ и соответствующими им ПО ρ_F.

Теорема 24 [26]. Если $\mathcal{R}$ — узко универсально аксиоматизируемый класс отношений, то оператор $F = \Phi(r_1, \ldots, r_n, r_1^*, \ldots, r_n^*)$ осуществляет отображение $\mathcal{W}^n \to \mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда соответствующее ему порядковое отношение ρ_F принадлежит $\mathcal{R}$.

Отметим, что теорема не переносится на все универсально (не узко) аксиоматизируемые классы (например, на $\mathcal{L}$). Используя указанное в предыдущем пункте явное описание ПО из основных классов, получаем явный вид операторов типа $\mathcal{W}^n \to \mathcal{R}$, указанный в теореме 10.

Явный вид операторов типа $\mathcal{L}^n \to \mathcal{R}$ может быть получен путем следующего сведения к теореме 24 [27, 28]. Поскольку для отношения $r_i \in \mathcal{L}$ при $x \neq y$ выполнено $x\bar{r}_i y = xr^{-1}y$ и $xr_i y = xr_i^* y$, можно путем эквивалентных преобразований привести оператор $F = \Phi(r_1, \ldots, r_n, r_1^*, \ldots, r_n^*)$ к виду $F = \Psi(r_1, \ldots, r_n, r_1^{-1}, \ldots, r_n^{-1})$, если он порождает иррефлексивные отношения, либо к виду $F = \Psi(r_1^*, \ldots, r_n^*, \bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)$, если он порождает рефлексивные отношения. Здесь Ψ — монотонная теоретико-множественная операция. Такие операторы будем называть *однородными*, а преобразование, с помощью которого они получены, — *редукцией.*

Теорема 25 [27, 28]. Если $\mathcal{R}$ — узко универсально аксиоматизируемый класс отношений и множество $\mathcal{F}$ операторов решает проблему синтеза для $\mathcal{W}^n \to \mathcal{R}$, то множество всех однородных операторов $\mathcal{F}'$, полученных редукцией операторов $F \in \mathcal{F}$, решает проблему синтеза для $\mathcal{L}^n \to \mathcal{R}$.

Отсюда с учетом легко проверяемого факта, что редукция обобщенной лексикографии дает оператор r_i либо r_i^{-1}, получаем явный вид операторов $\mathcal{L}^n \to \mathcal{R}$, указанный в теореме 10.

Для других классов отношений $\mathcal{R}_1$ не удалось сформулировать общих результатов о виде операторов $\mathcal{R}_1^n \to \mathcal{R}_2$, подобных теоремам для $\mathcal{W}$ и $\mathcal{L}$. Однако сам подход к описанию операторов $\mathcal{R}_1^n \to \mathcal{R}_2$ на основе представляющих функций g_ρ отношений $\rho \in \mathcal{R}_2$ применим (в некотором модифицированном виде) и для других классов отношений [25, 26]. Этим способом был установлен явный вид всех операторов в теореме 10. Наибольшие трудности вызвали операторы $\mathcal{S}^n \to \mathcal{A}$ и $\mathcal{T}^n \to \mathcal{T}$.

9. Порядковые отношения в произвольных критериальных пространствах

9.1. Критериальные пространства общего вида

Выше рассматривались порядковые отношения на $\mathbb{R}^n$. Но в прикладных задачах выбора обычно применяются критерии с ограниченным множеством значений — качественные, балльные, количественные с конечными шкалами. Отношения на $\mathbb{R}^n$ обладают рядом полезных свойств, облегчающих их исследование. Так, например, произведение порядковых отношений в пространстве $\mathbb{R}^n$ является порядковым, а в пространствах с конечными шкалами нет. Доказательства для пространства $\mathbb{R}^n$ используют его плотность и на общий случай пространств не переносятся, некоторые результаты приобретают другой вид. Данный раздел посвящен ПО в произвольных критериальных пространствах.

Будем рассматривать критериальные пространства $\mathbb{X} = X_1 \times \dots \times X_n$, являющиеся декартовыми произведениями некоторых подмножеств X_i множества $\mathbb{R}$ действительных чисел. Упорядоченное множество X_i будем называть *шкалой* критерия i, а его мощность $|X_i|$, обозначаемую дальше $\varkappa_i$, — *значностью* критерия i (шкалы i). Критерии могут быть конечнозначными и бесконечнозначными. Минимальную из значностей $\varkappa_i$ шкал, образующих пространство $\mathbb{X}$, обозначим через $\varkappa(\mathbb{X})$ и назовем *индексом пространства* $\mathbb{X}$. Порядковые отношения на $\mathbb{X}$ и связанные с ними понятия определяются как раньше, если всюду в определениях заменить $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{X}$.

Дальше будем считать, что $\varkappa(\mathbb{X}) \geqslant 2$. Тогда множество всех $\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{X}$ совпадает с $\{-1, 0, 1\}^n$, и отношение однозначно распространяется на любые $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Отношение на всем $\mathbb{R}^n$, определяемое 3^n значениями $\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, будем называть *пополнением* исходного отношения. Для пополнения будем использовать обозначение ρ, а для исходного отношения, которое можно рассматривать как сужение ρ на $\mathbb{X}$, — обозначение $\rho_{\mathbb{X}}$. Представляющей функцией отношения $\rho_{\mathbb{X}}$ будем считать представляющую функцию g_ρ его пополнения.

9.2. Вложение отношений в критериальные пространства

Рассмотрим задачу вложения отношений, заданных на произвольном конечном множестве A, в критериальные пространства. Это позволяет заменять модели свободного выбора моделями многокритериального выбора по порядковым отношениям. Поскольку трудоемкость многокритериального выбора существенно зависит от числа критериев, ставится задача вложения в пространства возможно меньшей размерности. Дадим соответствующие определения.

Пусть r — отношение на конечном множестве A. Будем говорить, что r *вложимо в критериальное пространство* $\mathbb{X}$, если можно так приписать вариантам $x \in A$ наборы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ и назначить такое порядковое отношение ρ на $\mathbb{X}$, что $xry \Leftrightarrow \boldsymbol{x}\rho\boldsymbol{y}$ для любых $x, y \in A$. В случае правильных порядковых отношений будем говорить о *правильном вложении*. Обозначим через $\mathbb{X}_A$ множество наборов $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$, сопоставленных при вложении вариантам $x \in A$. Отношения r будем предполагать иррефлексивными (для рефлексивных результаты аналогичны).

Выделим некоторые типы вложений. Критерий i назовем *строгим*, если для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{X}_A$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, имеет место $x_i \neq y_i$, а в противном случае — *нестрогим*. Если условие строгости выполнено при всех i, будем говорить о вложении в пространство строгих критериев. В случае, когда все критерии являются нестрогими и принимают не более k значений, будем говорить о вложении в пространство k-значных критериев. Следующий результат устанавливает связь между вложениями в критериальные пространства и декомпозициями отношений, рассмотренными в п. 5.1. Под Φ понимается теоретико-множественная операция.

Теорема 26 [7, 32, 33]. Отношение r вложимо в d-мерное пространство с (а) произвольными, (б) k-значными, (в) строгими критериями тогда и только тогда, когда оно представимо в виде

$$r = \Phi(r_1, \ldots, r_d, r_1^*, \ldots, r_d^*),$$

где отношения $r_1, \ldots, r_d$ принадлежат (а) классу $\mathcal{W}$, (б) классу $\mathcal{W}^{(k)}$, (в) классу $\mathcal{L}$.

Эти результаты переносятся на правильные вложения, если в качестве операции Φ взять монотонную.

Замечание. Поскольку для линейных порядков r_i при $x \neq y$ выполнено $xr_i^*y = xr_iy$, то в случае строгих критериев представление, указанное в теореме, сводится к более простому $r = \Phi(r_1, \ldots, r_d)$.

Всякое отношение r вложимо и правильно вложимо при всех рассматриваемых типах вложения в критериальные пространства подходящей размерности [7]. Обозначим через $d(r)$, $\hat{d}(r)$ и $d_k(r)$ минимальные размерности пространств с соответственно произвольными, строгими и k-значными критериями, в которые вложимо r, а через $d(n)$, $\hat{d}(n)$ и $d_k(n)$ — их максимальные значения по всем отношениям (иррефлексивным) на множестве A мощности n. Аналогичные величины $d^+(n)$, $\hat{d}^+(n)$ и $d_k^+(n)$ введем для правильных вложений. Из теоремы 12 в силу предшествующей теоремы получаем следующие результаты.

Теорема 27 [7, 32, 33]. Справедливы асимптотические оценки

$$\hat{d}(n) \sim 2\log_2 n,$$
$$2\log_3 n \lesssim d(n) \leqslant d_k(n) \leqslant d_2(n) \lesssim 2\log_2(n), \quad 5/3\ \log_2 n \lesssim d_2(n).$$

Величины $\hat{d}^+(n)$, $d^+(n)$ и $d_k^+(n)$ асимптотически совпадают с $\hat{d}(n)$, $d(n)$ и $d_k(n)$ соответственно.

9.3. Сведение к отношениям на $\mathbb{R}^n$

В данном пункте описан подход, развитый в [48, 49], который сводит исследование свойств порядковых отношений в пространствах с конечными шкалами к аналогичным задачам для $\mathbb{R}^n$ и позволяет воспользоваться многими результатами, полученными для $\mathbb{R}^n$. Он родствен некоторым подходам, применяемым в математической логике и теории моделей. Формулировка этого подхода в терминах теории моделей имеется в [50].

Будем рассматривать универсально аксиоматизируемые свойства отношений (см. п. 8.2). Такие свойства задаются аксиомами, использующими лишь кванторы общности. *Рангом аксиомы* называется число s участвующих в ней кванторов. *Ранг системы аксиом* считается равным максимальному из рангов входящих в нее аксиом, если система конечна, и полагается равным ω в случае бесконечной системы. *Рангом универсально аксиоматизируемого свойства* называется минимальный из рангов задающих его систем аксиом.

Пусть на множестве пар $(x, y) \in A^2$ задано отношение эквивалентности $\sim$. Эквивалентность $\sim$ называется *строгой*, если из $(x, y) \sim (x', y')$ и $x = y$ следует $x' = y'$. Дальше будем рассматривать только строгие эквивалентности. Множество X, $X \subseteq A$, называется *s-представительным* (для A относительно эквивалентности $\sim$), если для любых $x_1, \ldots, x_s \in A$ найдутся $x'_1, \ldots, x'_s \in X$ такие, что $(x'_i, x'_j) \sim (x_i, x_j)$, $1 \leqslant i, j \leqslant s$. Множество X, s-представительное при любом $s \geqslant 1$, называется *ω-представительным.*

Эквивалентность $\sim$ задает класс $\mathcal{K}_\sim$ отношений r на A, удовлетворяющих условию $(x,y) \sim (x',y') \Longrightarrow xry \Leftrightarrow x'ry'$. Предлагаемый подход основан на следующем утверждении, в котором для $X \subseteq A$ через r_X обозначено отношение $r \cap X^2$.

Теорема 28 [49]. Если Φ — универсально аксиоматизируемое свойство ранга не выше s, $s \in N \cup \{\omega\}$, множество X является s-представительным для A и r — отношение класса $\mathcal{K}_\sim$, то отношение r_X обладает свойством Φ тогда и только тогда, когда им обладает r.

Класс порядковых отношений может рассматриваться как $\mathcal{K}_\sim$, если положить $A = \mathbb{R}^n$ и в качестве отношения эквивалентности взять

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \sim (\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}) \Leftrightarrow \Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Delta(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}).$$

Обозначим через E_k^n декартову степень множества $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Допускается $k = \omega$, где $E_\omega = \{0, 1, 2, \ldots\} = N$. Нетрудно доказать, что при любом $s \in N \cup \{\omega\}$ множество E_s^n является s-представительным для $\mathbb{R}^n$ по введенному выше отношению эквивалентности. Если $\varkappa(\mathbb{X}) = s$, то можно считать, что $\mathbb{X} \supseteq E_s^n$. Это позволяет переформулировать теорему 28 для порядковых отношений на $\mathbb{X}$.

Теорема 29. Если ранг универсально аксиоматизируемого свойства Φ не превышает s, $s \in N \cup \{\omega\}$, а индекс $\varkappa(\mathbb{X})$ пространства $\mathbb{X}$ не ниже s, то порядковое отношение ρ на $\mathbb{X}$ обладает свойством Φ тогда и только тогда, когда им обладает его пополнение.

Подсчитав ранги введенных в п. 8.2 свойств отношений, получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Порядковое отношение ρ на $\mathbb{X}$ обладает одним из свойств рефлексивности, иррефлексивности, асимметрии, антисимметрии, полноты, связности тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает его пополнение. В случае $\varkappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$ аналогичное утверждение имеет место и для свойств транзитивности и негатранзитивности.

9.4. Сравнение свойств порядковых отношений на $\mathbb{R}^n$ и в дискретных пространствах

Описанный подход позволяет перенести большинство результатов, методов и алгоритмов, развитых для $\mathbb{R}^n$, на произвольные пространства $\mathbb{X}$ с $\varkappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$. Остановимся в большей мере на возникающих здесь отличиях. Данный пункт написан по материалам [48, 49].

Будем рассматривать те же операции над ПО, что и в п. 7.3 — теоретико-множественные, инвертирование осей, обращение отношений, переход к двойственным отношениям, произведение отношений. Преобразования представляющих функций $1^\circ - 4^\circ$ из п. 7.3, относящиеся к первым четырем операциям, остаются справедливыми для ПО на произвольном $\mathbb{X}$.

Если $\mathbb{X}$ отлично от $\mathbb{R}^n$, то произведение порядковых отношений не обязательно будет ПО. Для иллюстрации рассмотрим одномерное ПО $>$ («больше») на N. Его произведение само на себя не является порядковым, так как $(2,0) \in (> \cdot >)$, а $(1,0) \notin (> \cdot >)$. В дальнейшем роль произведения $[\rho_1\rho_2]$ будет играть его *порядковое замыкание* $[\rho_1\rho_2]$. Под порядковым замыканием $[\rho]$ отношения ρ (не обязательно порядкового) на $\mathbb{X}$ понимается наименьшее по включению ПО на $\mathbb{X}$, содержащее ρ.

Операция композиции $g \circ \hat{g}$ функций g и $\hat{g}$, позволяющая найти представляющую функцию для порядкового замыкания произведения отношений, определяется, как и в п. 7.3, с тем отличием, что при нахождении композиции $q_i \circ \hat{q}_i$ элементарных сомножителей учитывается значность $\varkappa_i$ критериев i. Если $\varkappa_i \geqslant 3$ (в частности, в случае бесконечной значности), композиция $q_i \circ \hat{q}_i$ находится, как в п. 7.3 (см. табл. 2), если $\varkappa_i = 2$, то в соответствии с табл. 4.

Таблица 4

	p_i	p'_i	$\bar{p}_i$	$\bar{p}'_i$	$p'_i\bar{p}_i$	1
p_i	0	p_i	p'_i	$p'_i\bar{p}_i$	p_i	p'_i
p'_i	p_i	p'_i	1	$\bar{p}_i$	p'_i	1
$\bar{p}_i$	p'_i	1	$\bar{p}_i$	$\bar{p}'_i$	$\bar{p}_i$	1
$\bar{p}'_i$	$p'_i\bar{p}_i$	$\bar{p}_i$	$\bar{p}'_i$	0	$\bar{p}'_i$	$\bar{p}_i$
$p'_i\bar{p}_i$	p_i	p'_i	$\bar{p}_i$	$\bar{p}'_i$	$p'_i\bar{p}_i$	1
1	p'_i	1	1	$\bar{p}_i$	1	1

Теорема 18 приобретает для общего случая критериальных пространств следующий вид.

Теорема 30. Для порядковых отношений на произвольном $\mathbb{X}$ представляющая функция порядкового замыкания $[\rho_1 \cdot \rho_2]$ произведения ПО находится как композиция $g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$ представляющих функций для ρ_1 и ρ_2.

Указанные факты позволяют распространить на произвольные критериальные пространства $\mathbb{X}$ установленные в теореме 19 для ПО на $\mathbb{R}^n$ соотношения между свойствами ПО и представляющими функциями. Это относится ко всем свойствам, исключая ацикличность, которая имеет бесконечный ранг и выпадает из общего рассмотрения. Ацикличные ПО на $\mathbb{R}^n$ и в дискретных пространствах ведут себя по-разному.

Результаты теоремы 20 о сложности распознавания свойств ПО на $\mathbb{R}^n$, относящиеся к свойствам рефлексивности, иррефлексивности, асимметрии, антисимметрии, полноты и связности переносятся на пространства $\mathbb{X}$ общего вида, а для свойств транзитивности и негатранзитивности — на пространства с $\varkappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$. Условие $\varkappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$ связано с тем, что ранг двух последних свойств равен 3. При $\varkappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$ на пространства $\mathbb{X}$ распространяются установленные в теореме 22 для пространства $\mathbb{R}^n$ результаты о явном виде ПО из всех основных классов, исключая результаты для класса $\mathcal{A}$ ацикличных отношений. При этом для классов $\mathcal{L}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{T}$, задаваемых свойствами ранга 3, достаточно применить теорему 29, а классы $\mathcal{S}$ и $\mathcal{I}$, в определении которых присутствуют свойства ранга 4, требуют специального рассмотрения. Из сказанного и теоремы 23 следует, что при $\varkappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$ сложность проверки по представляющей функции в форме ДНФ либо КНФ принадлежности ПО на множестве $\mathbb{X}$ каждому из введенных в п. 4.2 классов, исключая $\mathcal{A}$, полиномиальна для правильных ПО и NP-трудна для произвольных ПО.

Условие $\varkappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$, при котором установлены приведенные выше результаты о явном виде отношений, является существенным. В [49] показано, что в случае двузначных критериев каждый из рассматриваемых классов отношений шире, чем дает описание. Кроме того, в [49] установлено, что при использовании двузначных критериев классы $\mathcal{W}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{I}$ попарно различны, в то время как в случае $\varkappa(\mathbb{X}) \geqslant 3$ в соответствии с теоремой 23 они совпадают.

Как уже говорилось, свойство ацикличности, имеющее бесконечный ранг, стоит особняком. Ни при каком конечном s ацикличность ПО в пространстве s-значных критериев не гарантирует его ацикличности на $\mathbb{R}^n$. Следующая теорема указывает, в каких границах описанный подход применим к свойству ацикличности.

Теорема 31. Если $\mathbb{X}$ — пространство размерности n и индекса $\varkappa(\mathbb{X}) = s$, то при $n \leqslant s$ порядковое отношение на $\mathbb{X}$ ациклично тогда и только тогда, когда оно ациклично на $\mathbb{R}^n$. При $n > s$ существуют порядковые отношения, ацикличные на E_s^n и имеющие циклы в $\mathbb{R}^n$.

Приведем результат, показывающий, что свойства ацикличных отношений в пространствах с конечнозначными критериями существенно отличаются от свойств ацикличных отношений на $\mathbb{R}^n$. Согласно теореме 22, всякое ацикличное ПО на $\mathbb{R}^n$ может быть дополнено до линейного (и, следовательно, частичного) порядка.

Теорема 32. При любых s и n, $s \geqslant 2$, $n > s$ в E_s^n существует ацикличное отношение, не дополнимое до частичного порядка.

10. Порядковые модели

10.1. Формализация

Данный раздел написан по материалам [14, 40]. Будем рассматривать ФВ на $\mathbb{R}^n$. Отображение $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ назовем *порядковым отображением*, если для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ имеет место $\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Delta(\psi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{y}))$. Легко видеть, что отбражение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ порядково тогда и только тогда, когда при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant n$, производит строго монотонное преобразование i-й координаты точек из $\mathbb{R}^n$.

В терминах порядковых отображений можно дать другое определение порядкового отношения, эквивалентное введенному ранее. ПО ρ на $\mathbb{R}^n$ — это отношение, которое для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ и порядкового отображения ψ удовлетворяет соотношению $\psi(\boldsymbol{x})\rho\psi(\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x}\rho\boldsymbol{y}$. Этот подход может быть распространен на функции выбора. ФВ C на $\mathbb{R}^n$ называется *порядковой функцией* [3], если для любых $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и порядкового отображения ψ выполнено $C(\psi(X)) = \psi(C(X))$, где $\psi(Z)$ — образ множества Z. Модель выбора M назовем *порядковой моделью*, если C_M — порядковая ФВ.

Будем рассматривать контекстно-независимые порядковые ФВ и для их формализации будем применять способ, описанный в п. 6.1. Уточним этот способ применительно к порядковым ФВ.

Будем рассматривать интерпретации, в которых значениями предметных переменных являются точки $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$. Предикат $P(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ на $\mathbb{R}^n$ будем называть *порядковым предикатом*, если для любых $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ и порядкового отображения ψ выполнено $P(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) \Leftrightarrow P(\psi(\boldsymbol{x}_1), \ldots, \psi(\boldsymbol{x}_k))$. Формулу (узкого исчисления предикатов) назовем *порядковой формулой*, если в ней используются лишь порядковые предикаты. Порядковая ФВ C называется *формализуемой*, если существует такая порядковая формула $\mathcal{C}(\boldsymbol{x})$ (*формализация*), что для любых $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{x} \in X$ выполнено $\boldsymbol{x} \in C(X) \Leftrightarrow \mathcal{C}(\boldsymbol{x})|_X$, где $\mathcal{C}(\boldsymbol{x})|_X$ — значение формулы на множестве X (см. п. 6.1).

Если для обозначения значений формул вместо И («истина») и Л («ложь») использовать 1 и 0, то всякий порядковый предикат P может быть представлен в виде $P(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = g(\Delta(\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{j_1}), \ldots, \Delta(\boldsymbol{x}_{i_r}, \boldsymbol{x}_{j_r}))$, где $g \in P_{3,2}$ [40, 14]. Записав формулу $\mathcal{C}(\boldsymbol{x})$ в предваренной форме

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{x}) = Q_1\boldsymbol{y}_1 \ldots Q_s\boldsymbol{y}_s\mathcal{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_s)$$

и использовав указанное выше представление для порядкового предиката, реализуемого бескванторной формулой $\mathcal{F}$, получим

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{x}) = Q_1\boldsymbol{y}_1 \dots Q_s\boldsymbol{y}_s g(\Delta(\boldsymbol{z}_{i_1}, \boldsymbol{z}_{j_1}), \dots, \Delta(\boldsymbol{z}_{i_r}, \boldsymbol{z}_{j_r})),$$

где $g \in P_{3,2}$, $\boldsymbol{z}_{i_1}, \boldsymbol{z}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{z}_{i_r}, \boldsymbol{z}_{j_r} \in \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_s\}$. Это выражение будем называть *формализацией в стандартной форме.*

10.2. Построение формализаций и доказательство неформализуемости

В порядковых моделях в качестве элементарных актов выбора обычно используется выбор по порядковому отношению. На этой основе строятся более сложные модели.

В [40] проведено исследование на формализуемость встречающихся в литературе правил выбора по отношению (порядковому). Для каждого из них построена формализация либо доказана неформализуемость. В абсолютном большинстве своем правила оказались формализуемыми. В частности, формализуемы правила, введенные в п. 1.3. Первое из них, например, имеет формализацию $\mathcal{C}_\rho(\boldsymbol{x}) = \forall \boldsymbol{y} g^*_\rho(\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$, где g_ρ — представляющая функция, а $*$ означает двойственность. К неформализуемым относится турнирное правило Коупленда [8].

Для построения более сложных моделей выбора используются некоторые операции над моделями. Они могут быть описаны в терминах операций над соответствующими функциями выбора. Как и в п. 6.2, будем рассматривать операции композиции, суперпозиции, ветвления и ограниченной обратной связи. На свойство Q, используемое в двух последних операциях, наложим условие, чтобы оно было порядковым, т. е. представлялось формулой, содержащей лишь порядковые предикаты. Теорема 15 распространяется на порядковые модели: применение указанных операций к формализуемым порядковым моделям дает формализуемые порядковые модели. Их формализация строится, как в п. 6.2. Так, например, формализация выбора глубины два по ПО ρ_1 и ρ_2 имеет вид

$$\mathcal{C}_{\rho_1\rho_2}(\boldsymbol{x}) = \forall \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{z} (g^*_{\rho_1}(\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \wedge (g_{\rho_1}(\Delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) \vee g^*_{\rho_2}(\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))).$$

Возможность представления формализаций для порядковых моделей в стандартной форме облегчает доказательство неформализуемости и, следовательно, — контекстной зависимости порядковых ФВ. Так, в [14] методом из [40] доказана контекстная зависимость выбора для известного правила Борда выбора по сумме рангов [8], а в [40] — для правила Коупленда и ряда других правил выбора по ПО. Для ФВ общего вида (не порядковых) нет ограничений на вид формализаций, и доказать контекстную зависимость для каких-либо ФВ общего вида пока не удалось.

10.3. Упрощение формализаций

На порядковые ФВ переносятся результаты об упрощении формализаций для контекстно-независимых функций, приведенные в п. 6.3. В частности, модели последовательного выбора глубины k и параллельного выбора ширины k по порядковым отношениям допускают формализацию в стандартной форме, имеющую ранг не выше k. Но для порядковых моделей удается поставить и решить более широкий круг задач, чем для КН-моделей общего типа. Одной из них является задача построения для моделей параллельного выбора формализаций, имеющих наименьший ранг. Изложенные ниже результаты взяты из [40].

Формулу вида

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{x}) = \forall \boldsymbol{y}_1 \dots \forall \boldsymbol{y}_s g(\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1), \dots, \Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_s)), \quad g \in P_{3,2},$$

будем называть *однородной* $\forall$*-формулой*, а в случае монотонной функции g — *монотонной однородной* $\forall$*-формулой*. Порядковая ФВ представима моделью параллельного выбора тогда и только тогда, когда она допускает формализацию однородной $\forall$-формулой с функцией g, удовлетворяющей условию $g(0,\ldots,0)=1$. Аналогичный факт справедлив для моделей параллельного выбора, использующих правильные ПО, если добавить условие монотонности однородных $\forall$-формул. Как и раньше, формулу будем характеризовать ее рангом — числом кванторов. В связи с моделью параллельного выбора возникает задача минимизации однородных и монотонных однородных $\forall$-формул, состоящая в том, чтобы по однородной (монотонной однородной) $\forall$-формуле с $g(0,\ldots,0)=1$ построить формулу того же типа, имеющую наименьший ранг. Функция g предполагается заданной посредством КНФ, а в монотонном случае — посредством приведенной КНФ. Получены следующие результаты.

Теорема 33.

1. Задача минимизации однородных $\forall$-формул алгоритмически разрешима, но NP-трудна.

2. Задача минимизации монотонных однородных $\forall$-формул полиномиальна.

Отметим, что указанный в теореме полиномиальный алгоритм, помимо того, что обеспечивает формулы с наименьшим числом кванторов, дает представление участвующей в них функции из $P_{3,2}$ в виде КНФ наименьшей сложности, т. е. с наименьшим числом вхождений символов переменных.

11. Синтез и аппроксимация

Данный раздел написан по материалам [40]. Будем рассматривать задачи синтеза и аппроксимации в классе порядковых отношений. Дальше, говоря о синтезе и аппроксимациях, будем иметь в виду этот класс моделей. Задача синтеза состоит в том, чтобы по формализации $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ порядковой ФВ C построить реализующее ее ПО либо установить, что это невозможно. Аналогично ставятся задачи о верхней и нижней аппроксимациях в классе ПО. Следующий результат показывает, что при решении этих задач возникают принципиальные трудности.

Теорема 34. Задачи синтеза и построения верхней и нижней аппроксимаций в классе порядковых отношений являются алгоритмически неразрешимыми.

Трудности, связанные с неразрешимостью указанных проблем, частично удается преодолеть с помощью парно-выявленных отношений (это понятие введено в п. 2.2). Будем рассматривать порядковые ФВ, удовлетворяющие условию $C(\{\boldsymbol{x}\})=\{\boldsymbol{x}\}$ (выбор в одноэлементных предъявлениях непуст). Для них парно-выявленное отношение $\hat{\rho}$, которое определяется посредством соотношения $\boldsymbol{x}\hat{\rho}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{y}\notin C(\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\})$, будет порядковым. Ясно, что $C_{\hat{\rho}}(\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\})=C(\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\})$.

В [40] предложен полиномиальный (относительно размерности n пространства при фиксированном s) способ построения парно-выявленного отношения $\hat{\rho}$ по формализации $\mathcal{C}(\boldsymbol{x})$ ранга s в стандартной форме. Операциям над ФВ, рассмотренным в п. 6.2, соответствуют определенные преобразования парно-выявленных отношений. Приведем преобразования, соответствующие операциям композиции и суперпозиции (для других операций см. в [40]). Обозначим через $\hat{\rho},\hat{\rho}_1,\ldots,\hat{\rho}_k$ парно-выявленные отношения для функций $C,C_1,\ldots,C_k$.

Теорема 35.

1. Если ФВ C образована композицией $C=F(C_1,\ldots,C_k)$, то $\hat{\rho}=F^*(\hat{\rho}_1,\ldots,\hat{\rho}_k)$, где F^* — двойственная к F теоретико-множественная операция.

2. Если ФВ C образована суперпозицией $C = C_1 \circ C_2$, то $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \cup (\hat{\rho}_1 \cap \hat{\rho}_2)$.

Следствие 2.

1. Парно-выявленное отношение функции $C_{F,\rho_1,\ldots,\rho_k}$ параллельного выбора имеет вид $\hat{\rho} = F^*(\hat{\rho}_1, \ldots, \hat{\rho}_k)$.

2. Парно-выявленное отношение функции $C_{\rho_1,\ldots,\rho_k}$ последовательного выбора имеет вид $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \cup (\hat{\rho}_1 \cap \hat{\rho}_2) \cup \ldots \cup (\hat{\rho}_1 \cap \ldots \cap \hat{\rho}_k)$.

Возможность конструктивного нахождения парно-выявленных отношений для формализуемых ФВ облегчает решение ряда задач, связанных с построением моделей. Приведем некоторые относящиеся сюда утверждения.

1°. Если ФВ C представима отношением, то этим отношением является парно-выявленное отношение $\hat{\rho}$.

2°. Если для ФВ C выполнено условие $C \subseteq C_{\hat{\rho}}$ $(C \supseteq C_{\hat{\rho}})$, то парно-выявленное отношение $\hat{\rho}$ реализует верхнюю (нижнюю) аппроксимацию функции C.

3°. Если ФВ C удовлетворяет свойству наследования (согласия), то парно-выявленное отношение $\hat{\rho}$ реализует верхнюю (нижнюю) аппроксимацию функции C.

4°. Парно-выявленное отношение функции параллельного (последовательного) выбора реализует ее верхнюю (нижнюю) аппроксимацию.

Эти факты позволяют в ряде случаев решить задачи синтеза и аппроксимации, которые в общем случае нерешаемы (см. теорему 34).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Murakami Y.* Logic and cocial choice. London: Routledge & Kegan Paul Ltd.; New York: Dover Publication Inc., 1968.
2. *Шоломов Л. А.* Логические методы в задачах согласованного выбора / Препринт ВНИИ системных исследований. М., 1978.
3. *Березовский Б. А., Барышников Ю. М., Борзенко В. И., Кемпнер Л. М.* Многокритериальная оптимизация: математические аспекты. М.: Наука, 1989.
4. *Макаров И. М., Виноградская Т. М., Рубчинский А. М., Соколов В. Б.* Теория выбора и принятия решений. М.: Наука, 1982.
5. *Левченков В. С.* Алгебраический подход в теории группового выбора. М.: Наука, 1990.
6. *Aleskerov F. T., Vladimirov A. V.* Hierarchical voting // Information sciences. 1986. V. 39. P. 41–86.
7. *Шоломов Л. А.* Логические методы исследования дискретных моделей выбора. М.: Наука, 1989.
8. *Айзерман М. А., Вольский В. И., Литваков Б. М.* Элементы теории выбора. Псевдокритерии и псевдокритериальный выбор. М.: Нефтяник, 1994.
9. *Вольский В. И., Лезина З. М.* Голосование в малых группах: процедуры и методы сравнительного анализа. М.: Наука, 1991.
10. *Шоломов Л. А.* Применение логических методов в задачах последовательного выбора / Препринт. ВНИИ системных исследований. М., 1980.
11. *Шоломов Л. А.* Логические методы композиции функций выбора / Препринт ВНИИ системных исследований. М., 1981.
12. *Шоломов Л. А.* Оценка сложностных характеристик одного механизма выбора с участием нескольких лиц // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1985. № 2. С. 3—13.
13. *Шоломов Л. А., Юдин Д. Б.* Сложность многошаговых схем обобщенного математического программирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1988. № 1. С. 13–22.

14. *Sholomov L.* Context-independent choice: description and analysis by means of first-order logic // Logic, Game theory and Social choice. Proceedings of the Intern. Conference LGS'99. Tilburg University Press, 1999. P. 549–559.

15. *Литваков Б. М.* Аппроксимация функций выбора // Автоматика и телемеханика. 1984. № 9. С. 138–146.

16. *Шоломов Л. А.* О сложности задач минимизации и сжатия моделей последовательного выбора // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 1999. Т. 6. № 3. С. 87–109.

17. *Stockmeyer L. J.* The set-basis problem is NP-complete // Report N RC-5431. New York: IBM Research Center, Yorctown Heights, 1975.

18. *Шоломов Л. А.* О сложности реализации функций выбора системой отношений частичного порядка // Проблемы кибернетики. Вып. 41. М.: Наука, 1984. С. 111–116.

19. *Шоломов Л. А.* Функциональные возможности и сложность механизмов выбора, основанных на исключении худших вариантов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1987. № 1. С. 10–17.

20. *Юдин Д. Б., Шоломов Л. А.* Многошаговые схемы обобщенного математического программирования и функции выбора // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 5. С. 1066–1069.

21. *Arrow K. J.* Difficulty in the concept of social welfare //J. Political Economy. 1950. V. 58. P. 326–346.

22. *Arrow K. J.* Social Choice and Individual Values, 2nd ed. New Haven—London: Yale University Press, 1963.

23. *Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т.* Выбор вариантов: основы теории. М.: Наука, 1990.

24. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.

25. *Шоломов Л. А.* Операторы над отношениями, сохраняющие транзитивность // Дискретная математика. 1998. Т. 10. Вып. 1. С. 28–45.

26. *Шоломов Л.А.* Исследование отношений в критериальных пространствах и синтез операторов группового выбора // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. М.: Физматлит, 1995. С. 109–143.

27. *Шоломов Л. А.* Агрегирование линейных порядков в задачах группового выбора // Автоматика и телемеханика. 1998. № 2. С. 113–122.

28. *Sholomov Lev A.* Explicit form of neutral social decision rules for basic rationality conditions // Mathematical Social Sciences. 2000. V. 39. No. 1. P. 81–107.

29. *Моркялюнас А.* Групповой выбор при независимости и слабой симметрии альтернатив // Математические методы в социальных науках. Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН ЛитССР, 1985. Вып. 18. С. 57–60.

30. *Данилов В. И.* Модели группового выбора // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 1. С. 143–164.

31. *Владимиров А. В.* Исследование процедур построения коллективных решений: Автореф. дис. … канд. техн. наук / Ин-т проблем управления. М., 1987.

32. *Шоломов Л. А.* О сложности реализации бинарных отношений путем теоретико-множественных операций над отношениями линейного порядка // Проблемы кибернетики. Вып. 41. М.: Наука, 1984. С. 101–109.

33. *Шоломов Л. А.* О представлении бинарного отношения набором критериев // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. № 1. С. 6–14.

34. *Hiraguchi T.* On the dimension of partially ordered sets // Sci Rep. Kanazawa University. 1951. V. 1. No. 2. P. 77–94.

35. *Ope O.* Теория графов. М.: Наука, 1980.

36. *Trotter W. T.* Embedding finite posets in cubes // Discrete Math. 1975. V. 12. No. 2. P. 165–172.
37. *Erdös P., Moser L.* On the representation of directed graphs as unions orderings // Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl. 1964. V. 9. No. 1–2. P. 125–132.
38. *Шоломов Л. А.* Декомпозиция отношений в задачах выбора: вполне разделимые отношения и независимость от пути // Автоматика и телемеханика. 2001. № 11. С. 154–164.
39. *Шоломов Л. А.* Анализ рациональности модели последовательного выбора // Автоматика и телемеханика. 2000. № 5. С. 124–132.
40. *Шоломов Л. А.* Представление и исследование порядковых моделей выбора средствами логики первого порядка // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. М.: Наука, Физматлит, 1998. С. 169–202.
41. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
42. *Булос Дж., Джеффри Р.* Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
43. *Шоломов Л. А.* Сложность распознавания свойств порядковых отношений в n-мерных пространствах // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2002. Т. 9. № 4. С. 82–105.
44. *Подиновский В. В.* Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т. 15. № 2. С. 130–141.
45. *Подиновский В. В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности критериями // Автоматика и телемеханика. 1976. № 11. С. 118–127.
46. *Шоломов Л. А.* Синтез транзитивных порядковых отношений, согласованных с информацией о силе критериев // Сибирский журнал исследования операций. 1994. Т. 1. № 4. С. 64–92.
47. *Шоломов Л. А.* Метод интерпретаций в задаче синтеза операторов группового выбора // Алгебра и теория моделей 6. Новосибирск: НГТУ, 2007. С. 96–110.
48. *Шоломов Л. А.* Логические методы исследования отношений в критериальных пространствах с порядковыми шкалами произвольного вида // Автоматика и телемеханика. 2004. № 5. С. 120–130.
49. *Шоломов Л. А.* Распознавание свойств порядковых отношений в дискретных пространствах // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2004. Т. 11. № 3. С. 88–110.
50. *Шоломов Л. А.* Теоретико-модельный подход к описанию порядковых отношений в конечнозначных пространствах // Синтаксис и семантика логических систем: Материалы Российской школы-семинара, посвященной Ю. Е. Шишмареву. Владивосток: Дальнаука, 2008. С. 28–29.