Для $B^*\left(\frac{\lambda(1-z)}{z}\right)$ точка $z=0$ является особой. Разложим эту функцию в ряд Тейлора в нуле до степени ε:

$$\frac{1}{\left|B^*\left(\frac{\lambda(1-z)}{z}\right)\right|}=\frac{1}{\left|B^*(0)+\frac{\lambda(1-z)}{z}B^{*'}(0)+o(\varepsilon)\right|}\geq$$

$$\geq\frac{1}{\left|B^*(0)\right|+\frac{\lambda(1-|z|)}{|z|}\left|B^{*'}(0)\right|+|o(\varepsilon)|}=$$

$$=\frac{1}{\left|B^*(0)\right|+\frac{\lambda\varepsilon}{1-\varepsilon}\left|B^{*'}(0)\right|+|o(\varepsilon)|}.$$

Отбросив бесконечно малое слагаемое, получаем неравенство

$$\frac{1}{\left|B^*(0)\right|+\frac{\lambda\varepsilon}{1-\varepsilon}\left|B^{*'}(0)\right|}>\sum_{j=0}^{m}q(j)(1-\varepsilon)^j.$$

Разложим функцию $(1-\varepsilon)^j$ в ряд Тейлора до степени ε, умножим правое выражение на знаменатель левого и, оставляя только члены порядка ε, получим

$$1>\left|B^*(0)\right|+\frac{\lambda\varepsilon}{1-\varepsilon}\left|B^{*'}(0)\right|-\left|B^*(0)\right|\varepsilon\sum_{j=0}^{m}jq(j).$$

После несложных преобразований с учетом того, что $B^*(0)=1$, получаем

$$\lambda\left|B^{*'}(0)\right|<\sum_{j=0}^{m}jq(j),\qquad(21)$$

где $$B^{*'}(\alpha)=\int_0^\infty(-x)e^{-\alpha x}dB(x).$$

Неравенство (21) является условием существования стационарного режима в рассматриваемой СМО в случае рекуррентного времени обслуживания. Таким образом, если выполняется неравенство (21), то выражение (18) имеет в области $|x|\leq 1$ ровно m корней. В выражении (13) при обращении в ноль знаменателя числитель также должен обращаться в ноль, т.е. в области $|x|\leq 1$ корни знаменателя полностью совпадают с корнями числителя. Рассмотрим числитель выражения (12):

$$B^*(\lambda(1-x))(C(x,\gamma)-\lambda\pi(m-1))=0$$

или

$$\sum_{j=1}^{m}q(j)x^{-j}\sum_{k=0}^{j-1}\gamma_k x^k-\lambda\pi(m-1)=0.\qquad(22)$$

Подставим в выражение (22) m корней знаменателя (18). Добавим равенство (18). В результате получается система $m+1$ уравнения для нахождения всех неизвестных констант выражения (13):

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}q(j)\sum_{k=0}^{j-1}\gamma_k x_1^{k-j}=\lambda\pi(m-1),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_{j=1}^{m}q(j)\sum_{k=0}^{j-1}\gamma_k x_m^{k-j}=\lambda\pi(m-1),\\ \sum_{j=1}^{m}q(j)\sum_{k=0}^{j-1}(k-j)\gamma_k=\frac{\lambda^2 b-\lambda\overline{Q}}{\overline{Q}}.\end{cases}\qquad(23)$$

Здесь $x_1,x_2,\dots,x_m$ – корни уравнения (18) из области $|x|\leq 1$; $q(j)$ – известные константы; $\overline{Q}=\sum_{j=0}^{m}jq(j)$, λ и b – задаваемые параметры системы, а γ_0, γ_1, ..., γ_{m-1}, $\pi(m-1)$ – неизвестные константы в выражении 13), определяемые системой (23).

Заключение

Выражение (13) для функции $\Gamma(x)$ нам полностью известно, известна и производящая функция для финальных вероятностей $\Phi(x)$, с помощью котрой можно искать любые характеристики функционирования рассматриваемого элемента сети связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А.А., Туренова Е.Л.* Исследование протокола канального уровня сети передачи данных // Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика. Томск: Изд-во Том. Ун-та, 1999. С. 109–114.
2. *Бертсекас Д., Галлагер Р.* Сети передачи данных. М.: Мир, 1989. 540 с.
3. *Аничкин С.А. и др.* Протоколы информационно-вычислительных сетей: Справочник. М.: Радио и связь, 1990. 502 с.
4. *Клейнрок Л.* Коммуникационные сети. М.: Наука, 1970. 250 с.
5. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. М.: Высшая школа, 1981. 687 с.
6. *Степанов С.Н.* Численные методы расчета систем с повторными вызовами. М.: Наука, 1983. 230 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 25 февраля 2000 г.

УДК 621.394/395.74 - 503.5

А.А. Назаров, С.Л. Шохор

СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ В СЕТИ, УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИЧЕСКИМ ПРОТОКОЛОМ ДОСТУПА С ОПОВЕЩЕНИЕМ О КОНФЛИКТЕ

Описаны исследования математических моделей спутниковых сетей связи с динамическим протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте. Рассмотрены марковская и немарковская модели. Найдены условия, при которых в системах существует стационарный режим.

Эта работа продолжает исследования, посвященные сетям связи с протоколами случайного множественного доступа [1]. Известно, что такие сети часто не отличаются стабильным функционированием [2]. При небольшом количестве абонентских станций (АС) возможно возникновение явления бистабильности [3], а при большом числе узлов – отсутвие стационарного режима [4]. В данной работе находятся условия, при которых в сети связи с оповещением о конфликте и динамическом протоколе случайного множественного доступа [5] существует стационарный режим.

Для исследования построим математическую модель в виде однолинейной системы массового обслуживания, на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок, с функцией распределения времени обслуживания $B(t)$, источником повторных вызовов (ИПВ), из которого заявки обращаются к прибору после случайной задержки, распределенной экспоненциально с параметром σ / i, где i – число заявок в ИПВ. При возникновении конфликта в системе реализуется интервал оповещения о конфликте с функцией распределения $A(t)$. Заявки, попавшие в конфликт, а также пришедшие на интервале оповещения, переходят в ИПВ.

Условие существования стационарного режима. Марковская модель

Пусть время обслуживания и оповещения о конфликте распределено экспоненциально с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Рассмотрим случайный двумерный марковский процесс $\{i(t), k(t)\}$, где $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $k(t)$ – случайный процесс, принимающий 3 значения: $k(t)=0$ – прибор свободен, $k(t)=1$ – занят обслуживанием заявки, $k(t)=2$ – идет интервал оповещения о конфликте.

Обозначим вероятности переходов

$$P_{k1,i1,k2,i2}(\Delta t) = \\ = P\{i(t+\Delta t)=i_2, k(t+\Delta t)=k_2 / i(t)=i_1, k(t)=k_1\}.$$

Для исследования условий существования стационарного режима воспользуемся следствием 1 из предельной теоремы для цепи Маркова [6, §45], которая для рассмотренной модели выглядит следующим образом.

Для того чтобы неприводимая непериодическая цепь Маркова имела стационарное распределение $\{\pi_k(i)\}$ такое, что $\pi_k(i)>0, k=\overline{0,3}, i \ge 0$, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} \pi_0(i) = \sum_{k=0}^{2}\sum_{j\ge 0} \pi_k(j)\lambda_{k,j,o,i}, \\ \pi_1(i) = \sum_{k=0}^{2}\sum_{j\ge 0} \pi_k(j)\lambda_{k,j,1,i}, \\ \pi_2(i) = \sum_{k=0}^{2}\sum_{j\ge 0} \pi_k(j)\lambda_{k,j,2,i} \end{cases} \quad (1)$$

имела ограниченное ненулевое неотрицательное решение. Здесь

$$\lambda_{k1,i1,k2,i2} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{k1,i1,k2,i2}(\Delta t)}{\Delta t}, k_1 \ne k_2, i_1 \ne i_2,$$

$$\lambda_{k1,i1,k1,i1} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-P_{k1,i1,k1,i1}(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Запишем интенсивности переходов:

$$\lambda_{0,i,1,i}=\lambda,\ \lambda_{0,i,1,i-1}=\sigma, \lambda_{0,i,0,i}=\lambda+\sigma,$$

$$\lambda_{1,i,0,i}=\mu_1, \lambda_{1,i,2,i-1}=\sigma, \lambda_{1,i,2,i-2}=\lambda,$$

$$\lambda_{1,i,1,i}=\lambda+\sigma+\mu_1, \lambda_{2,i,0,i}=\mu_2 Б\, \lambda_{2,i,2,i+1}=\lambda,$$

$$\lambda_{2,i,2,i}=\lambda+\mu_2.$$

Все остальные интенсивности переходов равны 0.

Обозначим $\frac{\lambda}{\mu_1}=\rho, \frac{\sigma}{\mu_1}=\gamma, \frac{\mu_2}{\mu_1}=\frac{1}{a}$. Тогда можем записать требуемую систему (1):

$$\pi_0(i)=\pi_1(i)\frac{1}{1+\rho+\gamma}+\pi_2(i)\frac{1}{1+a\rho},$$

$$\pi_1(i)=\pi_0(i)\frac{\rho}{\rho+\gamma}+\pi_0(i+1)\frac{\gamma}{\rho+\gamma},$$

$$\pi_2(i)=\pi_2(i-1)\frac{a\rho}{1+\alpha\rho}+\pi_1(i-2)\frac{\rho}{1+\rho+\gamma}+$$

$$+\pi_1(i-1)\frac{\gamma}{1+\rho+\gamma}. \quad (2)$$

Будем искать решение системы (2) в виде

$$\pi_k(i)=C_k z^i. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), сокращая правые и левые части полученной системы на z^i, получим систему трех уравнений относительно неизвестных C_k. Эта система имеет решение, если ранг расширенной матрицы равен рангу исходной. Запишем матрицу системы и найдем определитель:

$$\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{1+\rho+\gamma} & \frac{1}{1+a\rho} \\ \frac{\rho+\gamma z}{\rho+\gamma} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\rho+\gamma z}{1+\rho+\gamma} & \frac{a\rho}{1+a\rho}z-z^2 \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{a\rho}{1+a\rho}z-z^2+\frac{1}{a\rho}\frac{(\rho+\gamma z)^2}{(\rho+\gamma)(1+\rho+\gamma)}+$$

$$+\frac{\rho+\gamma z}{(\rho+\gamma)(1+\rho+\gamma)}\left[z^2-\frac{a\rho}{1+a\rho}z\right]=P(z).$$

Уравнение $P(z)=0$ имеет три корня. Для выполнения условия следствия необходимо, чтобы существовал корень $z: |z|<1$. Исследуем поведение $P(z)$:

1) $\forall \rho, a, \gamma: P(0)=\frac{\rho}{(1+a\rho)(\rho+\gamma)(1+\rho+\gamma)}>0,$

2) $P(1)=0.$

Таким образом, для того чтобы в системе существовал стационарный режим, необходимо, чтобы выполнялось условие $P'(z)\big|_{z=1}>0$:

$$P'(z)\big|_{z=1}=\frac{a\rho}{1+a\rho}-2+\frac{2\gamma}{(1+a\rho)(1+\rho+\gamma)}+$$

$$+\frac{\gamma}{(\rho+\gamma)(1+\rho+\gamma)}\frac{1}{1+a\rho}+$$

$$+\frac{1}{1+\rho+\gamma}\left[2-\frac{a\rho}{1+a\rho}\right]>0. \quad (4)$$

Обозначая $\rho+\gamma=G$, из (4) будем иметь условие для существования стационарного режима:

$$\rho < G/(aG^2+2G+1).$$

Условие существования стационарного режима. Немарковская модель

Пусть функции $B(t)$ и $A(t)$ неэкспоненциальны. В этом случае для нахождения условий существования стационарного режима воспользуемся следствием 2 предельной теоремы для цепи Маркова [6, §45]. Формулировка этого следствия для немарковской модели сети связи будет выглядеть следующим образом.

Чтобы неприводимая непериодическая цепь Маркова имела стационарное распределение, достаточно существования $\varepsilon > 0$, натурального числа i_0 и набора неотрицательных чисел $x_k(i), k = \overline{0,2}, \quad i \geq 0$, таких, что выполняются условия:

$$1) \sum_{j\geq 0} P_{i1,k1,i2,k2}\, x_{k2}(i_2) \leq x_{k1}(i_1), i_1 > i_0,$$

$$2) \sum_{j\geq 0} P_{i1,k1,i2,k2}\, x_{k2}(i_2) < +\infty, i_1 < i_0. \tag{5}$$

Для применения этого следствия построим вложенную цепь Маркова по моментам, непосредственно следующим за моментом t_n, т.е. за моментом изменения состояния $k(t)$. Запишем вероятности переходов из состояния в состояние за один шаг:

$$P_{i1,k1,i2,k2} = P\{i(t(n) = i_2, k(t_n) = = k_2 / i(t_{n-1}) = i_1,\ k(t_{n-1}) = k_1\},$$

$$P_{i,0,0,0} = \beta_{00} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dB(x), P_{i,0,i,1} = \beta_{11} = 1 - \beta_{00}. \tag{6}$$

Все остальные вероятности переходов равны нулю.

Запишем первую систему неравенств из (5) с учетом (6): $x_0(i) - \varepsilon \geq \delta x_1(i) + (1-\delta)x_1(i-1)$,

$$x_1(i) - \varepsilon \geq \beta_0 x_0(i) + \beta_2 x_2(i+1) + \beta_1 x_2(i+2),$$

$$x_2(i) - \varepsilon \geq \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x_0(i+j). \tag{7}$$

Будем искать решение системы в виде:

$$x_k(i) = B_k + Ai, \tag{8}$$

где положительные B_k и A не зависят от i.

Заметим, что $$\sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j = \lambda a_1, \tag{9}$$

где a_1 – средняя длительность интервала оповещения о конфликте.

Перепишем систему (7) с учетом (8) и (9):

$$B_0 - B_1 - \varepsilon \geq -(1-\delta)A,$$
$$B_1 - \beta_0 B_0 - (1-\beta_0)B_2 - \varepsilon \geq (\beta_2 + 2\beta_1)A,$$
$$B_2 - B_0 - \varepsilon \geq \lambda a_1 A. \tag{10}$$

Умножим первое и второе неравенства системы (10) на $1/(2+\beta_1+\beta_2)$, а третье – на $(\beta_1+\beta_2)/ /(2+\beta_1+\beta_2)$ и просуммируем. Слагаемые с B_k сокращаются, и мы получаем неравенство

$$A\left\{\frac{-(1-\delta)+\beta_2+2\beta_1+\lambda\, a l(\beta_1+\beta_2)}{2+\beta_1+\beta_2}\right\} \leq -\varepsilon. \tag{11}$$

Если $$\frac{-(1-\delta)+\beta_2+2\beta_1+\lambda\, a l(\beta_1+\beta_2)}{2+\beta_1+\beta_2} < 0, \tag{12}$$

то существует такое положительное A, что неравенство (11) выполняется. Подставим в (12) выражения для δ, β_1, β_2 из (6), обозначим $\rho = \lambda b, b$ – среднее время обслуживания, $a_1 = bT_1, \gamma = \sigma b$, $\rho + +\gamma = G$ и получим условие:

$$\rho < \frac{\beta_0 G}{1+(1-\beta_0)(1+T_1 G)}, \tag{13}$$

где ρ имеет смысл загрузки системы. Если выполняется условие (13), то система неравенств (10) линейно зависима, поэтому имеет решение с точностью до аддитивной постоянной, значение которой выберем так, чтобы $B_k > 0$. Тогда $x_k(i) = B_k + Ai > 0$ и для них выполняется система неравенств (7). Следовательно, при выполнении условия (13) в системе существует стационарный режим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Флинт Д.* Локальные сети ЭВМ. М.: Финансы и статистика, 1986.
2. *Бертсекас Д., Галагер Р.* Сети передачи данных. М.: Мир, 1989.
3. *Назаров А.А., Юревич Н.М.* Исследование явления бистабильности в сети с протоколом АЛОХА для конечного числа станций //Автоматика и телемеханика. 1996. № 9. С. 91–100.
4. *Фалин Г.И.* О неустойчивости сети АЛОХА //Проблемы передачи информации. 1990. № 1. С. 79–82.
5. *Назаров А.А., Шохор С.Л.* Сравнение асимптотической и допредельной моделей сети связи с динамическим протоколом случайного множественного доступа //Математическое моделирование и теория вероятностей. Томск: Изд-во «Пеленг». 1998. С. 233–242.
6. *Климов* Стохастические системы массового обслуживания.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 26 мая 2000 г.

УДК 519.872: 681.03

Ю.Д. Одышев

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ДОСТАВКИ СООБЩЕНИЯ В СЕТИ СВЯЗИ С ПРОТОКОЛОМ «СИНХРОННАЯ АДАПТИВНАЯ АЛОХА» ДЛЯ СЛУЧАЯ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА СТАНЦИЙ

Рассмотрен класс адаптивных протоколов случайного множественного доступа, стабилизирующих неустойчивые сети связи, управляемые протоколом Алоха, в которых адаптация реализуется автоматом с целесообразным поведением (адаптером). Найдено асимптотическое распределение вероятностей времени доставки сообщения.

Протокол случайного множественного доступа «синхронная Алоха» является одной из модификаций известного протокола «Алоха», предназначенного для передачи сообщений через спутниковую сеть связи [1]. Он, как и многие протоколы данного класса, не отличается стабильным функционированием [2]. В [3] показано отсутствие стационарно-