3. *Лукашин Ю.П.* Оптимизация структуры портфеля ценных бумаг // Экономика и математические методы. 1995. Т. 31. Вып. 1. С. 138–150.
4. *Гамровски Б., Рачев С.* Финансовые модели, использующие устойчивые законы // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1995. Т. 2. Вып. 4. С. 556–604.
5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложений. Т.2. М.: Мир, 1984.
6. *Martin R. Young.* A Minimax portfolio selection rule with linear programming solution // Management science. 1998. Vol. 44. № 5. P. 673–683.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 1 февраля 2000 г.

УДК 519.95

В.В. Домбровский, Е.В. Чаусова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРИ СЛУЧАЙНОМ СЕЗОННОМ СПРОСЕ И НЕНАДЕЖНЫХ ПОСТАВЩИКАХ

На примере торговой деятельности посреднической фирмы строится модель управления запасами и осуществляется поиск оптимальной стратегии поведения, гарантирующей фирме получение наибольшей прибыли при заданном уровне обслуживания, учитывая все особенности ее потребителей, поставщиков и рынка, на котором она работает. Рассматриваемая система управления запасами является стохастической системой с периодическим контролем уровня запасов, случайным нестационарным спросом и поставками, распределение которых зависит от величины поданного заказа в соответствующий источник пополнения запаса. В работе представлены результаты численного исследования предложенной авторами модели. Показано, что найденная на базе построенной модели оптимальная стратегия управления запасами является более эффективной по сравнению с существующей на фирме.

Введение

Проблема управления запасами является одной из наиболее важных в организационном управлении. Но, как правило, не существует типовых решений – условия на каждом предприятии или фирме уникальны и включают множество ограничений и различных особенностей. С этим связаны и проблемы, возникающие при разработке математической модели и определении оптимальной стратегии управления запасами. В данной работе на примере фирмы, которая занимается завозами каменного угля в районы Томской области, строится модель управления запасами угля и осуществляется поиск оптимальной стратегии поведения, гарантирующей фирме получение наибольшей прибыли, учитывая все особенности ее потребителей, поставщиков и рынка, на котором она работает.

В разд. 1 исследуется структура формирования запасов рассматриваемой фирмы, что позволяет установить характер данной системы управления запасами.

В разд. 2 приводится общая схема построения оптимизационной модели для нахождения оптимальной стратегии управления запасами с точки зрения получения минимума общих ожидаемых затрат за весь период планирования запасов и достижения желаемого уровня обслуживания потребителей. При этом учитывается существующий ряд ограничений на объемы оформляемых заказов, которые связаны с возможностями и надежностью поставщиков, спецификой транспортировки груза, пропускной способностью речного порта и объемом площадки, арендуемой у речного порта, для хранения угля.

В разд. 3 проводится анализ решения, полученного посредством модели, описанной в разд. 2. Исследуя построенные оптимальные стратегии управления запасами для различных уровней запаса на начало периода планирования, удается выявить ряд закономерностей относительно полученного в результате текущего уровня запасов на складе и сопряженного с ним уровня обслуживания потребителей.

1. Структура формирования запасов на фирме

Фирма должна разработать календарную программу формирования запасов угля на предстоящий период планирования. В качестве критерия оптимальности управления, т.е. выбора размера заказа, используются полные ожидаемые издержки в течение всего периода планирования. Перечислим особенности структуры управления запасами на фирме.

1. Фирма осуществляет периодический контроль за уровнем запасов и ежемесячно пополняет свои запасы, оформляя заявку на поставку угля, размер которой зависит от уровня запасов на начало текущего месяца, предполагаемой величины суммарного спроса до конца периода планирования и ожидаемой величины поставки.

2. Величина реального спроса становится известной только после оформления заказа на поставку угля. Этот спрос по возможности удовлетворяется за счет созданных запасов, при дефиците неудовлетворенный спрос откладывается и удовлетворяется за счет последующих поставок.

3. Фирма имеет несколько постоянных источников пополнения запасов. При планировании заказов по предприятиям-поставщикам необходимо учитывать реальные возможности и надежность каждого поставщика. Руководствуясь накопленным опытом, желательно делать заказ больше, чем предположительно требуется угля на самом деле, так как велика вероятность того, что кто-нибудь из поставщиков сорвет сделку. К тому же всегда может появиться «неожиданный клиент», который не сделал запасов угля на зиму.

4. Поставки по каждому заказу, независимо от предприятия-поставщика, осуществляются в течение месяца по предварительной договоренности о сроках поставки с каждым поставщиком.

5. Стоимость одной тонны угля не зависит от предприятия-поставщика и включает в себя транспортные расходы, связанные с перевозкой груза по железной дороге. Стоимость одного вагона угля рассчитывается из предположения его полной загрузки, т.е. фирме невыгодно оформлять заказ на неполный вагон, так как это автоматически увеличивает стоимость единицы угля.

6. Делая заказ на поставку угля, фирма должна учитывать пропускную способность железной доро-

ги, объем площадки в речном порту, которая арендуется фирмой для хранения угля, и суточную способность речного порта к принятию груза, так как в случае несвоевременной разгрузки вагонов фирма платит железной дороге довольно большой штраф за простой вагонов.

Цель фирмы – разработать стратегию управления запасами, при которой минимизируется общая сумма ожидаемых затрат, связанных с поступлением угля в речной порт, омертвлением капитала в запасах и штрафом за отложенный спрос, а спрос удовлетворяется в соответствии с принятым уровнем обслуживания потребителей.

2. Построение математической модели оптимального управления запасами

2.1. Построение целевой функции

Для преобразования качественного описания модели в математическую модель введем обозначения: i_t – уровень запаса на начало отрезка t, который может принимать отрицательные значения при наличии отложенного спроса; y_t – нестационарная неотрицательная дискретная случайная величина, характеризующая спрос на уголь на отрезке $t=(t-1,\ t)$, где $t=\overline{1,T}$; $\hat{y}_t$ – прогнозные значения спроса на уголь на отрезке t; $\hat{X}_t = \left[\hat{X}_t(k)\right]_{k=1}^{n}$ – вектор заказов, поданных в период t, где $\hat{X}_t(k)$ – заказ k-му поставщику в период t.

Так как объем поставки случаен и зависит от размера поданного заказа конкретному поставщику, введем вектор неотрицательных дискретных случайных величин $X_t \ge 0 : X_t = \left[X_t(k)\right]_{k-1}^{n}$ – вектор поставок, где случайная величина $X_t(k)$ характеризует объем поставки в период t k-м поставщиком и описывается условным распределением $p(x(k) \mid \hat{X}_t(k))$.

Тогда состояние запаса угля на складе можно описать стохастическим разностным уравнением:

$$i_{t+1} = i_t + \sum_{k=0}^{n} X_t(k) - y_t, \quad t=\overline{1,T-1}.$$

В [1] предполагается, что случайные величины y_t независимы и стационарны. Поскольку в рассматриваемом случае спрос является нестационарным, с ярко выраженными сезонными колебаниями и, вообще говоря, зависимым, будем строить стратегию управления на основе прогнозных значений спроса $\hat{y}_t$.

Известно, что любая поставка, независимо от предприятия-поставщика, имеет двухуровневую структуру и осуществляется по принципу: «все (с вероятностью р) или ничего (с вероятностью 1–p)», тогда структура условного распределения случайной величины $X_t(k)$ для $\forall k=\overline{1,n}$ имеет следующий вид:

$$\forall t=\overline{1,T}\ \ \forall k=\overline{1,n}\quad p(x(k) \mid \hat{X}_t(k)) =$$
$$= P\{X_t(k) = x(k) \mid \hat{X}_t(k)\} = \begin{cases} p(k), & x(k) = \hat{X}_t(k), \\ 1-p(k), & x(k) = 0 \end{cases},$$

где вероятность $p(k)$ характеризует надежность k-го поставщика.

Пусть случайные величины $X_t(1), X_t(2), \ldots, X_t(n)$ независимы $\forall t=\overline{1,T}$, тогда совместное распределение этих величин при векторе заказов $\hat{X}_t$ имеет вид: $p(x \mid \hat{X}_t) = p(x(1), x(2), \ldots, x(n) \mid \hat{X}_t) = \prod_{k=1}^{n} p(x(k) \mid \hat{X}_t(k))$.

Замечание: здесь случайные величины обозначены прописными буквами, а принимаемые ими значения – строчными. Такие обозначения будут использоваться на протяжении всей работы.

В качестве целевой функции возьмем сумму ожидаемых на каждом отрезке планирования затрат всех видов. Пусть b – издержки, связанные с выполнением заказа; h – показатель, связанный с замораживанием денежных средств, вложенных в одну тонну угля; c – штраф за нехватку единицы продукта в течение одного промежутка времени между двумя последовательными шагами, (b, h, c – постоянны в течение всего периода планирования).

Пусть все издержки определяются состоянием системы в конце очередного временного промежутка. Тогда ожидаемые затраты, связанные с поступлением угля на склад, хранением запасов и штрафными потерями в случае отложенного спроса, на отрезке t при начальном уровне запасов i_t и векторе заказов $\hat{X}_t$ будут иметь вид:

$$L_t(i_t \mid \hat{X}_t) = \sum_{x_t \in \chi_t(\hat{x}_t)} p(x_t \mid \hat{X}_t) \left\{ b\sum_{k-1}^{n} x_t(k) + h\left(i_t + \sum_{k=1}^{n} x_t(k) - \hat{y}_t\right)^{+} + c\left(\hat{y}_t - i_t - \sum_{k=1}^{n} x_t(k)\right)^{+} \right\},$$

где $\chi_t(\hat{x}_t)$ – пространство возможных реализаций случайного вектора X_t при векторе заказов $\hat{X}_t$, $x^{+} = \max(0, x)$. Пусть

$$\ell_t(i_t,\ x_t) = b\sum_{k=1}^{n} x_t(k) + h\left(i_t + \sum_{k=1}^{n} x_t(k) - \hat{y}_t\right)^{+} + c\left(\hat{y}_t - i_t - \sum_{k=1}^{n} x_t(k)\right)^{+},$$

тогда
$$L_t(i_t \mid \hat{X}_t) = \sum_{x_t \in \chi_t(\hat{x}_t)} p(x_t \mid \hat{X}_t)\, \ell_t(i_t,\ x_t). \qquad (1)$$

В принятых обозначениях целевая функция имеет вид

$$\min_{\hat{x}_t \in X_t} \sum_{t=1}^{T} L_t(i_t \mid \hat{X}_t), \text{ где } i_t \in I_t. \qquad (2)$$

2.2. Построение допустимой области

Рассмотрим ограничения на вектор заказов $\hat{X}_t = \left[\hat{X}_t(k)\right]_{k=1}^{n}$, поданных в период t, и объем запасов i_t.

Для построения допустимой области заказов введем ряд обозначений. Пусть W – объем склада; V – емкость железнодорожного вагона; P_t– пропускная способность порта в период t; ω – желаемый уровень обслуживания (отношение удовлетворенного спроса к предъявленному). Зададим возможности поставщиков вектором

$R = [r(1)\ r(2) \ldots r(n)]^T$, где $r(k)$ характеризует величину заказа, которую реально способен удовлетворить k-й поставщик за один период.

Согласно перечисленным выше характерным особенностям системы управления запасами рассматриваемой фирмы, область допустимых решений можно представить как

$$\mathrm{X}_t = \left\{ \hat{\mathrm{X}} = [\hat{\mathrm{X}}(1)\ \hat{\mathrm{X}}(2) \ldots \hat{\mathrm{X}}(n)]^T : \hat{\mathrm{X}} = qV, \text{где } q \in \mathrm{Q}_t, V > 0 \right\}$$

и задача (2) сводится к нахождению на каждом шаге планирования запасов неотрицательного целочисленного вектора и имеет следующий вид:

$$\min_{q_t \in \mathrm{Q}_t} \sum_{t=1}^{T} \mathrm{L}_t(i_t \mid \hat{\mathrm{X}}_t = q_t \mathrm{V}), \text{где } \hat{\mathrm{X}}_t \in \mathrm{X}_t,\ i_t \in \mathrm{I}_t.$$

Пространства Q_t и I_t представлены формулами (3), (4).

$$\mathrm{Q}_t = \{ q \ge 0 : q = [q(1)\ q(2) \ldots q(n)]^T, \tag{3}$$

$$\text{где } \forall k = \overline{1,n} \quad q(k) - \text{целые}, \quad q(k) \le \frac{r(k)}{\mathrm{V}};$$

$$\sum_{k=1}^{n} q(k) \ge \max\left\{0, \left[\frac{\hat{y}_t \omega - i_t}{\mathrm{V}}\right] + \delta_t, \left[\frac{\hat{y}_t - I - i_t}{\mathrm{V}}\right] + \delta_t \right\},$$

$$\sum_{k=1}^{n} q(k) \le \min\left\{ \left[\frac{\mathrm{P}_t}{\mathrm{V}}\right], \left[\frac{\mathrm{W} - i_t + \hat{y}_t}{\mathrm{V}}\right], \left[\frac{\sum_{k=t}^{T} \hat{y}_k - i_t}{\mathrm{V}}\right] + \lambda_t \right\},$$

причем если

$$\max\left\{0, \left[\frac{\hat{y}_t - i_t}{\mathrm{V}}\right] + \delta_t, \left[\frac{\hat{y}_t - I - i_t}{\mathrm{V}}\right] + \delta_t \right\} >$$

$$> \min\left\{ \left[\frac{\mathrm{P}_t}{\mathrm{V}}\right], \left[\frac{\mathrm{W} - i_t + \hat{y}_t}{\mathrm{V}}\right], \left[\frac{\sum_{k=t}^{T} \hat{y}_k - i_t}{\mathrm{V}}\right] + \lambda_t \right\},$$

то

$$\sum_{k=1}^{n} q(k) = \min\left\{ \left[\frac{\mathrm{P}_t}{\mathrm{V}}\right], \left[\frac{\mathrm{W} - i_t + \hat{y}_t}{\mathrm{V}}\right], \left[\frac{\sum_{k=t}^{T} \hat{y}_k - i_t}{\mathrm{V}}\right] + \lambda_t \right\},$$

где

$$\lambda_t = \begin{cases} \delta_t, t = \mathrm{T} \\ 0, t = \overline{1, \mathrm{T}-1} \end{cases},$$

$$\delta_t = \begin{cases} 0, \text{если } y_t - i_t \text{ кратно V} \\ 1, \quad \text{в противном случае} \end{cases} \forall t = \overline{1,\mathrm{T}}. \tag{4}$$

Назовем *поведением* набор функций

$$\{\hat{\mathrm{X}}_1, \hat{\mathrm{X}}_2, \ldots, \hat{\mathrm{X}}_T\}, \hat{\mathrm{X}}_t = \hat{\mathrm{X}}^{i}_t : \hat{\mathrm{X}}_t \in \mathrm{X}_t \forall t = \overline{1,\mathrm{T}},$$

определяющих для вектора заказов, который необходимо сформировать на t-м шаге, если имеющийся уровень запасов равен i. Каждому поведению будет соответствовать определенное математическое ожидание суммарных издержек для процесса планирования заказов. Оптимальная линия поведения

$$\{\hat{\mathrm{X}}_1, \hat{\mathrm{X}}_2, \ldots, \hat{\mathrm{X}}_T\}^*, \ \forall t = \overline{1,\mathrm{T}},$$

$$\hat{\mathrm{X}}_t = \left[\hat{\mathrm{X}}^*_t(k)\right]^n_{k=1} : \hat{\mathrm{X}}_t \in \mathrm{X}$$

должна удовлетворять условию минимума полных ожидаемых издержек за весь период планирования:

$$\{\hat{\mathrm{X}}_1, \hat{\mathrm{X}}_2, \ldots, \hat{\mathrm{X}}_T\}^* = \operatorname{argmin} \sum_{t=1}^{T} \mathrm{L}_t(i_t \mid \hat{\mathrm{X}}_t),$$

где i_1 известен к началу процесса планирования запасов, а i_t определяется рекуррентным соотношением:

$$i_{t+1} = i_t + \sum_{k=0}^{n} x_t(k) - \hat{y}_t, t = \overline{1, \mathrm{T}-1}. \tag{5}$$

2.3. Определение оптимальной стратегии

Введем последовательность функций $\{\Phi_t(i)\}_{t=\overline{1,T}}$, где $\Phi_t(i)$ характеризует полные ожидаемые издержки за период, оставшийся до конца процесса планирования заказов, включая текущий период t, при условии, что осталось T–t шагов, начальный уровень запасов в текущем периоде t равен i, а при планировании используется оптимальная стратегия. На основании принципа оптимума Беллмана [2], рекуррентное соотношение динамического программирования для нахождения оптимальной стратегии, которая минимизирует построенную целевую функцию, будет следующим:

$$\Phi_t(i) = \min_{q_t \in \mathrm{Q}_t} \Big\{ \mathrm{L}_t(i \mid \hat{\mathrm{X}}_t) + \sum_{x_t \in \mathcal{X}_t(\hat{\mathrm{X}}_t)} p(x_t \mid \hat{\mathrm{X}}_t)\, \Phi_{t+1}(i + \sum_{k=1}^{n} x_t(k) - \hat{y}_t) \Big\},$$

где $t = \overline{1,\mathrm{T}}, \hat{\mathrm{X}}_t \in \mathrm{X}_t i \in \mathrm{I}_t, \Phi_{T+1}(i) = 0 \forall i \in \mathrm{I}_{T+1}$.

Используя преобразование (1), получаем:

$$\Phi_t(i) = \min_{q_t \in \mathrm{Q}_t} \sum_{x_t \in \mathcal{X}_t(\hat{\mathrm{X}}_t)} p(x_t \mid \hat{\mathrm{X}}_t) \Big[\ell_t(i, x_t) + \Phi_{t+1}(i + \sum_{k=1}^{n} x_t(k) - \hat{y}_t) \Big],$$

где $t = \overline{1,\mathrm{T}}, \hat{\mathrm{X}}_t \in \mathrm{X}_t, i \in \mathrm{I}_t$. $p(x_t \mid \hat{\mathrm{X}}_t)$ имеет смысл вероятности перехода из состояния, когда уровень запасовна начало отрезка t был равен i, в состояние $(i + \sum_{k=1}^{n} x_t(k) - \hat{y}_t)$ – уровень запасов на конец отрезка t, а $\ell_t(i, x_t)$ – расход, сопутствующий этому переходу.

Особенностью построенной модели является непрерывность переменной i, характеризующей текущий уровень запасов угля в речном порту. Это следует из прямой зависимости уровня запасов от величины предъявленного спроса, которая может принимать не только дискретные значения. В этом случае невозможно непосредственно найти значение функции $\Phi_t(i)$ для каждого допустимого значения i. Поэтому будем находить $\Phi_t(i)$ для ряда дискретных значений $i \in \mathrm{I}_t$ (в целях упрощения вычислений с шагом $\Delta i = 1000$), а в остальных точках значения $\Phi_t(i)$ определяются интерполяцией.

Замечание. Область Q_t, по которой ищется минимум $\Phi_t(i)$, при росте числа поставщиков резко возрастает, поэтому, в целях сокращения вычислений будем нахо-

Замечание. Область Q_t, по которой ищется минимум $\Phi_t(i)$, при росте числа поставщиков резко возрастает, поэтому, в целях сокращения вычислений будем находить $\Phi_t(i)$ не полным перебором по всем векторам возможных заказов, а методом покоординатного спуска.

3. Проверка модели и анализ результатов моделирования

Анализ продаж угля за три года показал, что спрос на уголь имеет явно выраженный сезонный характер. Для получения требуемых прогнозных значений спроса используем модель тригонометрического тренда [3] как наиболее адекватно описывающую реальный спрос:

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\left[\hat{\alpha}_{2j-1}\cos\left(\frac{2\pi j}{m}t\right) + \hat{\alpha}_{2j}\sin\left(\frac{2\pi j}{m}t\right)\right] + $$
$$+\hat{\alpha}_{m-1}(-1)^t \forall t = \overline{1,T}, \qquad (6)$$

где коэффициенты $\hat{\alpha}_i \forall i = \overline{1,m}$ находятся методом наименьших квадратов.

На рис. 1 изображены графически фактические значения продаж угля за три года с полученным по формуле (6) прогнозом на планируемый период. Определим значения констант, используемых в модели. Известно, что объем площадки в порту для хранения угля W=30000 тн.; порт способен ежемесячно принимать до 15000 тн., причем в период навигации пропускная способность порта возрастает почти в 2 раза; емкость железнодорожного вагона V=70 тн. Фирма имеет 6 поставщиков, n=6, причем ежемесячно каждый поставщик реально способен поставить не более 10000 тн.; экспертным путем величины, отвечающие за надежность каждого поставщика, были выбраны следующим образом: $p(1)$=0,9; $p(2)$=0,9; $p(3)$=0,8; $p(4)$=0,8; $p(5)$=0,7; $p(6)$=0,7.

Фирма должна найти стратегию поведения, которая минимизирует функцию потерь (складывающуюся из за-трат, связанных с поступлением угля на склад b=27; издержек хранения h=30; и штрафных потерь c=100), а также поддерживает желаемый уровень обслуживания ω=0,82.

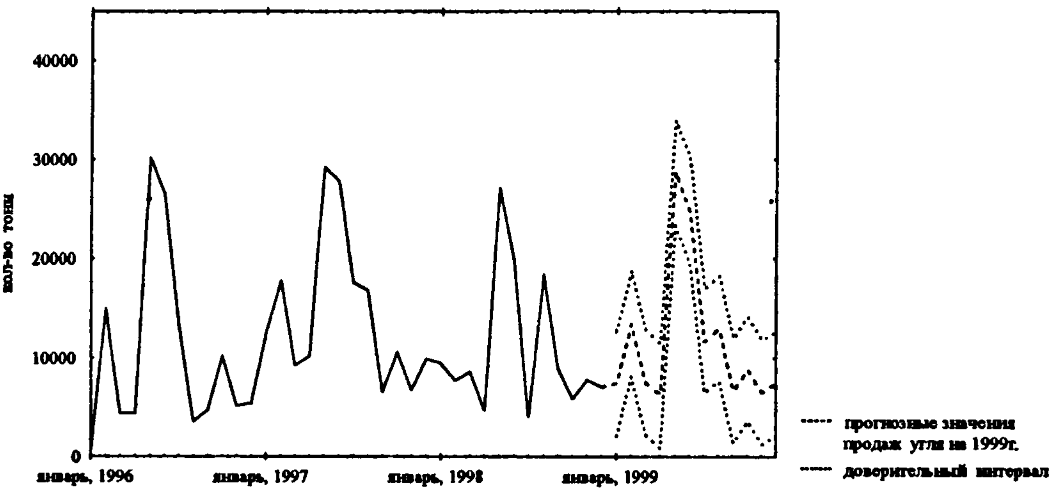

Рис. 1. График продаж с построенным прогнозом

Рис. 2. Фактические и модельные уровни запаса угля

На рис. 2 представлены результаты моделирования. Сравнение модели с фактическими данными показало, что применение стратегии управления запасами, полученной по модели, обеспечивает при меньшем запасе больший уровень обслуживания. В результате ожидаемые издержки сокращаются на 10 %, а дефицит – на 30–40 %. Это позволяет сделать вывод, что построенная модель достаточно хорошо описывает реальную действительность и может применяться на практике.

На рис. 3 показан запас (для различных значений начального запаса), который будет иметь фирма в планируемом периоде, если она применит стратегию планирования запасов, построенную по модели. Из графика видно, что, каков бы ни был запас на начало периода планирования, с января по май рекомендуется накапливать уголь. Это связано с тем, что в мае начинается период навигации, существенно возрастает спрос на уголь, и для своевременного его удовлетворения фирме необходимо иметь достаточный запас. Затем запас плавно снижается, что объясняется соответствующим снижением спроса.

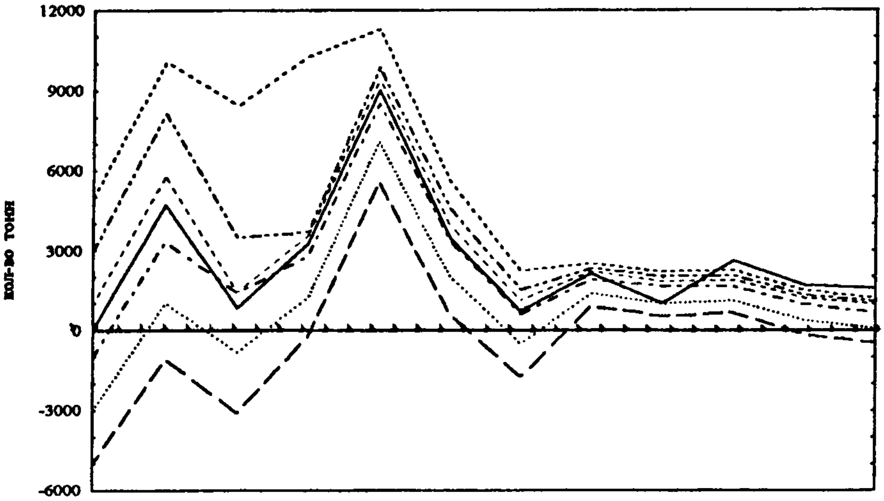

Рис. 3. Уровень текущего запаса на 1999 г. (помесячно) при использовании стратегии, построенной по предлагаемой модели для различных уровней начального запаса

В табл. 1 приведены значения процента дефицита (отношение отложенного спроса к предъявленному) для разного запаса на начало года. Четко прослеживается зависимость между запасом на начало года и наблюдаемым процентом дефицита: процент дефицита увеличивается (следовательно, уменьшается уровень обслуживания потребителей) при уменьшении начального запаса.

В табл. 2 приведена стратегия, полученная по модели, когда запас на начало года равен нулю. Эта стратегия дает 1 % дефицита в случае несвоевременного удовлетворения спроса, что характеризует фирму как надежного партнера на рынке.

Таблица 1

Зависимость % дефицита от начального уровня запаса

Уровень запаса на начало года	Процент дефицита
–5000	6.5
–3000	2.3
–1000	1.0
0	1.0
1000	0.8
3000	0.7
5000	0.6

Таблица 2

Оптимальная стратегия управления запасами при нулевом начальном запасе

1999	ПОСТАВЩИКИ					
	1	2	3	4	5	6
Январь	7000	5320	7140	4550	3570	3150
Февраль	1400	2030	7000	4270	1260	1120
Март	420	1120	4830	2030	350	560
Апрель	0	210	1470	630	280	210
Май	0	350	770	630	210	210
Июнь	6090	2870	6930	3570	2520	2240
Июль	4200	6230	7210	4270	4270	5180
Август	1960	4550	7070	5110	1120	4200
Сентябрь	560	420	3500	2030	630	140
Октябрь	350	280	770	770	280	0
Ноябрь	350	140	840	1050	280	0
Декабрь	4340	2170	7140	2590	3360	210

Заключение

На основе имеющихся данных о поставках и отгрузке угля был проведен анализ существующей системы управления запасами на фирме и, учитывая выявленные характеристики данной системы, построена модель управления запасами угля.

Чтобы построенная модель управления запасами эффективно работала, необходимо правильно оценить величины всех издержек, определить надежность каждого поставщика и получить как можно более точный прогноз спроса, так как эти компоненты оказывают прямое влияние на выбор оптимальной стратегии. Эти задачи подробно не рассматриваются, поскольку являются лишь необходимым звеном на пути к поставленной цели, каждая из них имеет самостоятельную теорию и требует глубокого детального анализа.

Анализ структуры спроса по данным о продажах угля за 1996–1998 гг. показал, что спрос имеет ярко выраженную сезонную составляющую, которая была представлена в виде тригонометрического тренда. Прогноз, полученный по предлагаемой нами модели, был использован при нахождении оптимальной стратегии управления запасами.

Результаты моделирования показали, что система управления запасами, основанная на построенной модели управления запасами, поддерживает желаемый уровень обслуживания потребителей в течение всего периода планирования при минимальных ожидаемых потерях, связанных с поступлением угля в речной порт, омертвлением капитала в запасах и штрафом за несвоевременно удовлетворенный спрос

ЛИТЕРАТУРА

1. *Первозванский А.А.* Математические модели в управлении производством. М.: Наука, 1975.
2. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
3. *Глинский В.В., Ионин В.Г.* Статистический анализ. М.: Филинъ, 1998.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 10 февраля 2000г.

УДК 519.2

Т.В. Калашникова, А.Ф. Терпугов

ОЦЕНИВАНИЕ ОПЦИОНОВ ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА С УЧЕТОМ КОРРЕЛИРОВАННОСТИ ПРИРАЩЕНИЙ ЦЕН

Показывается, что формула Блэка-Шоулса для справедливой цены опционов европейского типа верна для более общей модели изменения цены, нежели модель Самуэльсона.

Нахождение справедливой цены производных ценных бумаг является одной из основных проблем финансовой математики. Начало этим исследованиям положила знаменитая статья Ф. Блэка и М. Шоулса [1], посвященная нахождению справедливой цены опционов европейского типа. Эта формула выведена для так называемой модели Самуэльсона [2]. Ниже показывается, что эта формула верна для более общей модели изменения цены, включающей в себя, как частный случай, модель Самуэльсона.

Описание модели изменения цены

Пусть S_t – цена финансового актива в момент времени t. Перейдем от процесса S_t к процессу

$$h_t = \ln(S_t/S_0). \qquad (1)$$

Тогда в модели Самуэльсона считается, что процесс h_t описывается стохастическим дифференциальным уравнением $dh_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dw_t$, где μ – коэффициент тренда, σ – коэффициент волантильности, а w_t – стандартный винеровский процесс.

Более общей моделью процесса h_t является модель

$$dh_t = a(h_t,t)dt + \sigma\, dw_t, \qquad (2)$$

учитывающая, что коэффициент сноса $a(h_t,t)$ также может зависеть от h_t, и приводящая к коррелированности значений процесса h_t. При $a(h_t,t) = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ она переходит в модель Самуэльсона.

Вывод уравнения для цены актива через самофинансируемый портфель

Пусть имеется безрисковый актив с процентной ставкой r, так что если через B_t обозначить цену этого актива в момент времени t, то имеет место соотношение

$$dB_t = rB_t dt. \qquad (3)$$

Сформируем портфель, (β_t, γ_t), состоящий в момент времени t из β_t безрисковых активов и γ_t рисковых ценных бумаг. Стоимость рисковых ценных бумаг в момент времени t равна

$$\Pi_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_0 e^{h_t}. \qquad (4)$$

Пусть $V(h_t,t)$ – стоимость производной ценной бумаги (опциона, фьючерса) в момент времени t. Потребуем, чтобы стоимость нашего портфеля полностью повторяла стоимость производной ценной бумаги, т.е. чтобы для любых моментов времени t выполнялось соотношение

$$\Pi_t = V(h_t,t);\ d\Pi_t = dV(h_t,t). \qquad (5)$$

Кроме того, будем рассматривать лишь самофинансируемые портфели, когда верно соотношение

$$d\beta_t B_t + d\gamma_t S_0 e^{h_t} = 0. \qquad (6)$$

Используя формулу Ито, получим

$$dV(h_t,t) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial h_t}dh_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial h_t^2}dh_t^2 =$$

$$= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h_t}a(h_t,t) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial h_t^2}\right]dt + \sigma\frac{\partial V}{\partial h_t}dw_t. \qquad (7)$$