

Заключение

На основе имеющихся данных о поставках и отгрузке угля был проведен анализ существующей системы управления запасами на фирме и, учитывая выявленные характеристики данной системы, построена модель управления запасами угля.

Чтобы построенная модель управления запасами эффективно работала, необходимо правильно оценить величины всех издержек, определить надежность каждого поставщика и получить как можно более точный прогноз спроса, так как эти компоненты оказывают прямое влияние на выбор оптимальной стратегии. Эти задачи подробно не рассматриваются, поскольку являются лишь необходимым звеном на пути к поставленной цели, каждая из них имеет самостоятельную теорию и требует глубокого детального анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Первозванский А.А. Математические модели в управлении производством. М.: Наука, 1975.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
3. Глинский В.В., Ионин В.Г. Статистический анализ. М.: Филинь, 1998.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 10 февраля 2000г.

УДК 519.2

Т.В. Калашникова, А.Ф. Терпугов

ОЦЕНИВАНИЕ ОПЦИОНОВ ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА С УЧЕТОМ КОРРЕЛИРОВАННОСТИ ПРИРАЩЕНИЙ ЦЕН

Показывается, что формула Блэка-Шоулса для справедливой цены опционов европейского типа верна для более общей модели изменения цены, нежели модель Самуэльсона.

Нахождение справедливой цены производных ценных бумаг является одной из основных проблем финансовой математики. Начало этим исследованиям положила знаменитая статья Ф. Блэка и М. Шоулса [1], посвященная нахождению справедливой цены опционов европейского типа. Эта формула выведена для так называемой модели Самуэльсона [2]. Ниже показывается, что эта формула верна для более общей модели изменения цены, включающей в себя, как частный случай, модель Самуэльсона.

Описание модели изменения цены

Пусть S_t – цена финансового актива в момент времени t . Перейдем от процесса S_t к процессу

$$h_t = \ln(S_t/S_0). \quad (1)$$

Тогда в модели Самуэльсона считается, что процесс h_t описывается стохастическим дифференциальным уравнением $dh_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dw_t$, где μ – коэффициент тренда, σ – коэффициент волатильности, а w_t – стандартный винеровский процесс.

Более общей моделью процесса h_t является модель

$$dh_t = a(h_t, t)dt + \sigma dw_t, \quad (2)$$

учитывающая, что коэффициент сноса $a(h_t, t)$ также может зависеть от h_t , и приводящая к коррелированности значений процесса h_t . При $a(h_t, t) = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ она переходит в модель Самуэльсона.

Вывод уравнения для цены актива через самофинансируемый портфель

Пусть имеется безрисковый актив с процентной ставкой r , так что если через B_t обозначить цену

Анализ структуры спроса по данным о продажах угля за 1996–1998 гг. показал, что спрос имеет ярко выраженную сезонную составляющую, которая была представлена в виде тригонометрического тренда. Прогноз, полученный по предлагаемой нами модели, был использован при нахождении оптимальной стратегии управления запасами.

Результаты моделирования показали, что система управления запасами, основанная на построенной модели управления запасами, поддерживает желаемый уровень обслуживания потребителей в течение всего периода планирования при минимальных ожидаемых потерях, связанных с поступлением угля в речной порт, омертвлением капитала в запасах и штрафом за несвоевременно удовлетворенный спрос

этого актива в момент времени t , то имеет место соотношение

$$dB_t = rB_t dt. \quad (3)$$

Сформируем портфель, (β_t, γ_t) , состоящий в момент времени t из β_t безрисковых активов и γ_t рискованных ценных бумаг. Стоимость рискованных ценных бумаг в момент времени t равна

$$\Pi_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_0 e^{h_t}. \quad (4)$$

Пусть $V(h_t, t)$ – стоимость производной ценной бумаги (опциона, фьючерса) в момент времени t . Потребуем, чтобы стоимость нашего портфеля полностью повторяла стоимость производной ценной бумаги, т.е. чтобы для любых моментов времени t выполнялось соотношение

$$\Pi_t = V(h_t, t); \quad d\Pi_t = dV(h_t, t). \quad (5)$$

Кроме того, будем рассматривать лишь самофинансируемые портфели, когда верно соотношение

$$d\beta_t B_t + d\gamma_t S_0 e^{h_t} = 0. \quad (6)$$

Используя формулу Ито, получим

$$\begin{aligned} dV(h_t, t) &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial h_t} dh_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial h_t^2} dh_t^2 = \\ &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h_t} a(h_t, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial h_t^2} \right] dt + \sigma \frac{\partial V}{\partial h_t} dw_t. \end{aligned} \quad (7)$$

Для портфеля, используя формулу Ито, получим

$$d\Pi_t = \beta_t r B_t dt + \gamma_t S_0 e^{h_t} \left(dh_t + \frac{1}{2} dh_t^2 \right) = \\ = \left[\beta_t r B_t + \gamma_t S_0 e^{h_t} a(h_t, t) + \gamma_t S_0 e^{h_t} \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \\ + \gamma_t S_0 e^{h_t} \sigma dw_t. \quad (8)$$

Условие $d\Pi_t = dV(h_t, t)$ дает уравнения

$$\beta_t r B_t + \gamma_t S_0 e^{h_t} a(h_t, t) + \gamma_t S_0 e^{h_t} \frac{\sigma^2}{2} = \\ = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h_t} a(h_t, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial h_t^2}, \quad (9)$$

$$\gamma_t S_0 e^{h_t} \sigma = \sigma \frac{\partial V}{\partial h_t}. \quad (10)$$

Сюда же надо добавить условие

$$\beta_t B_t + \gamma_t S_0 e^{h_t} = V(h_t, t) \quad (11)$$

Из уравнения (10) имеем $\gamma_t S_0 e^{h_t} = \frac{\partial V}{\partial h_t}$. Подстано-

вка этого выражения в (11) дает

$$\beta_t B_t = V(h_t, t) - \frac{\partial V}{\partial h_t}.$$

Подставляя все это в (9), получим

$$r \left[V(h_t, t) - \frac{\partial V}{\partial h_t} \right] + \frac{\partial V}{\partial h_t} a(h_t, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial V}{\partial h_t} = \\ = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h_t} a(h_t, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial h_t^2},$$

и видно, что слагаемые, содержащие функцию $a(h_t, t)$, сокращаются и для $V(h_t, t)$ получается уравнение, не зависящее от коэффициента сноса $a(h_t, t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial V}{\partial h_t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial h_t^2} - rV(h_t, t) = 0.$$

Переход к переменной $S_t = S_0 e^{h_t}$ приводит к обычному уравнению Блэка-Шоулса

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - rV = 0,$$

т.е. формула Блэка-Шоулса верна для более общей модели процесса h_t . Результаты, отличные от формулы Блэка-Шоулса, получаются лишь тогда, когда коэффициент волатильности σ^2 станет зависеть от h_t так как в этом случае коэффициенты при $\partial^2 V / \partial h_t^2$ и $\partial V / \partial h_t$ станут переменными, зависящими от h_t , что и приведет к результирующей формуле, отличающейся от формулы Блэка-Шоулса.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Black, M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of political economy. 1973. Vol. 81. № 3. P. 637–659.
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том I. Факты и модели. М.: Фазис, 1998. 489 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета. Поступила в научную редакцию 1 марта 2000 г.

УДК 519.2

Е.В. Сухушина, А.Ф. Терпугов

АВТОРЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕНЫ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ СО СКАЧКАМИ В СЛУЧАЙНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Рассматривается авторегрессионная модель изменения цены финансовых активов с изменением цен в моменты сделок, образующих пуассоновский поток событий постоянной интенсивности. Находятся основные характеристики процесса изменения цены (среднее значение, дисперсия, функция корреляции) и показывается его асимптотическая нормальность.

Модели изменения цен финансовых активов в настоящий момент привлекают к себе очень большое внимание, так как они необходимы для прогнозирования цены актива, расчета стоимости вторичных ценных бумаг и т.д.

Пусть S_t есть цена актива в момент времени t . Тогда при построении модели изменения цены S_t обычно переходят к процессу h_t по формуле

$$h_t = \ln(S_t | S_0), \quad (1)$$

где S_0 – начальная цена актива (в момент времени $t = 0$). Дальнейшее развитие модели сводится к описанию процесса h_t . Одной из наиболее часто используемых моделей процесса h_t является авторегрессионная модель. В этом случае считается, что время меняется дискретно с интервалом Δt , так что $t_n = n\Delta t$. В случае авторегрессионной модели первого порядка значения $h_n = h(t_n)$ процесса h_t удовлетворяют уравнению

$$h_n = \mu + \rho(h_{n-1} - \mu) + \sigma \varepsilon_n, \quad (2)$$

где μ – среднее значение (тренд) процесса h_n ; ρ – коэффициент авторегрессии; σ – волатильность; ε_n считаются независимыми стандартными нормальными случайными величинами $N(0,1)$.

Однако в приложении к финансовому рынку такая модель не совсем адекватно отражает реальность. Дело в том, что цена актива изменяется и устанавливается в момент сделки, а моменты совершения сделок являются случайными. Представляется естественным считать, что изменения процесса h_t происходят лишь в те случайные моменты времени, когда совершаются сделки. Именно эта модель и рассматривается в данной работе.

Описание модели

Будем считать, что моменты совершения сделок $t_1, t_2, \dots, t_N$ являются случайными и образуют пуассоно-