

УДК 165.43

А.В. Хлебалин

**ОНТОЛОГИЧЕСКИЕ ОБЯЗАТЕЛЬСТВА
НЕУСТРАНИМОСТИ МАТЕМАТИКИ***

Проанализирована оправданность использования тезиса о неустраимости математики из состава естественно-научной теории в качестве аргумента в пользу математического реализма. Показано, что использование классической формулировки аргумента о неустраимости влечет признание проблематичных онтологических следствий. Обосновывается вывод о необходимости уточнения предпосылок аргумента о неустраимости и обозначены пути дальнейшего исследования феномена применимости математики как аргумента в споре реализма / антиреализма. Ключевые слова: неустраимости математики, онтологические обязательства, консервативность, фикционализм, натуралистская онтология научной теории.

Важнейшим вопросом философии математики, несмотря на потрясающее многообразие обсуждаемых на разных этапах ее развития тем – как глубоко технических по своей природе, но имплицитно претендующих на общеполитическую значимость, так и изначально включающих в себя изрядно обязывающие метафизические положения, остается вопрос о природе математических объектов. Именно прояснение онтологии математики выступает некоей конечной целью рассуждений о статусе континуум-гипотезы или аксиомы выбора, о значении истинности недоказуемых в рамках формальной системы утверждений, о неединственности теоретико-множественной экспликации чисел. Тесная связь семантики, эпистемологии и онтологии в случае философии математики оборачивается столкновением с онтологическими обязательствами при анализе тех проблем, которые, казалось бы, совершенно не связаны с проблемой существования математических объектов. Фактически можно утверждать о неразрывном единстве онтологии, эпистемологии и семантики в философии математики: ведется ли речь о природе указания математическими терминами или об эпистемологическом доступе к объектам познания, мы всякий раз при обсуждении подобных проблем упираемся в вопрос о природе математических сущностей. И наоборот, рассуждение о способе существования математических объектов влечет постановку целого ряда проблем эпистемологического и семантического характера. Упомянутая неразрывная связь эпистемологии и онтологии в философии математики делает фактически невозможным – или оставляет незавершенным – анализ любой проблемы, если из него не выводятся следствия как онтологического, так и эпистемологического характера.

Современные дебаты в области онтологии математики являются подтверждением заявленной связи онтологии, эпистемологии и семантики языка математики. Так, большая часть дискуссий группируется вокруг трех аргу-

* Исследование проведено в рамках реализации Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, мероприятие 1.4.

ментов. Первые два из них восходят к П. Бенацерафу и представляют собой аргумент о неопределенности теоретико-множественной экспликации натуральных чисел [1] и аргумент о проблематичности эпистемологического доступа к математическим сущностям, если они понимаются как существующие независимо от познающего субъекта [2]. Третий аргумент восходит к У. Куайну [3] и связан с неустранимостью математических терминов из языка наиболее успешных естественно-научных теорий. Если первые два аргумента П. Бенацерафа допускают заключение от семантических и эпистемологических результатов к проблеме объективности существования математических сущностей, являясь источником аргументов в пользу антиреализма, то аргумент о неустранимости математики из языка естественно-научных теорий ныне рассматривается как один из наиболее весомых доводов в пользу реалистской позиции в онтологии математики. При этом каждый из трех аргументов включает в себя целый спектр имплицитно принимаемых предположений семантического и эпистемологического характера, лежащих в основании выдвигаемых аргументов. Особенно интересными являются такие предположения в случае аргумента У. Куайна о неустранимости математики из языка естественно-научных теорий. Он выделяется из общего числа аргументов в двух отношениях: прежде всего, он является «прямым» аргументом, не опосредованным никакими техническими результатами, требующими для обоснования своей философской релевантности какой-либо дополнительной интерпретации; во-вторых, по выражению Х. Филда [4. С. viii], это единственный аргумент в пользу реализма, не вызывающий каких-либо сомнений. Ниже мы постараемся выявить и проанализировать как сами предпосылки, лежащие в основании аргумента о неустранимости, так и то, в какой степени они помогают сделать аргумент релевантным для отстаивания реалистской интерпретации онтологии математики.

Широко известным феномен применимости математики в естественно-научном познании стал благодаря вышедшему далеко за пределы академического сообщества выступлению Е. Вигнера, основным содержанием которого, в интересующем нас аспекте, явились констатация удивительной плодотворности использования математического аппарата в фундаментальных физических теориях и заявление о непостижимости этого феномена: «Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов, это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем. Нам остается лишь благодарить за него судьбу и надеяться, что и в своих будущих исследованиях мы сможем по-прежнему пользоваться им. Мы думаем, что сфера его применимости (хорошо это или плохо) будет непрерывно возрастать, принося нам не только радость, но и новые головоломные проблемы» [5. С. 198]. Одной из первых реакций на заявление Е. Вигнера явилось убеждение в том, что объяснение применимости математики в естественных науках должно волновать не столько физиков, которые могут ограничиться выражением восхищения и удивления, сколько философов, ибо является подлинно философской проблемой. И философски интересным феномен применимости математики становится именно в силу того, что предположения онтологического характера – предположения об объективном существовании математических сущностей – кажутся вполне естест-

венной реакцией на удивительную плодотворность математики в описании фундаментальной структуры мира. Применение математики эффективно в силу того, что, помимо электронов, кварков, гравитационных полей и прочих сущностей, постулируемых успешной научной теорией, существуют функции, множества, трансфинитные числа и прочие математические сущности, референция к которым производится используемыми при формулировке научных теорий математическими терминами.

Но несмотря на «очевидность» такого онтологического решения проблемы применимости математики, выявление философской значимости аргумента необходимо начать с прояснения используемых в нем понятий. Прежде всего, в уточнении нуждается само понятие применимости. Несмотря на свою кажущуюся ясность и однозначность, оно содержит возможность разных толкований: «В силу того, что существует много смыслов «применения» и «применимости», существует много вопросов о применимости математики, которые должны были быть, но не были различены философами. В результате мы не всегда знаем, в чем заключается проблема, с которой мы имеем дело» [6. Р. 1]. Фактически применимость математики в естественных науках включает в себя не одну, а множество проблем, которые кроются во многообразии интерпретаций понятия применимости. Так, применение математического языка в рассуждениях об эмпирической реальности сразу ставит два вопроса: вопрос о логико-семантической форме и вопрос о метафизических предпосылках таких рассуждений. Проблема логико-семантической формы встает в силу того, что в языке математики слова для обозначения чисел функционируют как имена собственные, тогда как в описании эмпирической реальности они часто функционируют как прилагательные: «Эта неопределенность, кажется, делает невозможным рассуждения об эмпирической ситуации с использованием математики» [6. С. 1]. Семантическая проблема применимости заключается в возможности объяснить функционирование математических терминов в качестве имен собственных в различных контекстах. М. Стейнер, указывая на эту проблему, считает, что она была успешно решена Г. Фреге, согласно которому, математические термины указывают не на абстрактные сущности, а на эмпирические понятия. Иная проблема встает в связи с дескриптивной интерпретацией понятия применимости: во многих случаях математика играет решающую роль в совершении успешных предсказаний; в этой связи проблема заключается не в том, что математика может быть использована для формулировки физических законов, а в том, как математика, развивающаяся согласно собственным – «эстетическим», по терминологии М. Стейнера, – канонам, может играть решающую роль при выявлении структуры реальности. Именно дескриптивное понимание применимости непосредственно связано с онтологической проблематикой, и именно такое понимание применимости математики будет интересовать нас в дальнейшем.

В подобном же уточнении нуждается понятие неустранимости, используемое при формулировке как уточняющее по отношению к понятию применимости. Несмотря на то, что У. Куайн не употребляет понятия «неустранимость», а использует более каноническую формулировку тезиса, говоря о квантификации успешных научных теорий, именно это понятие использует-

ся для уточнения характера применимости математики к описанию эмпирической реальности, и сама характеристика математики как неустранимой из научной теории стала уже канонической. Фактически У. Куайн настаивает на том, что использование в словаре научных теорий математических утверждений является существенным и они не могут быть устранены: невозможно так переаксиоматизировать научные теории, содержащие математические утверждения, чтобы устранить референцию (или квантификацию) к математическим сущностям и получившаяся в результате теория сохранила бы все атрибуты успешной научной теории, такие как предсказательная возможность, простота, изящность и др. Именно неустранимость как фундаментальная характеристика способа функционирования математических предположений в составе физической теории заостряет указанные выше логико-семантический и метафизический аспекты проблемы применимости математики: математический язык не просто присутствует в составе теории как один из возможных способов описания эмпирической реальности, выбор которого обусловлен субъективными соображениями, например удобством использования или исключительной определенностью словаря. Напротив, в свете аргумента о неустранимости само наличие математической формулировки теории характеризуется как необходимое, неизбежное условие успешности физической теории. Необходимость использования математического языка для описания эмпирической реальности при этом обосновывается онтологически: если математика является неотъемлемой частью наших наиболее успешных естественно-научных теорий, то мы обязаны допустить существование класса математических сущностей, обращение к которым необходимо для успешного описания физической реальности.

Традиционно именно У. Куайну и Х. Патнэму [7, 8] приписывается первенство в экспликации философской значимости отмеченной Е. Вигнером роли математики в эмпирических науках. Формулировка аргумента о неустранимости математики из языка естественно-научной теории самими авторами непосредственно связывается с реалистской позицией в онтологии математики. В общем виде аргумент Куайна – Патнэма может быть представлен следующим образом:

1. Мы вынуждены признать онтологические обязательства по отношению к тем и только тем сущностям, которые не устранимы из наших успешных научных теорий.

2. Математические сущности не устранимы из наших успешных научных теорий.

3. Мы обязаны признать онтологические обязательства по отношению к математическим сущностям.

Фактически аргумент говорит о том, что поскольку математические утверждения в составе фундаментальных научных теорий позволяют предсказывать и точно описывать такие феномены, предсказание которых было бы невозможным без использования математических теорий, мы обязаны признать существование математических сущностей, указываемых используемыми математическими понятиями. Поясняя свою позицию по отношению к реалистской интерпретации онтологии математики в связи с ее эффективностью при описании эмпирической реальности, сами авторы поясняют, какая

именно часть математики влечет онтологические обязательства. Так, Х. Патнэм говорит о «теоретико-множественных «нуждах» физики» [8. С. 346], признавая онтологические обязательства по отношению ко всем сущностям, постулируемым аксиоматизируемой теорией множеств. У. Куайн фактически соглашается с ним, заявляя о том, что большая часть других математических теорий не отягощает нас никакими онтологическим обязательствами, выходя за пределы канонического языка науки [3]. Вместе с тем все те области математики, которые непосредственно не используются при описании эмпирической реальности, сами, тем не менее, приложимы к тем областям математики, которые, в свою очередь, входят в состав естественно-научного знания. Открытым остается вопрос о том, достаточно ли такого опосредованного участия в описании реальности для возникновения онтологическим обязательств. Несмотря на весьма любопытную проблему, встающую в связи с этим, возможность своеобразной «транзитивности» онтологических обязательств непосредственно не связана с обсуждаемым статусом аргумента о неустранимости. Интересующие нас посылки аргумента о неустранимости математики лежат в несколько ином направлении.

Двумя фундаментальными предпосылками, делающими реальным рассмотрение применимости математики в качестве возможного источника аргументов для решения онтологических проблем философии математики, являются идея натурализованной эпистемологии и холистский подход к анализу научной теории. Несмотря на то, что весьма затруднительным будет найти в современной философии понятие с более неясным значением, чем «натурализм», его общая трактовка предполагает отказ признавать за философией какой-либо особый, привилегированный эпистемологический статус по отношению к научному познанию. Наука для сторонника натуралистского подхода является «единственной подлинной историей мира», и именно она говорит нам если не о том, какого рода сущности населяют мир, то о том, в существование какого рода сущностей оправданно верить. Именно лучшие научные теории определяют то, во что оправданно верить, исчерпывая собою «подлинную историю мира». Холизм, в свою очередь, является требованием рассматривать подтверждение научной теории эмпирическими фактами не на уровне отдельных предложений или фрагментов теории, а как единое целое. То есть если имеется эмпирическое свидетельство в пользу теории, то оно подтверждает не отдельный фрагмент теории, а всю ее. В связи с проблемой применимости математики холизм означает, что наличие эмпирического подтверждения теории является релевантным для подтверждения истинности используемых в ней математических утверждений.

Одна из наиболее известных попыток лишить применимость математики в естественных науках каких-либо онтологических обязательств, тем не менее, связана не с критикой указанных предпосылок аргумента У. Куайна, а с отрицанием истинности второй посылки в формулировке самого аргумента. Фикционалистская программа Х. Филда имеет своей непосредственной целью демонстрацию устранимости математики из языка науки. Согласно программе Х. Филда, математические предложения в составе естественно-научной теории буквально являются ложными, а указания на математические сущности – фиктивными. Математический аппарат может быть полно-

стью элиминирован из научной теории, а следовательно, у нас нет никаких онтологических обязательств по отношению к математическим сущностям. Сам Х. Филд так характеризует свой проект: «Я не предлагаю переинтерпретировать какую-либо часть математики; вместо этого я намериваюсь показать, что требуемая для применения к физическому миру математика не включает чего-нибудь, что даже *prima facie* содержит указание на (или квантификацию) абстрактные сущности, вроде чисел, функций или множеств. В отношении той части математики, которая содержит указание (или квантификацию) на абстрактные сущности – а она содержит фактически во всей обычной математике – я принимаю фикционалистскую позицию: т.е. я не вижу основания рассматривать ее как *истинную*». [4. С. 1–2]. Более того, помимо общего заявления указанной позиции, Х. Филд демонстрирует возможность элиминации математического языка на примере ньютоновской теории гравитации [4].

Х. Филд утверждает, что для успешного применения математики к описанию эмпирической реальности вовсе не требуется истинности математических предложений. Фактически условием применимости математики является консервативность математической теории: математическая теория M является консервативной, если для любого класса утверждений S и частного утверждения C C не является следствием $M+S$, если только C не является следствием S . Если удастся показать консервативность математики, то истинность или ложность математических теорий становится совершенно иррелевантной для применимости математики к описанию эмпирической реальности: если математическая теория является ложной, но консервативной, это не приведет к ложности номиналистского утверждения, соединенного с некоторой номиналистской эмпирической теорией, если только ложное утверждение не является следствием самой эмпирической теории.

Позиция Х. Филда является, безусловно, одной из наиболее интересной попыток решения проблемы применимости математики в естественно-научной теории. Несмотря на радикальность заявлений и коренной пересмотр взглядов на истинность математических утверждений и выводимых из нее онтологических следствий, требуемых фикционалистским подходом, экстремизм Филда приобретает определенную респектабельность в связи с проблемой платонизма в математике. Предполагающая отношение соответствия трактовка онтологических обязательств истинности математических утверждений оборачивается признанием объективного существования математических сущностей. Но, помимо «онтологических джунглей», произрастающих в платонистском мире, реалистская позиция по отношению к онтологии математической теории требует признания независимости свойств математических сущностей от способа их описания. Именно проблематичность языковой независимости математических сущностей лежит в основании структуралистской критики «полнокровного платонизма» П. Бенацерафом. Фикционализм Х. Филда свободен от подобного рода критики в той же степени, в какой он свободен и от эпистемологического аргумента П. Бенацерафа. Тем не менее свобода от критических аргументов против оппозиционной теории не может рассматриваться в качестве достаточного условия истинности защищаемого подхода. Центральное для фикционализма Х. Филда

положение о том, что именно понятие консервативности математической теории, а не классическое понятия истины является основанием для экспликации применимости математики в естественно-научном познании, на наш взгляд, нуждается в дополнительной аргументации. Отдельной проблемой в связи с этим, остро нуждающейся в своем решении, на наш взгляд, является проблема скрытого использования понятия истины в самой попытке заменить его понятием консервативности. Так, сам Х. Филд указывает на то, что понятие консервативности тесно связано с понятием необходимой истины: «консервативность можно легко помыслить как ‘необходимую истину без истины’». Понятие истины в этом определении присутствует существенным образом, и его элиминация из данного контекста может оказаться весьма проблематичной. Но даже помимо возникающей в связи с утверждением достаточности консервативности в качестве условия применимости математики к описанию эмпирической реальности можно указать на существенный недостаток фикционалистского подхода: он совершенно не проясняет того, почему использование математики приводит к формулировке наиболее успешных (прежде всего наиболее простых и обладающих наибольшей предсказательной возможностью) научных теорий. Фикционалистский подход фактически не проясняет возможность дескриптивного использования языка математики.

Теперь уже полученный Х. Филдом результат – демонстрация возможности устранения из физической теории математических терминов, использование которых предполагает указание / квантификацию математических сущностей и вместе с тем невозможность объяснения дескриптивной функции математического языка в целом, – требует объяснения. Холистская и натуралистическая предпосылка аргумента о неустранимости математики позволяет объяснить дескриптивную применимость математики, но влечет онтологические обязательства, которые могут быть отчасти поставлены под сомнение фикционалистской стратегией Х. Филда. Но ценой за избавление от них оказывается капитуляция при объяснении философски наиболее интересной проблемы, встающей в связи с применением математики к описанию реальности. Выходом из сложившейся ситуации, на наш взгляд, является модификация как самой холистской предпосылки, так и необходимое уточнение аргумента о неустранимости. При этом источником уточнения холистской предпосылки выступает натуралистская предпосылка аргумента. Так, П. Мэди предлагает следующую стратегию: натуралистский принцип допускает различение в языке научной теории двух компонентов – один из них является буквально истинным, другой же – только полезным: «Мы даже должны предположить, что только термины из полезной части языка теории фактически являются неустранимыми в том смысле, что не существует столь же хорошей теории, описывающей тот же феномен, но без них» [9. С. 281]. Основанием для различения «истинной» и «только полезной» частей языка теории могут служить многочисленные примеры из истории науки, например история становления атомистической теории в химии [9]. При этом различение языка на истинную / полезную части оборачивается тем, что неустранимость математики не является основанием признания ее истинности.

В связи с проведенным различием частей языка теории встает вопрос о том, в какую из них попадает математика. Прежде всего, при ответе на этот

вопрос необходимо отметить тот факт, что математика применяется в теориях, включающих в себя гипотезы, содержащие указание на сущности, предположение о существовании которых абсурдно. Например, предположение о бесконечности глубины воды в теории волн: неустранимость гипотезы бесконечной глубины из успешной научной теории вовсе не означает признания существования такой сущности, как вода с бесконечной глубиной. Примеров, подобных приведенному, может найдено сколь угодно много. Присутствие в формулировке таких теорий математических терминов, стоящих в указательной позиции, приводит нас – в случае принятия первой посылки аргумента У. Куайна – к признанию онтологических обязательств по отношению к каждому из них. Такая ситуация является попросту абсурдной, хотя бы на том основании, что в результате признания первой посылки мы можем получить противоречивую онтологию: соединение – позволим себе это неосторожное введение термина – «наивного холизма» и «наивного натурализма» в духе У. Куайна, лежащих в основании аргумента о неустранимости математики, рискует обернуться тем, что в результате мы получим холистски интерпретируемую онтологию, в которой мы вынуждены будем признавать существование взаимоисключающих сущностей – например пространства, обладающего дискретной и континуальной структурой одновременно (поскольку в одной теории оно может характеризоваться одним образом, а в другой – совершенно иначе; но коль скоро в холистски понимаемом языке различия между теориями, входящими в его состав, онтологически не релевантны, мы обязаны признать в случае нашего вымышленного примера возможность существования сущности, обладающей взаимоисключающими свойствами). Приведенных примеров – присутствие математики в гипотезах, онтологические обязательства которых требуют признания сомнительных сущностей и возможность возникновения в онтологии сущностей со взаимоисключающими свойствами, – достаточно для демонстрации неоправданности первой посылки аргумента о неустранимости. Невозможность элиминации математических терминов из успешной теории не оборачивается признанием существования референта термина.

Вместе с тем признание за математическим языком в структуре естественно-научной теории исключительно «полезной» функции и отказ признавать его истинным требует дальнейшей экспликации свойства его «полезности» в перспективе объяснения дескриптивной функции математического языка по отношению к эмпирической реальности. На наш взгляд, поиски адекватного решения встающей проблемы необходимо искать в направлении экспликации онтологической значимости понятия консервативного расширения теории, которая должна проводиться с учетом установленного разделения языка научной теории на «полезную» и «истинную» части.

Литература

1. Benacerraf P. What numbers could not be // Benacerraf P., Putnam H. *Philosophy of mathematics: selected readings*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. P. 272–295.
2. Benacerraf P. Mathematical truth // Benacerraf P., Putnam H. *Philosophy of mathematics: selected readings*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. P. 401–421.
3. Quine W.V.O. Success and limits of mathematization. // Quine W.V.O. *Theories and thing*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1981. P. 135–159.

4. *Field H.* Science without numbers. A defence of nominalism. Princeton: Princeton University Press, 1980. 130 p.
5. *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Вигнер Е. Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. С. 182–199.
6. *Steiner M.* The applicability of mathematics as a philosophical problem. Harvard University Press, 1998. 215 p.
7. *Putnam H.* What is mathematical truth? // Putnam H. Mathematics matter and method: Philosophical papers. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. Vol. I. P. 60–79.
8. *Putnam H.* Philosophy of logic // Putnam H. Mathematics matter and method: Philosophical papers. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. Vol. I. P. 323–359.
9. *Maddy P.* Indispensability and practice // Journal of philosophy. 1992. № 89. P. 275–289.