УДК 517.956.223
DOI 10.17223/19988621/44/2

Е.Ю. Мустафаева, Н.А. Алиев

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ СТЕКЛОВА ДЛЯ 3-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается фредгольмовость спектральной задачи Стеклова для 3-мерного уравнения Лапласа с однородными нелокальными граничными условиями, где спектральный параметр появляется только в граничном условии. Данная однородная граничная задача сводится к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода с несингулярным ядром, зависящим от спектрального параметра.

Ключевые слова: *задача Стеклова, спектральная задача, нелокальные граничные условия, трехмерное уравнение Лапласа, основные соотношения, регуляризация, фредгольмовость.*

1. Введение

Как известно, задача Стеклова в одномерном случае является однородной краевой задачей для одномерного уравнения Лапласа, т.е. вторая производная равна нулю при однородных линейных краевых условиях, содержащих спектральный параметр. Эта задача легко решается, и определяется счетное число собственных значений и собственных функций. Сведение задачи Стеклова для уравнения Коши – Римана с нелокальными однородными граничными условиями, содержащими спектральный параметр, к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода с невырожденным ядром приведено в [1]. Далее, та же задача с простыми глобальными членами с параметром в граничном условии была изучена в [2]. Продолжение этой работы рассматривается в [3], где интеграл охватывает всю границу рассматриваемой области.

Задача Стеклова для двумерного уравнения Лапласа с простыми локальными граничными условиями рассмотрена в [4]. Следует отметить, что в этой работе метод исследования является новым, т.е. он основывается на необходимых условиях, полученных в этой работе. Та же задача для двумерного уравнения Лапласа с нелокальными граничными условиями со спектральным параметром, также содержащими глобальные члены (интегралы), была рассмотрена в [5]. Аналогичная проблема, где спектральный параметр появляется только в одном из граничных условий, содержащих нелокальные и глобальные члены, рассматривалась в [6]. Работы [7, 8] также посвящены изучению таких задач для двумерного уравнения Лапласа.

Излагаемая работа посвящена изучению решений задачи Стеклова для трехмерного уравнения Лапласа с нелокальными граничными условиями. Отметим, что трудности, возникающие при увеличении размерности рассматриваемого уравнения, не сопоставимы с трудностями в предыдущих работах.

Метод исследования заключается в следующем. На основе фундаментального решения уравнения Лапласа и с помощью второй формулы Грина и аналога этой формулы получаем аналитическое представление как для решения, так и для его частных производных. Из этих формул мы также получаем необходимые условия.

Далее, первое необходимое условие, которое получается из второй формулы Грина, не содержит сингулярностей. А остальные необходимые условия, которые получаются из аналога второй формулы Грина, содержат сингулярные члены. Эти сингулярности не регуляризируются по общим правилам, приведенным в [9, 10]. Поскольку эти сингулярные уравнения находятся в спектре, регуляризация этих сингулярностей осуществляется по оригинальной схеме. Кроме того, комбинируя полученные регулярные отношения с заданными граничными условиями, получим достаточные условия для фредгольмовости поставленной задачи.

2. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное уравнение Лапласа в области $D \subset R^3$, выпуклой по направлению оси Ox_3:

$$Lu = \Delta u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} = 0, \tag{2.1}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in D,$$

с нелокальными граничными условиями

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')} + \sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_{j1}^{(k)}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \alpha_{j2}^{(k)}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right]\Big|_{x_3=\gamma_j(x')} =$$

$$= \lambda u(x', \gamma_k(x')), \quad x' \in S,\ k = 1,2, \tag{2.2}$$

$$u(x) = f_0(x), \quad x \in L = \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2. \tag{2.3}$$

Задача (2.1) – (2.3), содержащая параметр в граничных условиях, – это так называемая задача Стеклова. Здесь S – проекция области D на плоскость $Ox_1x_2 = Ox'$, коэффициенты $\alpha_{jk}^{(i)}(x') \in C(S)$, $i, j, k = 1,2;$ граница $\Gamma = \partial D$ – поверхность Ляпунова, $\lambda \in C$ – комплекснозначный параметр; L – экватор, соединяющий верхнюю и нижнюю полуповерхности Γ_1 и Γ_2:

$$\Gamma_k = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_3 = \gamma_k(\xi'),\ \xi' = (\xi_1, \xi_2) \in S\},\ k = 1,2,$$

где $\xi_3 = \gamma_k(\xi_1, \xi_2), k = 1,2$, уравнения полуповерхностей Γ_1 и Γ_2 (выпуклость области D в направлении Ox_3 обеспечивает существование таких уравнений), функции $\gamma_k(\xi'), k = 1,2$, дважды дифференцируемы по обеим переменным ξ_1, ξ_2; коэффициенты $\alpha_{ij}^{(k)}(x')$ удовлетворяют условию Гельдера в S.

Задача (2.1) – (2.3) сводится к однородному интегральному уравнению (или спектральному уравнению), из которого определяются собственные значения и собственные функции.

3. Необходимые условия

Фундаментальное решение трехмерного уравнения Лапласа имеет вид [11]

$$U(x - \xi) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - \xi|}. \tag{3.1}$$

Умножим уравнение (2.1) на фундаментальное решение (3.1) и проинтегрируем по области D:

$$\int_D \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} U(x-\xi)dx = 0 . \tag{3.2}$$

Интегрируя по частям, получим следующее:

$$\sum_{j=1}^{3} \int_D \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} U(x-\xi)dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_\Gamma \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} U(x-\xi) - u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j} \right) \cos(\nu_x, x_j) dx + \int_D u(x)\delta(x-\xi)dx . \tag{3.3}$$

Так как $U(x-\xi)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, то

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_j^2} = \Delta_x U(x-\xi) = \delta(x-\xi)$$

является функцией Дирака. Учитывая это и подставляя (3.3) в (3.2), получим **первое основное соотношение**:

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} U(x-\xi) - u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x} \right) dx = -\int_D u(x)\delta(x-\xi)dx = \begin{cases} -u(\xi), & \xi \in D, \\ -\frac{1}{2}u(\xi), & \xi \in \Gamma. \end{cases} \tag{3.4}$$

Первое выражение в (3.4) дает представление общего решения уравнения (2.1), второе выражение в (3.4) является **первым необходимым условием.**

Рассмотрим первое необходимое условие ($\xi \in \Gamma$):

$$-\frac{1}{2}u(\xi) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} U(x-\xi) - u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x} \right) dx . \tag{3.5}$$

Так как

$$\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i} = -\frac{x_i - \xi_i}{4\pi |x-\xi|^3} = -\frac{\cos(x-\xi, x_i)}{4\pi |x-\xi|^2} ,$$

то получаем соотношение из (3.5)

$$\frac{1}{2}u(\xi) = -\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma u(x) \frac{\cos(x-\xi, \nu_x)}{|x-\xi|^2} + \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{1}{|x-\xi|} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} dx, \quad \xi \in \Gamma, \tag{3.6}$$

где все подынтегральные выражения имеют слабую особенность, т.е. порядок сингулярности не превышает кратность интеграла.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.1. *Пусть область* $D \subset R^3$ *ограничена и выпукла по направлению* x_3, *ее граница* Γ *– поверхность Ляпунова. Тогда полученное первое необходимое условие (3.6) регулярно*.

Умножая (2.1) на $\dfrac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,3}$, и интегрируя по области D , получим остальные три основных соотношения:

$$\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x}dx+\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}\cos(\nu_x,x_m)-\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_m}\cos(\nu_x,x_i)\right]dx+$$

$$+\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}\cos(\nu_x,x_l)-\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_l}\cos(\nu_x,x_i)\right]dx=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}, & \xi\in D,\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}, & \xi\in\Gamma,\end{cases}\quad i=\overline{1,3}, \tag{3.7}$$

где числа i, m, l образуют перестановку чисел 1,2,3.

Вторые соотношения в (3.7) – остальные три необходимых условия ($\xi\in\Gamma$, $i=\overline{1,3}$):

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}=\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x}dx+$$

$$+\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}\cos(\nu_x,x_m)-\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_m}\cos(\nu_x,x_i)\right]dx+$$

$$+\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}\cos(\nu_x,x_l)-\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_l}\cos(\nu_x,x_i)\right]dx, \tag{3.8}$$

где числа i,m,l образуют перестановку чисел 1,2,3.

Учитывая, что $\dfrac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i}=-\dfrac{x_i-\xi_i}{4\pi|x-\xi|^3}=-\dfrac{\cos(x-\xi,x_i)}{4\pi|x-\xi|^2}$, и вводя обозначение

$$K_{ij}(x,\xi)=\cos(x-\xi,x_i)\cos(\nu_x,x_j)-\cos(x-\xi,x_j)\cos(\nu_x,x_i), \tag{3.9}$$

можем переписать **2-е, 3-е** и **4-е необходимые условия** (3.8) в виде

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i}=\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x}dx-\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\frac{K_{im}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}dx-\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\frac{K_{il}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}dx, \tag{3.10}$$

где числа i,m,l образуют перестановку чисел 1,2,3.

Раскроем первые два поверхностных интеграла в $(i+1)$ -м соотношении (3.10) ($i=1,2,3$) по верхней и нижней полуповерхностям Γ_k , $k=1,2$:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j-1}\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{im}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}\Bigg|_{\substack{x_3=\gamma_j(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j-1}\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{il}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}\Bigg|_{\substack{x_3=\gamma_j(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}dx\ .$$

Выделим только сингулярные слагаемые во втором, третьем и четвертом необходимых соотношениях ($i=\overline{1,3}$) для $k = 1, 2$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=(-1)^k\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{im}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}\Bigg|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+(-1)^k\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{il}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}\Bigg|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots, \qquad (3.11)$$

где многоточие обозначает сумму несингулярных слагаемых.

Введем обозначения:

$$K_{ij}^{(k)}(x',\xi')==K_{ij}(x,\xi)\Bigg|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}},\ k=1,2. \qquad (3.12)$$

Рассмотрим $|x-\xi|^2\Bigg|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}$, k=1,2 :

$$|x-\xi|^2\Bigg|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}=|x'-\xi'|^2+(\gamma_k(x')-\gamma_k(\xi'))^2=|x'-\xi'|^2\left[1+\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_m}\right)^2\cos^2(x'-\xi',x_m)+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_2}\cos(x'-\xi',x_1)\cos(x'-\xi',x_2)+O(|x'-\xi'|)\right]. \qquad (3.13)$$

Введем обозначение

$$P_k(x',\xi')=1+\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_m}\right)^2\cos^2(x'-\xi',x_m)+$$

$$+2\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_2}\cos(x'-\xi',x_1)\cos(x'-\xi',x_2)+O(|x'-\xi'|),$$

откуда можем переписать (3.13) следующим образом:

$$|x-\xi|^2\Bigg|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}=|x'-\xi'|^2\,P_k(x',\xi'). \qquad (3.14)$$

Замечание. Заметим, что для $\xi'=x'$ имеем

$$P_k(x',x')=1+\left(\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_2}\right)^2+2\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_2}\neq 0,\ k=1,2.$$

При помощи обозначений (3.12), (3.14) перепишем необходимые условия (3.11) следующим образом (k=1, 2):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=(-1)^k\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Bigg|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{1}{4\pi|x'-\xi'|^2}\frac{K_{im}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+(-1)^k\int_S \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{1}{4\pi|x'-\xi|'^2}\frac{K_{il}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots, \qquad (3.15)$$

где $i=1,2,3,$ а числа i,l,m образуют перестановку чисел 1,2,3.

Таким образом, нами доказана

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Тогда необходимые условия (3.15) являются сингулярными.*

Чтобы выделить сингулярные члены в подынтегральных выражениях необходимых условий (3.15), сначала разложим все коэффициенты при производных по формуле Тейлора в точке $\xi'=x'$:

$$\frac{K_{ij}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}=\frac{K_{ij}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}+\sum_{p=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{K_{ij}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}\right)(x_p-\xi_p)+\dots\ .$$

Подставляя полученную формулу Тейлора для $\dfrac{K_{ij}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}$ в необходимые условия (3.15) и учитывая, что члены $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{K_{im}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}\right)\dfrac{(x_j-\xi_j)}{4\pi|x'-\xi'|^2}$, $j=1,2$, имеют слабую особенность, выделим только сингулярные члены. Тогда необходимые условия (3.15) примут окончательный вид для регуляризации:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=(-1)^k\int_S\frac{1}{4\pi|x'-\xi'|^2}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_m}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{im}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}+\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{il}^{(k)}(x',x')}{P_k(x',x')}\right]\times$$

$$\times\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\dots,\quad i=1,2,3;\ k=1,2, \tag{3.16}$$

где многоточие обозначает члены со слабой сингулярностью, а числа i, m, l образуют перестановку чисел 1, 2, 3.

4. Регуляризация необходимых условий

Вернемся к первому необходимому условию (3.5) и раскроем каждый поверхностный интеграл по верхней и нижней полуповерхностям $\Gamma_k=\{\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3):\xi_3=\gamma_k(\xi')\}$, $\xi'=(\xi_1,\xi_2)\in S=pr_{\xi_3=0}\Gamma_k$, $k=1,2$:

$$\frac{1}{2}u(\xi)\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=-\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\frac{1}{4\pi}\int_S u(x)\Big|_{x_3=\gamma_i(x')}\frac{\cos(x-\xi,\nu_x)}{|x-\xi|^2}\Bigg|_{\substack{\xi_3=\gamma_k(\xi')\\ x_3=\gamma_i(x')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{1}{|x-\xi|}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu_x}\Bigg|_{\substack{\xi_3=\gamma_k(\xi')\\ x_3=\gamma_i(x')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)},\quad \xi\in\Gamma_k. \tag{4.1}$$

Очевидно, когда $k\neq i$ в (4.1), соответствующий интеграл не является сингулярным. Когда $k=i$ в первой сумме в (4.1), тогда соответствующий интеграл имеет устранимую особенность при $x\to\xi$ и во второй сумме из (4.1) соответствующий интеграл имеет слабую особенность, так как порядок сингулярности меньше порядка кратности интеграла. Поэтому, обозначая несингулярные члены многоточием в (4.1) и учитывая (3.14), получаем первое необходимое условие в виде (для $k = 1, 2$)

$$\frac{1}{2}u(\xi)\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')} = (-1)^{k-1}\frac{1}{4\pi}\int_S u(x)\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{\cos(x-\xi,\nu_x)\Big|_{\substack{\xi_3=\gamma_k(\xi')\\ x_3=\gamma_k(x')}}}{P_k(x',\xi')|x'-\xi'|^2}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+(-1)^k\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{1}{P_k(x',\xi')|x'-\xi'|}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu_x}\Big|_{\substack{\xi_3=\gamma_k(\xi')\\ x_3=\gamma_k(x')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots. \tag{4.2}$$

Теперь построим линейную комбинацию необходимых условий (3.16) ($i = 1, 2, 3$; $k = 1,2$):

$$\sum_{j=1}^{2}\beta_{j3}^{(k)}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\sum_{j=1}^{2}\left[\beta_{j1}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\beta_{j2}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\beta_{j3}^{(k)}(\xi')\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{31}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{32}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right]\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\beta_{j1}^{(k)}(\xi')(-1)^j\left(\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{12}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{13}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right]\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}\right)+\ldots+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\beta_{j2}^{(k)}(\xi')(-1)^j\left(\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{21}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\frac{K_{23}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right]\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}\right)+\ldots. \tag{4.3}$$

Полагая, что функции $\beta_{ji}^{(k)}(\xi')$ удовлетворяют условию Гельдера, и вычитая и прибавляя $\beta_{ji}^{(k)}(x')$ из $\beta_{ji}^{(k)}(\xi')$, получаем слабые сингулярности в интегралах с выражениями $\dfrac{\beta_{ji}^{(k)}(\xi')-\beta_{ji}^{(k)}(x')}{2\pi|x'-\xi'|^2}$. Отбрасывая члены со слабыми сингулярностями и группируя подобные слагаемые, получаем из (4.3) следующее:

$$\sum_{j=1}^{2}\beta_{j3}^{(k)}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\sum_{j=1}^{2}\left[\beta_{j1}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\beta_{j2}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2\cos(\nu_x,x_3)}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\left(\beta_{j3}^{(k)}(x')\frac{K_{31}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j2}^{(k)}(x')\frac{K_{21}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)+\right.$$

$$+\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\left(\beta_{j3}^{(k)}(x')\frac{K_{32}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j1}^{(k)}(x')\frac{K_{12}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)+$$

$$+\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\left(\beta_{j1}^{(k)}(x')\frac{K_{13}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j2}^{(k)}(x')\frac{K_{23}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)\Bigg]dx'+\ldots=$$

$$=\int_S\frac{1}{2\pi|x'-\xi'|^2\cos(\nu_x,x_3)}\times$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\left(\beta_{j3}^{(k)}(x')\frac{K_{31}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j2}^{(k)}(x')\frac{K_{21}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\left(\beta_{j3}^{(k)}(x')\frac{K_{32}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j1}^{(k)}(x')\frac{K_{12}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)+$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}\left(\beta_{j1}^{(k)}(x')\frac{K_{13}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j2}^{(k)}(x')\frac{K_{23}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)\right]dx'+\ldots\ . \tag{4.4}$$

Если мы будем использовать граничные условия (2.2) и приравняем коэффициенты при частных производных $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\Big|_{x_3=\gamma_j(x')}$ в подынтегральном выражении из (4.4) соответствующим коэффициентам в (2.2), то получим 2 системы, каждая из 6 уравнений и с 6 неизвестными ($\beta_{ji}^{(k)}(x'),\ i=1,2,3;\ j=1,2$), $k=1,2$:

$$(-1)^j\left(\beta_{j3}^{(k)}(x')\frac{K_{31}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j2}^{(k)}(x')\frac{K_{21}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)=\alpha_{j1}^{(k)}(x'),$$

$$(-1)^j\left(\beta_{j3}^{(k)}(x')\frac{K_{32}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j1}^{(k)}(x')\frac{K_{12}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)==\alpha_{j2}^{(k)}(x'),$$

$$(-1)^j\left(\beta_{j3}^{(k)}(x')\frac{K_{32}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}+\beta_{j1}^{(k)}(x')\frac{K_{12}^{(j)}(x',x')}{P_j(x',x')}\right)=\delta_{jk},\ k=1,2. \tag{4.5}$$

Положим, что неоднородная система (4.5) имеет единственное решение $\beta_{11}^{(k)}(x')$, $\beta_{12}^{(k)}(x')$, $\beta_{13}^{(k)}(x')$, $\beta_{21}^{(k)}(x'),\beta_{22}^{(k)}(x'),\beta_{23}^{(k)}(x')$ для каждого k=1,2. Тогда, подставляя граничные условия (2.2) в (4.4), получаем

$$\sum_{j=1}^{2}\beta_{j3}^{(k)}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\sum_{j=1}^{2}\left[\beta_{j1}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\beta_{j2}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}\right]=$$

$$=-\int_S\frac{\lambda u(x',\gamma_k(x'))}{2\pi|x'-\xi'|^2}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots\ . \tag{4.6}$$

Подставляя первое необходимое условие (4.2) в (4.6) и изменяя порядок интегрирования, получаем **два регулярных соотношения** для k = 1,2:

$$\sum_{j=1}^{2}\beta_{j3}^{(k)}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\sum_{j=1}^{2}\left[\beta_{j1}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_1}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\beta_{j2}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}\right]=$$

$$=\lambda\int_S\frac{u(\eta',\gamma_k(\eta'))d\eta'}{2\pi\cos(\nu_\eta,\eta_3)}\int_S\frac{1}{2\pi|\eta'-x'|^2|x'-\xi'|^2}\frac{\cos(\eta-x,\nu_\eta)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \eta_3=\gamma_k(\eta')}}}{P_k(\eta',x')}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}-$$

$$-\lambda\int_S\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{\partial u(\eta)}{\partial\eta_j}\cos(\nu_\eta,\eta_j)\right]\Big|_{\eta_3=\gamma_k(\eta')}\frac{d\eta'}{\cos(\nu_\eta,\eta_3)}\times$$

$$\times\int_S\frac{1}{2\pi P_k(\eta',x')|x'-\xi'|^2|\eta'-x'|}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\dots. \tag{4.7}$$

Внутренние интегралы в правой части (4.7) являются сингулярными, но они не содержат неизвестной функции $u(\xi)=u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ и сходятся в смысле Коши. Поэтому регуляризируем соотношения (4.7) и таким образом устанавливаем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Если система (4.5) имеет единственное решение* $\beta_{11}^{(k)}(x'),\beta_{12}^{(k)}(x'),\beta_{13}^{(k)}(x')$, $\beta_{21}^{(k)}(x'),\beta_{22}^{(k)}(x'),\beta_{23}^{(k)}(x')$ *для каждого* $k=1,2$ *и функции* $\beta_{ji}^{(k)}(\xi')$ *удовлетворяют свойству Гельдера, то соотношения (4.7) являются регулярными.*

5. Фредгольмовость задачи

Из курса математического анализа известны формулы

$$\frac{\partial u(x',\gamma_k(x'))}{\partial x_j}=\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}+\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_j},\quad j=1,2;\ k=1,2;\ x'\in S,$$

откуда имеем

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}=\frac{\partial u(x',\gamma_k(x'))}{\partial x_j}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{\partial\gamma_k(x')}{\partial x_j}. \tag{5.1}$$

$$j=1,2;\ k=1,2;\ x'\in S.$$

Подставим соотношения из (5.1) в левые части (4.7):

$$\sum_{j=1}^{2}\beta_{j3}^{(k)}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}+\sum_{j=1}^{2}\left[\beta_{j1}^{(k)}(\xi')\left(\frac{\partial u(\xi',\gamma_j(\xi'))}{\partial\xi_1}-\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}\frac{\partial\gamma_j(\xi')}{\partial\xi_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\beta_{j2}^{(k)}(\xi')\left(\frac{\partial u(\xi',\gamma_j(\xi'))}{\partial\xi_2}-\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}\frac{\partial\gamma_j(\xi')}{\partial\xi_2}\right)\right]=$$

$$=\lambda\int_S\frac{u(\eta',\gamma_k(\eta'))d\eta'}{2\pi\cos(\nu_\eta,\eta_3)}\int_S\frac{1}{2\pi|\eta'-x'|^2|x'-\xi'|^2}\frac{\cos(\eta-x,\nu_\eta)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \eta_3=\gamma_k(\eta')}}}{P_k(\eta',x')}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}-$$

$$-\lambda\int_S\left[\frac{\partial u(\eta)}{\partial\eta_3}+\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial u(\eta',\gamma_k(\eta'))}{\partial\eta_j}-\frac{\partial u(\eta)}{\partial\eta_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{\partial\gamma_k(\eta')}{\partial\eta_j}\right)\right]\cos(\nu_\eta,\eta_3)\Big|_{\eta_3=\gamma_k(\eta')}\times$$

$$\times\frac{d\eta'}{\cos(\nu_\eta,\eta_3)}\int_S\frac{1}{2\pi P_k(\eta',x')|x'-\xi'|^2|\eta'-x'|}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots\ . \qquad (5.2)$$

После группировки в (5.2), получим следующую систему интегродифференциальных уравнений по отношению к неизвестным $\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}$, $j=1,2$:

$$A_{k1}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_1(\xi')}+A_{k2}(\xi')\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_2(\xi')}=F_k(\xi'),\ k=1,2, \qquad (5.3)$$

где
$$A_{kj}(\xi')=\left(\beta_{j3}^{(k)}(\xi')-\beta_{j1}^{(k)}(\xi')\frac{\partial\gamma_j(\xi')}{\partial\xi_1}-\beta_{j2}^{(k)}(\xi')\frac{\partial\gamma_j(\xi')}{\partial\xi_2}\right), \qquad (5.4)$$

$$F_k(\xi')=-\sum_{j=1}^{2}\left(\beta_{j1}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi',\gamma_j(\xi'))}{\partial\xi_1}+\beta_{j2}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u(\xi',\gamma_j(\xi'))}{\partial\xi_2}\right)+$$

$$+(-1)^k\lambda\int_S\frac{u(\eta',\gamma_k(\eta'))d\eta'}{2\pi\cos(\nu_\eta,\eta_3)}\int_S\frac{1}{2\pi|\eta'-x'|^2|x'-\xi'|^2}\frac{\cos(\eta-x,\nu_\eta)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \eta_3=\gamma_k(\eta')}}}{P_k(\eta',x')}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}-$$

$$-\lambda\int_S\left[\frac{\partial u(\eta)}{\partial\eta_3}+\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial u(\eta',\gamma_k(\eta'))}{\partial\eta_j}-\frac{\partial u(\eta)}{\partial\eta_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{\partial\gamma_k(\eta')}{\partial\eta_j}\right)\right]\cos(\nu_\eta,\eta_3)\Big|_{\eta_3=\gamma_k(\eta')}\times$$

$$\times\frac{d\eta'}{\cos(\nu_\eta,\eta_3)}\int_S\frac{1}{2\pi P_k(\eta',x')|x'-\xi'|^2|\eta'-x'|}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots\ .$$

$$F_k=F_k\left(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2},\frac{\partial u}{\partial x_3}\Big|_{\Gamma_1},\frac{\partial u}{\partial x_3}\Big|_{\Gamma_2}\right), \qquad (5.5)$$

т.е. правые части (5.5) системы (5.3) – функции восьми неизвестных: граничных значений неизвестной функции $u(x',\gamma_k(x'))=u\big|_{\Gamma_k}$, $k=1,2$, их производных $\frac{\partial u\big|_{\Gamma_k}}{\partial x_j}$ (k,j=1,2) и граничных значений производной $\frac{\partial u}{\partial x_3}\Big|_{\Gamma_k}$,$k=1,2$.

Итак, из регуляризированных необходимых условий (4.7) получили систему (5.3) интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно $\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}$, $j=1,2$.

Теперь оставим систему (5.3) на время и рассмотрим граничные условия (2.2). Подставим выражения (5.1) для $\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$ и $\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$ в (2.2), $k=1,\ 2$, откуда получим систему по отношению к двум неизвестным $\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_1(x')}$ и $\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_2(x')}$:

$$\left(-\sum_{j=1}^{3}\alpha_{j1}^{(2)}(x')\frac{\partial\gamma_1(x')}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_1(x')}+\left(1-\sum_{j=1}^{3}\alpha_{j2}^{(2)}(x')\frac{\partial\gamma_2(x')}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_2(x')}=$$

$$=\lambda u(x',\gamma_2(x'))-\sum_{j=1}^{3}\left(\alpha_{j1}^{(2)}(x')\frac{\partial u(x',\gamma_1(x'))}{\partial x_j}+\alpha_{j2}^{(2)}(x')\frac{\partial u(x',\gamma_2(x'))}{\partial x_j}\right). \qquad (5.6)$$

Введем обозначения при $i,k=1,2$:

$$C_{ik}(x')=\left(0.5[1-(-1)^k]-\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ji}^{(k)}(x')\frac{\partial\gamma_i(x')}{\partial x_j}\right),$$

$$B_i(x')=\lambda u(x',\gamma_i(x'))-\sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_{ij}^{(1)}(x')\frac{\partial u(x',\gamma_1(x'))}{\partial x_j}+\alpha_{ij}^{(2)}(x')\frac{\partial u(x',\gamma_2(x'))}{\partial x_j}\right].$$

Тогда система (5.6) будет переписана в виде

$$C_{i1}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_1(x')}+C_{i2}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_2(x')}=B_i(x'),\ i=1,2. \qquad (5.7)$$

Потребуем, чтобы определитель неоднородной линейной системы (5.7) удовлетворял условию

$$\Delta(x')=\begin{vmatrix}C_{11}(x') & C_{12}(x')\\ C_{21}(x') & C_{22}(x')\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (5.8)$$

Если коэффициенты $\alpha_{ij}^{(k)}(x'), i,j,k=1,2$, и граничные уравнения $\gamma_1(x')$ и $\gamma_2(x')$ удовлетворяют условию (5.8), то по формуле Крамера имеем

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_1(x')}=\frac{1}{\Delta(x')}\begin{vmatrix}B_1(x') & C_{12}(x')\\ B_2(x') & C_{22}(x')\end{vmatrix},$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_2(x')}=\frac{1}{\Delta(x')}\begin{vmatrix}C_{11}(x') & B_1(x')\\ C_{21}(x') & B_2(x')\end{vmatrix}. \qquad (5.9)$$

Так как определитель $\Delta(x')$ не зависит от неизвестной $u(x)$ и ее производных, то решение (5.9) линейной системы (5.7) имеет вид линейного функционала

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}=\Phi_k\left(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}\right),\ k=1,2. \qquad (5.10)$$

Теперь подставим выражения (5.10) для $\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$, $k=1,2$, в систему (5.3):

$$\sum_{i=1}^{2}A_{kj}\Phi_j\left(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}\right)=$$

$$=F_k\left(u\big|_{\Gamma_1},u\big|_{\Gamma_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1},\frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2},\Phi_1,\Phi_2\right),\ k=1,2. \qquad (5.11)$$

Учитывая, что $\Phi_k = \Phi_k(u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}), k=1,2$, в правой части (5.11) получим новые линейные функционалы Ω_k, $k = 1, 2$, только граничных значений неизвестной $u(x)$ и производных граничных значений $\frac{\partial u(x', \gamma_k(x'))}{\partial x_i}$ $(k, i = 1,2)$:

$$F_k(u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}, \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= \Omega_k(u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}),$$

откуда и из (5.11) имеем систему:

$$\sum_{i=1}^{2} A_{kj}\Phi_j(u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}) =$$
$$= \Omega_k(u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial x_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial x_2}), \ k=1,2. \tag{5.12}$$

Так как функционалы Φ_k, Ψ_k, $k = 1,2$, линейны по отношению к неизвестным $u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial \xi_j}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial \xi_j}, \ j=1,2$:

$$\Phi_k(u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial \xi_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial \xi_2}) = \sum_{i=1}^{2} a_i^{(k)}(\xi')u\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u\big|_{\Gamma_i}}{\partial \xi_j} +$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int_S c_i^{(k)}(\zeta')u\big|_{\Gamma_i}\,d\zeta + \sum_{i,j=1}^{2}\int_S d_{ij}^{(k)}(\zeta')\frac{\partial u\big|_{\Gamma_i}}{\partial \zeta_j}d\zeta + \varphi_k(\xi'), \ k=1,2, \tag{5.13}$$

$$\Psi_k(u\big|_{\Gamma_1}, u\big|_{\Gamma_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_1}}{\partial \xi_2}, \frac{\partial u\big|_{\Gamma_2}}{\partial \xi_2}) = \sum_{i=1}^{2} a_i^{(l)}(\xi')u\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(l)}(\xi')\frac{\partial u\big|_{\Gamma_i}}{\partial \xi_j} +$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int_S c_i^{(l)}(\zeta')u\big|_{\Gamma_i}\,d\zeta + \sum_{i,j=1}^{2}\int_S d_{ij}^{(l)}(\zeta')\frac{\partial u\big|_{\Gamma_i}}{\partial \zeta_j}d\zeta + \varphi_l(\xi'), \ l=3,4;\ k=1,2, \tag{5.14}$$

то, учитывая (5.13) и ((5.14) в (5.12), получаем систему линейных интегро-дифференциальных уравнений по отношению к неизвестным $u(\xi', \gamma_k(\xi'))$, $k=1,2$, в двумерной области *S*:

$$\sum_{i=1}^{2} A_i^{(k)}(\xi')u\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i,j=1}^{2} B_{ij}^{(k)}(\xi')\frac{\partial u\big|_{\Gamma_i}}{\partial \xi_j} + \sum_{i=1}^{2}\int_S C_i^{(k)}(\zeta')u\big|_{\Gamma_i}\,d\zeta +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{2}\int_S D_{ij}^{(k)}(\zeta')\frac{\partial u\big|_{\Gamma_i}}{\partial \zeta_j}d\zeta + g_k(\xi') = 0, \ \ k=1,2, \tag{5.15}$$

где $A_i^{(k)}(\xi') = a_i^{(k)}(\xi') - a_i^{(k+2)}(\xi'),\ \ B_{ij}^{(k)}(\xi') = b_{ij}^{(k)}(\xi') - b_{ij}^{(k+2)}(\xi')$,

$$C_i^{(k)}(\zeta') = c_i^{(k)}(\zeta') - c_i^{(k+2)}(\zeta'),\ D_{ij}^{(k)}(\zeta') = d_{ij}^{(k)}(\zeta') - d_{ij}^{(k+2)}(\zeta')\ ,$$

$$g_k(\xi') = \varphi_k(\xi') - \varphi_{k+2}(\xi'),\ k = 1,\ 2\ ,$$

которую при помощи граничного условия Дирихле (2.3) на границе $L = \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2$ легко можно свести к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода с регулярным ядром. В силу одномерности этой границы это условие Дирихле не ограничивает общности, так как его размерность на две единицы меньше размерности области D.

Таким образом нами установлена

Теорема 5.1. *Если выполняются условия теоремы* 4.1 *и условие* (5.8) , *то граничная задача* (2.1) – (2.3) сводится к *двумерной системе линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно граничных значений* $u(\xi', \gamma_k(\xi')),\ k = 1, 2$, *решения исходной задачи.*

Возвращаясь назад, вспомним, что из регуляризированных необходимых условий (4.7) получили систему (5.3) интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно $\left.\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_3}\right|_{\xi_3=\gamma_j(\xi')}$, $j = 1, 2$. Учитывая также, что относительно граничных значений неизвестной функции также получена система (5.15) интегральных уравнений Фредгольма второго рода с регулярным ядром, приходим к следующему утверждению.

Теорема 5.2. *Если выполняются условия теоремы* 5.1, *то задача* (2.1) – (2.3) *является фредгольмовой в классе функций* $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алиев Н.А.*, *Зейналов Р.М.* Фредгольмовость задачи Стеклова с условием Лаврентьева – Бицадзе для уравнения Коши – Римана // Вестник Педагогического университета, Баку. 2012. № 1. С. 16–19 (на азербайджанском).
2. *Алиев Н.А.*, *Зейналов Р.М.* Исследование решения задачи Стеклова для уравнения Коши – Римана с глобальными членами в краевых условиях // Труды Азербайджанской Национальной Академии наук, сер. физ.-тех. и мат. наук. 2010. Т. XXX. № 3. С. 75–79 (на азербайджанском).
3. *Алиев Н.А.*, *Зейналов Р.М.* Задача Стеклова для уравнения первого порядка эллиптического типа // Вестник Бакинского государственного университета, сер. физ.-мат. наук. 2012. № 2. С. 12–20 (на азербайджанском).
4. *Алиев Н.А.*, *Зейналов Р.М.* Задача Стеклова для уравнения Лапласа в одной неограниченной области // Труды Научной конференции «Современные проблемы математики, информатики и экономики», 24 ноября 2010. С. 199–202 (на азербайджанском).
5. *Алиев Н.А.*, *Зейналов Р.М.* Задача Заремба – Стеклова для уравнения Лапласа // Научная конференция «Актуальные проблемы математики и механики» для студентов, магистрантов и молодых исследователей Азербайджанской Республики, Баку, 30–31 мая 2012. С. 37–38 (на азербайджанском).
6. *Алиев Н.А.*, *Аббасова А.Х. и Зейналов Р.М.* Нелокальные граничные условия задачи Стеклова для уравнения Лапласа в ограниченной области // Прикладная математика и статистика. 2013. № 1. С. 1–6. DOI: 10.11648/j.sjams.20130101.11.
7. *Алиев Н.А.*, *Сулейманов Н.С.* Исследование решения краевых задач, содержащих параметр в граничном условии // Численные методы краевых задач: сб. трудов. Баку: Изд-во Азерб. гос. ун-та, 1989. С. 3–12.

8. *Алиев Н.А., Сулейманов Н.С.* Исследование решения задачи Стеклова в ограниченной простой области с общими линейными нелокальными граничными условиями. Баку, 1989. Депон. рук. № 1223Az, 30 с.
9. *Aliyev N.A. and Hosseini S.M.* A regularization of Fredholm type singular integral equations // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2001. V. 26. No. 2. P. 123–128.
10. *Aliyev N.A. and Hosseini S.M.* Multidimensional singular Fredholm integral equations in a finite domain and their regularization // Southeast Asian Bulletin Mathematics. 2003. V. 27. No. 3. P. 395–408.
11. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Мир, 1981. – 512 с.

Статья поступила 15.03.2016 г.

Mustafayeva Y.Y., Aliyev N.A. ON A METHOD OF INVESTIGATING THE STEKLOV PROBLEM FOR THE 3-DIMENSIONAL LAPLACE EQUATION WITH NON-LOCAL BOUNDARY-VALUE CONDITIONS *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(44). pp. 19–33

DOI 10.17223/19988621/44/2

The three-dimensional Laplace equation is considered in a domain $D \subset R^3$, convex in the direction Ox_3:

$$Lu = \Delta u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} = 0, \tag{1}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in D,$$

with a parameter λ under nonlocal homogeneous boundary conditions:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')} + \sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_{j1}^{(k)}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \alpha_{j2}^{(k)}(x')\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right]\Big|_{x_3=\gamma_j(x')} =$$

$$= \lambda u(x', \gamma_k(x')), \quad x' \in S,\ k = 1,2, \tag{2}$$

$$u(x) = f_0(x), \quad x \in L = \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2 = \partial S\,. \tag{3}$$

where Γ_1 and Γ_2 are the lower and upper half surfaces of the boundary Γ, respectively; the equations of half surfaces Γ_1 and Γ_2 $\gamma_k(\xi'), k = 1,2$, are twice differentiable with respect to both the variables ξ_1, ξ_2; S is the projection of the domain D on the plane $Ox_1x_2 = Ox'$; the coefficients $\alpha_{jk}^{(i)}(x') \in C(S)$, $i, j, k = 1,2$, satisfy Hölder's condition in S; the boundary $\Gamma = \partial D$ is a Lyapunov surface, $\lambda \in C$ is a complex-valued parameter; and L is the equator connecting the half-surfaces Γ_1 and Γ_2: $L = \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2$.

The presented work is devoted to the study and proof of the Fredholm property for the solution of the Steklov boundary value problem for the three-dimensional Laplace equation in a bounded domain with non-local boundary conditions where the spectral parameter appears only in the boundary condition. The applied method is new and relies on necessary conditions derived from basic relations. These relations are obtained from the second Green's formula and from an analogue of this formula. The proposed scheme was applied to a variety of problems for partial differential equations in the two-dimensional case. However, the singularities entering the necessary conditions for three-dimensional problems are multi-dimensional; for this reason, their regularization is a difficulty which is overcome by using the proposed method.

Keywords: Steklov problem, spectral problem, three-dimensional Laplace equation, nonlocal boundary conditions, necessary conditions, singularity, regularization, Fredholm property.

MUSTAFAYEVA Yelena Y. (Candidate of Physics and Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan)
E-mail: helenmust@rambler.ru

ALIEV Nehan Ali. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Informational Technologies Institute of Baku State University, Baku, Azerbaijan)
E-mail: nihan@aliev.info

REFERENCES

1. Aliyev N.A., Zeynalov R.M. (2012) Fredholm property of the Steklov problem for the Cauchy–Rienman equation with the Lavrentyev–Bitsadze condition. *News of Pedagogical University*, *Baku*. 1. pp. 16–19 (in Azeri).
2. Aliyev N.A., Zeynalov R.M. (2010) Investigation of the Solution of the Steklov Problem for the Cauchy–Riemann Equation under the Boundary Condition Containing s Global Term. *Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical sciences: Informatics and Control Problems*. XXX(3). pp. 75–80 (in Azeri).
3. Aliyev N.A., Zeynalov R.M. (2012) The Steklov problem for the first order elliptic type equation. *News of Baku State University*, *ser. of phys.-math*. 2. pp. 12–20 (in Azeri).
4. Aliyev N.A., Zeynalov R.M. (2010) Steklov problem for the Laplace equation in an unbounded domain. *Proceedings of Scientific Conference "Contemporary problems of mathematics*, *informatics*, *and economics"*. pp. 199–202 (in Azeri).
5. Aliyev N.A., Zeynalov R.M. (2012) The Zaremba–Steklov problem for the Laplace equation. *Proceedings of Scientific Conference on Actual Problems of Mathematics and Mechanics*, Baku, Azerbaijan. pp. 37–38 (in Azeri).
6. Aliev Nehan Ali, Abbasova Aygun Khanlar, Zeynalov Ramin M. (2013) Non-local boundary condition Steklov problem for a Laplace equation in bounded domain. *Science Journal of Applied Mathematics and Statistics*. 1(1). pp. 1–6. DOI: 10.11648/j.sjams. 20130101.11.
7. Aliyev N.A., Suleymanov N.S. **(**1989) Investigation of the solution of boundary value problems containing a parameter in the boundary condition. *Numerical methods for solving boundary value problems. Proceedings of Azerbaijan State University (ASU)*. pp. 3–12 (in Russian).
8. Aliyev N.A., Suleymanov N.S. **(**1989) Investigation of the solution of the Stecklov-type problem in a plane field with general linear non-local boundary conditions. Baku, *Deposited manuscript N 1223Az*, 30 p. (in Russian).
9. Aliyev N.A. and Hosseini S.M. (2001) A regularization of Fredholm type singular integral equations. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 26(2). pp. 123–128.
10. Aliyev N.A. and Hosseini S.M. (2003) Multidimensional singular Fredholm integral equations in a finite domain and their regularization. *Southeast Asian Bulletin Mathematics*. 27(3). pp. 395–408.
11. Vladimirov V.S. (1981) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow: Mir (in Russian).