

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2017

№ 39

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,
Высшей аттестационной комиссии

Founder – Tomsk State University

EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Operation Research Department, Dean of the Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics Tomsk State University. Tel: +72822529599

Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +72822529599

Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Cand. of Sc., Docent of the Operation Research Department.
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Sc., Prof. of the Higher Mathematics and Mathematical Modeling Department Tomsk State University

Vladimir Vishnevsky – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).

Gennady Koshkin – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Cybernetics Department Tomsk State University

Yury Kostyuk – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Department Tomsk State University

Anjela Matrosova – Doctor of Sc., Prof., Head of the Programming Department Tomsk State University

Anatoly Nazarov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University

Konstantin Samouylov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)

Eugene Semenko – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State Aerospace University (Krasnoyarsk, Russia)

Sergey Sushchenko – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Information Department, Dean of the Faculty of Informatics Tomsk State University

Mais Farkhadov – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).

Gurami Tsitsishvili – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)

Editorial address:

Faculty of applied mathematics and cybernetics
National Research Tomsk State University
36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050
Telephone / fax: +72822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli
PhD, Prof.

University VII
Paris, France

Vladimir Dombrovskii
Doctor of Sc., Prof.
Tomsk State University
Russia

Alexander Dudin
Doctor of Sc., Prof.
Belarusian State University
Minsk, Republic Belorussia

Enco Orzinger
PhD, Prof.
University of Rome
Italy

Paolo Prinetto
Prof.
Politechnic Institute
Torino, Italy

Gilbert Saporta
PhD, Prof.

Pierre and Marie Curie
University, Paris, France

Raimund Ubar
Doctor of Sc., Prof.
University of Technology
Tallinn, Estonia

Reindert Nobel
Doctor of Sc., Associate Prof.
Vrije University of Amsterdam
Netherlands

Nina Yevtushenko
Doctor of Sc., Prof.
Tomsk State University
Russia
Yervant Zorian
PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA

JOURNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- control of dynamical systems,
- mathematical modeling,
- data processing,
- informatics and programming,
- discrete function and automation,
- designing and diagnostics of computer systems.

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

Учредитель – Томский государственный университет

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой исследования операций, декан факультета прикладной математики и кибернетики ТГУ. Тел. +72822529599

Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ. Тел. +72822529599

Нежельская Людмила Алексеевна – ответственный секретарь, доц., канд. техн. наук, доц. кафедры исследования операций ТГУ.
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики и математического моделирования ТГУ

Вишневский Владимир Миронович – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва).

Кошкин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры теоретической кибернетики ТГУ

Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ

Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой программирования ТГУ

Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики ТГУ

Самуйлов Константин Евгеньевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (г. Москва)

Семенкин Евгений Станиславович – проф., д.т.н., проф. каф. системного анализа и исследования операций, СГАУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)

Сусенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики, декан факультета информатики ТГУ

Фархадов Манс Паша Оглы – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)

Цициашвили Гурами Шалвович – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36

Национальный исследовательский Томский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики

Телефон / факс: +72822529599

E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Ковали
д-р философии, проф.

Университет VII,
Париж, Франция

Владимир Домбровский
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Александр Дудин
д-р физ.-мат. наук, проф.
БГУ, Минск,
Республика Беларусь

Енцо Орзингер
д-р философии, проф.
Римский университет,
Италия

Паоло Принетто
проф.
Политехнический институт,
Турин, Италия

Жильберт Сапорта

д-р философии, проф.
Университет им. Пьера и Марии,
Кюри, Париж, Франция

Раймонд Убар
проф.
Технологический университет,
Таллинн, Эстония

Рейндерт Нобель
д-р, доцент
Свободный университет,
Амстердам, Нидерланды

Нина Евтушенко
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Ервант Зориан
д-р философии, гл. науч. сотр.
фирмы «Синописис», США

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке

Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- управление динамическими системами,
- математическое моделирование,
- обработка информации,
- информатика и программирование,
- дискретные функции и автоматы,
- проектирование и диагностика вычислительных систем.

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

СОДЕРЖАНИЕ

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Агамалиева А.И., Мансимов К.Б. Об одной задаче управления, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений	4
Домбровский В.В., Обедко Т.Ю., Самородова М.В. Прогнозирующее управление с замкнутой обратной связью дискретными системами со случайными коррелированными параметрами	11

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Бураков Д.П., Гарина М.И. Алгоритмические аспекты исследования структуры предпочтений ЛПП с использованием типовых обобщающих функций	17
Лившиц К.И., Назаров А.А. Простая аппроксимация вероятности разорения страховой компании для модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями	22
Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П. Асимптотический анализ немарковской бесконечнолинейной системы обслуживания требований случайного объема с входящим рекуррентным потоком	30
Медведев Г.А. Полиномиальные модели временной структуры доходности	39
Микшина В.С., Павлов С.И. Использование логистической регрессии при выборе способа кардиоплегии	49
Rouban A.I. The sensitivity functionals in the Bolt's problem for multivariate dynamic systems described by ordinary integro-differential equations	57
Тырсин А.Н., Сурина А.А. Моделирование риска в многомерных стохастических системах	65

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Аненков А.Д., Пазников А.А. Алгоритмы оптимизации масштабируемого потокобезопасного пула на основе распределяющих деревьев для многоядерных вычислительных систем	73
---	----

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Matrosova A., Mitrofanov E., Shah T. Simplification of fully delay testable combinational circuits and finding of PDF test pairs	85
Сведения об авторах	94

CONTENTS

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Aqamaliyeva A.I., Mansimov K.B. About one control problem described by system of integro-differential equations	4
Dombrovskii V.V., Obedko T.Y., Samorodova M.V. The closed-loop optimal feedback model predictive control policy for systems with stochastic correlated parameters	11

DATA PROCESSING

Burakov D.P., Garina M.I. Algorithmic aspects to analysis of decision maker's preferences structure with standard aggregative functions	17
Livshits K.I., Nazarov A.A. Simple approximation of an insurance company ruin probability for cramer-lundberg model with stochastic premiums	22
Lisovskaya E.Yu., Moiseeva S.P. Asymptotical analysis of a non-Markovian queueing system with renewal input process and random capacity of customers	30
Medvedev G.A. Polynomial models of yield term structure	39
Mikshina V. S., Pavlov S.I. The use of logistic regression in choosing method of cardioplegia	49
Rouban A.I. The sensitivity functionals in the Bolt's problem for multivariate dynamic systems described by ordinary integro-differential equations	57
Tyrsin A.N., Surina A.A. Modeling of risk in multidimensional stochastic systems	65

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Anenkov A.D., Paznikov A.A. Algorithms of optimization of scalable thread-safe pool based on diffracting trees for multicore computing systems	73
--	----

DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS

Matrosova A., Mitrofanov E., Shah T. Simplification of fully delay testable combinational circuits and finding of PDF test pairs	85
Brief information about the authors	94

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 517.977.56

DOI: 10.17223/19988605/39/1

А.И. Агамалиева, К.Б. Мансимов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМОЙ СИСТЕМОЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается граничная задача оптимального управления для системы интегро-дифференциальных уравнений. Получены необходимые условия оптимальности.

Ключевые слова: необходимое условие оптимальности; интегро-дифференциальное уравнение, принцип максимума Понтрягина; линеаризованное условие максимума.

В работах [1–3 и др.] изучен ряд задач оптимального управления динамикой популяции, описываемых определенным классом интегро-дифференциальных уравнений. Установлены необходимые условия оптимальности в форме вариационного принципа максимума, а также линеаризованного условия максимума при предположении, что управляющая функция входит в правую часть уравнения состояния.

В предлагаемой работе изучается аналогичная задача при предположении, что вектор управляющих воздействий входит в начальное условие уравнения. Получен ряд необходимых условий оптимальности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме терминального типа функционала

$$S(v) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, z(t_1, x)) dx \quad (1)$$

при ограничениях

$$z_t = f(t, x, z, y), \quad (t, x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1], \quad (2)$$

$$y(t, x) = \int_{x_0}^{x_1} g(t, x, s, z(t, s)) ds, \quad x \in [x_0, x_1], \quad z(t_0, x) = \int_{x_0}^x F(x, s, z(t_0, s), v(s)) ds. \quad (3)$$

Здесь $f(t, x, z, y)$, $g(t, x, s, z)$ – заданные n - и m -мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по векторам состояния, $F(x, z, v)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z , t_0 , t_1 , x_0 , x_1 ($t_0 < t_1$; $x_0 < x_1$) – заданы; $\varphi(x, z)$ – заданная скалярная функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с $\frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z}$, а $v = v(x)$ – кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $V \subset R^r$, т.е.

$$v(x) \in V \subset R^r, \quad x \in [x_0, x_1]. \quad (4)$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $v(x)$ соответствует единственное решение $(z(t_0, x), z(t, x), y(t, x))$ (в классическом смысле) задачи (2)–(3).

Допустимое управление $v(x)$, доставляющее минимум функционалу (1) при ограничениях (2)–(4), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(z(t_0, x), z(t, x), y(t, x))$ – оптимальным процессом.

2. Формула приращения функционала качества

Предположим, что $(v(x), z(t_0, x), z(t, x), y(t, x))$ есть фиксированный допустимый процесс. Через $(\bar{v}(x) = v(x) + \Delta v(x), \bar{z}(t_0, x) = z(t_0, x) + \Delta z(t_0, x), \bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x), \bar{y}(t, x) = y(t, x) + \Delta y(t, x))$ обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение

$$\Delta J(v) = J(\bar{v}) - J(v) = \int_{x_0}^{x_1} (\varphi(x, \bar{z}(t_1, x)) - \varphi(x, z(t_1, x))) dx \quad (5)$$

функционала качества (1).

При этом ясно, что приращение $(\Delta z(t_0, x), \Delta z(t, x), \Delta y(t, x))$ состояния $(z(t_0, x), z(t, x), y(t, x))$ будет решением системы

$$\Delta z_t(t, x) = f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x)) - f(t, x, z(t, x), y(t, x)), \quad (6)$$

$$\Delta z(t_0, x) = \int_{x_0}^x [F(x, s, \bar{z}(t_0, s), \bar{v}(s)) - F(x, s, z(t_0, s), v(s))] ds, \quad (7)$$

$$\Delta y(t, x) = \int_{x_0}^{x_1} [g(t, x, s, \bar{z}(t, s)) - g(t, x, s, z(t, s), v(s))] ds. \quad (8)$$

Пусть $p(t, x), \psi(x), q(t, x)$ – пока неизвестные n -мерные вектор-функции.

Из (6)–(8) следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^x p'(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^x p'(t, x) [f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x)) - f(t, x, z(t, x), y(t, x))] dx dt, \quad (9)$$

$$\int_{x_0}^x \psi'(x) \Delta z(t_0, x) dx = \int_{x_0}^x \psi'(x) \left[\int_{x_0}^x F(x, s, \bar{z}(t_0, s), \bar{v}(s)) - F(x, s, z(t_0, s), v(s)) ds \right] dx, \quad (10)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^x q'(t, x) \Delta y(t, x) dx = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^x q'(t, x) \left\{ \int_{x_0}^{x_1} [g(t, x, s, \bar{z}(t, s)) - g(t, x, s, z(t, s), v(s))] ds \right\} dx dt. \quad (11)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} p'(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt &= \int_{x_0}^{x_1} [p'(t_1, x) \Delta z(t_1, x) - p'(t_0, x) \Delta z(t_0, x)] dx - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} p'_t(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее введем функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) = p'(t, x) f(t, x, z(t, x), y(t, x)) + \int_{x_0}^{x_1} q'(t, s) g(t, s, x, z(t, x)) ds.$$

С учетом (9)–(12) формула приращения (5) записывается в виде

$$\begin{aligned}
\Delta J(v) = & \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \varphi'(x, z(t_1, x))}{\partial z} \Delta z(t_1, x) dx + \int_{x_0}^{x_1} o_1(\|\Delta z(t_1, x)\|) dx + \int_{x_0}^{x_1} p'(t_1, x) \Delta z(t_1, x) dx - \\
& - \int_{x_0}^{x_1} p'(t_0, x) \Delta z(t_0, x) dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} p'_t(t, x) \Delta z(t, x) dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} q'(t, x) \Delta y(t, x) dx dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x), p(t, x), q(t, x)) - H(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x))] dx dt + \\
& + \int_{x_0}^{x_1} \psi'(x) \Delta z(t_0, x) dx - \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_x^{x_1} \psi'(s) [F(s, x, \bar{z}(t_0, x), \bar{v}(x)) - F(s, x, z(t_0, x), v(x))] ds \right] dx.
\end{aligned} \tag{13}$$

Положим

$$M(x, z(t_0, x), \psi(x), v(x)) = \int_x^{x_1} \psi'(s) F(s, x, z(t_0, x), v(x)) ds.$$

Используя формулу Тейлора из (13), будем иметь

$$\begin{aligned}
\Delta J(v) = & \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \varphi'(x, z(t_1, x))}{\partial z} \Delta z(t_1, x) dx + \int_{x_0}^{x_1} p'(t_1, x) \Delta z(t_1, x) dx - \int_{x_0}^{x_1} p'(t_0, x) \Delta z(t_0, x) dx - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} p'_t(t, x) \Delta z(t, x) dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} q'(t, x) \Delta y(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_z(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) \times \\
& \times \Delta z(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_y(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) \Delta y(t, x) dx dt + \\
& + \int_{x_0}^{x_1} \psi'(x) \Delta z(t_0, x) dx - \int_{x_0}^{x_1} [M(x, z(t_0, x), \bar{v}(x), \psi(x)) - M(x, z(t_0, x), v(x), \psi(x))] dx - \\
& - \int_{x_0}^x M'_z(x, z^0(t_0, x), v(x), \psi(x)) \Delta z(t, x) dx + \int_{x_0}^{x_1} o_1(\|\Delta z(t_1, x)\|) dx - \int_{x_0}^{x_1} o_3(\|\Delta z(t_0, x)\|) dx - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_x^{x_1} o_2(\|\Delta z(t, x)\|) dx + \|\Delta y(t, x)\| dx dt.
\end{aligned} \tag{14}$$

Если предполагать, что $p(t, x), q(t, x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
p_t(t, x) &= -H_z(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)), \\
p(t_1, x) &= -\varphi_z(x, z(t_1, x)), \\
q(t, x) &= -H_y(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)), \\
\psi(x) &= M_z(x, z(t_0, x), v(x), \psi(x)) + p(t_0, x),
\end{aligned}$$

то формула приращения (14) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta J(v) = & - \int_{x_0}^{x_1} \left[M(x, z(t_0, x), \bar{v}(x), \psi(x)) - M(x, z(t_0, x), v(x), \psi(x)) \right] dx + \\ & + \int_{x_0}^{x_1} o_1(\|\Delta z(t_1, x)\|) dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_2(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\|) dx dt - \int_{x_0}^{x_1} o_3(\|\Delta z(t_0, x)\|) dx. \end{aligned} \quad (15)$$

3. Оценка остаточного члена

Перейдем к оценке нормы приращения $(\Delta z(t_0, x), \Delta z(t, x), \Delta y(t, x))$ состояния $(z(t_0, x), z(t, x), y(t, x))$, отвечающего приращению $\Delta v(x)$, управления $v(x)$. Из (6)–(8) получаем, что

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq Z_1 \int_{t_0}^t [\|\Delta z(\tau, x)\| + \|\Delta y(\tau, x)\|] d\tau + \|\Delta z(t_0, x)\|, \quad (16)$$

$$\|\Delta y(t, x)\| \leq Z_2 \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta z(t, s)\| ds, \quad (17)$$

$$\|\Delta z(t_0, x)\| \leq Z_3 \int_{x_0}^x [\|\Delta z(t_0, s)\| + \|\Delta v(s)\|] ds. \quad (18)$$

Здесь $Z_i = \text{const} > 0$, $i = \overline{1, 3}$, – некоторые постоянные.

Применяя к неравенству (18) лемму Гронуолла–Беллмана (см. например, [4, 5]), получим

$$\|\Delta z(t_0, x)\| \leq Z_4 \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta v(s)\| ds, \quad (19)$$

где $Z_4 = \text{const} > 0$ – некоторое постоянное.

Далее из (16), применяя лемму Гронуолла–Беллмана, будем иметь

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq Z_5 \left[\int_{t_0}^t \|\Delta y(\tau, x)\| d\tau + \|\Delta z(t_0, x)\| \right], \quad (20)$$

где $Z_5 = \text{const} > 0$.

В (20), учитывая неравенство (17), приходим к оценке

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq Z_6 \left[\int_{t_0}^t \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta z(\tau, x)\| dx d\tau + \|\Delta z(t_0, x)\| \right], \quad Z_6 = \text{const} > 0.$$

Отсюда

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_1} \|\Delta z(t, x)\| \leq Z_6 \left[\int_{t_0}^t (x_1 - x_0) \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \|\Delta z(\tau, x)\| d\tau + \|\Delta z(t_0, x)\| \right]. \quad (21)$$

Применяя лемму из [6] к последнему неравенству (21), будем иметь

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_1} \|\Delta z(t, x)\| \leq Z_7 \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta v(s)\| ds, \quad Z_7 = \text{const} > 0. \quad (22)$$

Используя полученные оценки (17), (19), (22), удастся оценить остаток формулы приращения на специальной вариации управления.

4. Необходимые условия оптимальности

Считая $v(x)$ оптимальным управлением его специальное приращение определим по формуле

$$\Delta v_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \in [\xi, \xi + \varepsilon), \\ v - v(x), & x \in [\xi, \xi + \varepsilon), \end{cases} \quad (23)$$

где $\xi \in (x_0, x_1)$ – произвольная точка непрерывности управления $v(x)$, $v \in V$ – произвольный вектор, $\varepsilon > 0$ – произвольное число, такое что $\xi + \varepsilon < x_1$.

Учитывая (23) и установленные оценки из (15), будем иметь

$$S(v + \Delta v_\varepsilon) - S(u) = -\varepsilon [M(\xi, z(t_0, \xi), v, \psi(\xi)) - M(\xi, z(t_0, \xi), v, u(\xi), \psi(\xi))] + o(\varepsilon).$$

Из последнего разложения следует теорема.

Теорема 1. При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $v(x)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство

$$M(\xi, z(t_0, \xi), v, \psi(\xi)) - M(\xi, z(t_0, \xi), v(\xi), \psi(\xi)) \leq 0 \quad (24)$$

выполнялось для всех $\xi \in [x_0, x_1)$ и $v \in V$.

Неравенство (24) является аналогом условия максимума Понтрягина в рассматриваемой задаче.

Из него можно, при дополнительных предположениях, получить линеаризованное условие максимума и аналог управления Эйлера. Приведем их.

Теорема 2. Пусть множество V выпуклое, а $F(x, z, v)$ непрерывно дифференцируема также по v . Тогда для оптимальности допустимого управления $v(x)$ необходимо, чтобы соотношение

$$\max_{w \in V} M'_v(\xi, z(t_0, \xi), v(\xi), \psi(\xi))w = M'_v(\xi, z(t_0, \xi), v(\xi), \psi(\xi)) \cdot v(x) \quad (25)$$

выполнялось для всех $\xi \in [x_0, x_1)$.

Соотношение (25) есть аналог линеаризованного условия максимума.

Теорема 3. Если множество V открытое, а $F(x, z, u)$ непрерывно-дифференцируема по v , то вдоль оптимального процесса $(v(x), z(t_0, x), z(t, x), y(t, x))$ соотношение

$$M'_v(\xi, z(t_0, \xi), v(\xi), \psi(\xi)) = 0 \quad (26)$$

выполняется для всех $\xi \in [x_0, x_1)$.

Соотношение (26) есть аналог уравнения Эйлера.

В заключении приведем аналог условия Лежандра–Клебша.

Следуя, например, работам [7, 8], каждое допустимое управление, удовлетворяющее уравнению Эйлера, назовем классической экстремалью.

Теорема 4. Пусть множество V открытое, а $F(x, z, v)$ дважды непрерывно дифференцируема по v . Тогда для оптимальности классической экстремали $v(x)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство

$$w' \frac{\partial^2 M'(\xi, z(t, \xi), v(\xi), \psi(\xi))}{\partial v^2} w \leq 0,$$

выполнялось для всех $w \in R^r$ и $\xi \in [x_0, x_1)$.

Заключение

В работе рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая системой интегро-дифференциальных уравнений. Управляющая функция входит в граничное условие. Установлен ряд необходимых условий оптимальности первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Букина А.В., Букин Ю.С. Исследование модели динамики популяции методами теории оптимального управления // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2010. № 3. С. 59–66.
2. Букина А.В. Идентификация модели видообразования методами теории оптимального управления // Журнал СВУ. Сер. Математика и физика. 2008. № 3. С. 231–235.
3. Букина А.В. К исследованию задачи оптимального управления интегро-дифференциальной моделью симпатрического видообразования // Математическое моделирование и информационные технологии : материалы VIII школы-семинара молодых ученых. Иркутск, 2006. С. 34–37.
4. Новоженев М.М., Сумин В.И. Методы оптимального управления системами математической физики. Горький : Изд-во ГГУ, 1986. 87 с.
5. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблема устойчивости нелинейных систем Гурса–Дарбу // Дифференциальные уравнения. 1972. № 5. С. 845–856.
6. Хотеев Л.А. Задача оптимального управления для интегро-дифференциальных уравнений типа Барбашина // Проблемы управления и оптимизации. Минск : ИМ АН БССР, 1976. С. 74–87.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Наука, 1973. 256 с.
8. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимальности управления системами Гурса–Дарбу. Баку : ЭЛМ, 2013. 363 с.

Агамалиева Айгюн Исфоган кызы. E-mail: agamaliyeva88@gmail.com

Мансимов Камил Байрамали оглы, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: mansimovbkamil@gmail.com

Бакинский государственный университет

Поступила в редакцию 2 июля 2016 г.

Aqamaliyeva Aygun Isfagan (Baku State University, Azerbaijan)

Mansimov Kamil Bayramali (Baku State University, Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Azerbaijan).

About one control problem described by system of integro-differential equations.

Keywords: Dynamics population; necessary optimality conditions; integro-differential equation; Pontryagin's maximum principle; linearized maximum principle.

DOI: 10.17223/19988605/39/1

Consider the problem of minimizing the functional of terminal type

$$S(v) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, z(t_1, x)) dx, \quad (1)$$

with constraints

$$z_t = f(t, x, z, y), \quad (t, x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1], \quad (2)$$

$$y(t, x) = \int_{x_0}^{x_1} g(t, x, s, z(t, s)) ds, \quad x \in [x_0, x_1], \quad (3)$$

$$z(t_0, x) = \int_{x_0}^x F(x, s, z(t_0, s), v(s)) ds.$$

Here $f(t, x, z, y), g(t, x, s, z)$ is the given n - and m -dimensional vector functions respectively, continuous with respect to all the variables together with partial derivatives of the vectors of state, $F(x, z, v)$ is the given n -dimensional vector-function continuous with respect to all the variables together with partial derivatives z, t_0, t_1, x_0, x_1 ($t_0 < t_1; x_0 < x_1$) are given, $\varphi(x, z)$ is a scalar function continuous with respect to all the variables together with the $\frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z}$, $v = v(x)$ is piecewise continuous (with a finite number of points of discontinuity of the first kind) vector control actions with values from a specified non-empty and bounded set that is, $v(x) \in V \subset R^r$, $x \in [x_0, x_1]$.

Our goal is to derive a necessary optimality condition in the problem under consideration.

REFERENCES

1. Bukina, A.V. & Bukin, Yu.S. (2010) Investigation of population dynamics model by the methods of optimal control theory. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika – The Bulletin of Irkutsk State University. Mathematics*. 3. pp. 59–66. (In Russian).

2. Bukina, A.V. (2008) Identification of a Speciation Model by Methods of Optimal Control Theory. *Zhurnal SFU. Ser. Ma-tematika i fizika – SibFU Journal. Mathematics and Physics*. 3. pp. 231–235. (In Russian).
3. Bukina, A.V. (2006) [To the study of the problem of optimal control of the integro-differential model of sympatric speciation]. *Matematicheskoe modelirovanie i informatsionnye tekhnologii* [Mathematical Modeling and Information Technologies]. Proc. of the Eighth Seminar of Young Scientists. Irkutsk. pp. 34–37. (In Russian).
4. Novozhenov, M.M. & Sumin, V.I. (1986) *Metody optimal'nogo upravleniya sistemami matematicheskoy fiziki* [Methods of optimal control of mathematical physics systems]. Gorky: Gorky State University.
5. Plotnikov, V.I. & Sumin, V.I. (1972) Problema ustoychivosti nelineynykh sistem Gursa–Darbu [The problem of stability of nonlinear Goursat-Darboux systems]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*. 5. pp. 845–856.
6. Khoteev, L.A. (1976) Zadacha optimal'nogo upravleniya dlya integro-differentsial'nykh uravneniy tipa Barbashina [The optimal control problem for Barbashin type integro-differential equations]. In: Kirillova, F.M. (ed.) *Problemy upravleniya i optimizatsii* [Problems of control and optimisation]. Minsk: Belorussian SSR Academy of Sciences. pp. 74–87.
7. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Osobyie optimal'nye upravleniya* [Special optimal control]. Moscow: Nauka.
8. Mansimov, K.B. & Mardanov, M.Dzh. (2013) *Kachestvennaya teoriya optimal'nosti upravleniya sistemami Gursa-Darbu* [Qualitative theory of optimal control of the Goursat-Darboux systems]. Baku: ELM.

В.В. Домбровский, Т.Ю. Объедко, М.В. Самородова

ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ С ЗАМКНУТОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается задача управления дискретными динамическими системами со случайными коррелированными параметрами, относительно которых известны только первые и вторые моменты распределения. Определена стратегия управления с прогнозирующей моделью с замкнутой обратной связью на конечном и бесконечном горизонтах управления. Получены достаточные условия устойчивости стратегии управления на бесконечном горизонте.

Ключевые слова: управление с прогнозирующей моделью; замкнутая обратная связь; коррелированные параметры.

Системам со случайными параметрами уделяется значительное внимание в современной научной литературе. Это связано с тем, что такие системы нашли широкое практическое применение при управлении сложными реальными объектами.

Проблема синтеза регуляторов для подобных систем при различных предположениях о характере изменения случайных параметров рассматривалась в работах [1–9]. В работе [1] получены уравнения синтеза регуляторов с замкнутой обратной связью для систем со случайными независимыми параметрами и мультипликативными шумами. В [4, 5] рассматривается задача управления линейными системами со скачкообразными параметрами, меняющимися в соответствии с эволюцией дискретной марковской цепи.

В работах [6–9] используется методология управления с прогнозирующей моделью (управление со скользящим горизонтом) [10]. Задача синтеза стратегий управления с прогнозированием с замкнутой обратной связью для систем со случайными независимыми параметрами решена в работе [6]. В работе [7] получены уравнения синтеза оптимальных стратегий управления с прогнозирующей моделью с разомкнутой обратной связью для систем со случайными независимыми параметрами и мультипликативными шумами. Дискретные системы со случайными зависимыми параметрами рассматриваются в [8, 9]. В этих работах синтезированы алгоритмы прогнозирующего управления с разомкнутой обратной связью с учетом ограничений на управления. При этом в [8] предполагается, что динамика вектора параметров описывается разностным стохастическим уравнением авторегрессии, в работе [9] предполагается, что известны только первые и вторые моменты распределения параметров.

В настоящей работе получены уравнения синтеза оптимальных стратегий управления с замкнутой обратной связью для систем со случайными коррелированными параметрами, относительно которых предполагаются известными только первые и вторые моменты распределения. Даны достаточные условия устойчивости стратегии управления на бесконечном горизонте.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную линейную систему, заданную на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$:

$$x(k+1) = Ax(k) + B[\eta(k+1), k+1]u(k), \quad (1)$$

где $x(k)$ – n_x -мерный вектор состояния, $u(k)$ – n_u -мерный вектор управления, $\eta(k)$ – последовательность q -мерных случайных векторов, наблюдаемых до момента времени k включительно. A , $B[\eta(k), k]$ – матрицы соответствующих размерностей, причем $B[\eta(k), k]$ зависит от $\eta(k)$ линейно.

Пусть на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ выделен поток σ -алгебр $\mathbb{F} = (\mathfrak{F}_k)_{k \geq 1}$, где каждая из σ -алгебр $\mathfrak{F}_k$ порождается последовательностями $\{\eta(s): s=0,1,2,\dots,k\}$ и интерпретируется как доступная информация до момента времени k включительно.

Будем полагать, что для процесса $\eta(k)$ известны условные моменты относительно $\mathfrak{F}_k$:

$$E\{\eta(k+i) / \mathfrak{F}_k\} = \bar{\eta}(k+i), \quad (2)$$

$$E\{\eta(k+i)\eta^T(k+j) / \mathfrak{F}_k\} = \Theta_{ij}(k), (k=0,1,2,\dots), (i,j=1,2,\dots). \quad (3)$$

Для управления системой (1) синтезируем стратегии с прогнозирующей моделью по следующему правилу. На каждом шаге k минимизируем квадратичный критерий со скользящим горизонтом управления

$$J(k+m/k) = \sum_{i=1}^m E\left\{x^T(k+i)R_1(k,i)x(k+i) / x(k), \mathfrak{F}_k\right\} + \sum_{i=0}^{m-1} E\left\{u^T(k+i/k)R(k,i)u(k+i/k) / x(k), \mathfrak{F}_k\right\} \quad (4)$$

на траекториях системы (1) по последовательности прогнозирующих управлений $u(k/k), \dots, u(k+m-1/k)$, зависящих от состояния системы в момент времени k ; $R_1(k,i) > 0$, $R(k,i) > 0$ – весовые матрицы соответствующих размерностей; m – горизонт прогноза; k – текущий момент времени. В качестве управления в момент времени k берем $u(k) = u(k/k)$. Тем самым получаем управление $u(k)$ как функцию состояний $x(k)$, т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление $u(k+1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для следующего момента $k+1$ и т.д.

2. Синтез стратегий управления с прогнозированием

Теорема 1. Оптимальная стратегия прогнозирующего управления с замкнутой обратной связью системой (1), минимизирующая критерий (4), при фиксированном горизонте прогнозирования m , на каждом шаге k определяется уравнением

$$u^{\text{opt}}(k) = -K(m)x(k) = -[L_{22}(m-1) + R(k,0)]^{-1} L_{12}(m-1)x(k), \quad (5)$$

где

$$L_{12}(l) = A^T S(l) E\{B[\eta(k+m-l), k+m-l] / \mathfrak{F}_{k+m-l+1}\}, \quad (6)$$

$$L_{22}(l) = E\{B^T[\eta(k+m-l), k+m-l] S(l) B[\eta(k+m-l), k+m-l] / \mathfrak{F}_{k+m-l+1}\}, \quad (7)$$

$S(l)$ – матрица, определяемая из решения рекуррентного уравнения вида

$$S(l) = R_1(k, m-l) + A^T S(l-1) A - L_{12}(l-1) [L_{22}(l-1) + R(k, m-l)]^{-1} (L_{12}(l-1))^T \quad (8)$$

с начальным условием $S(0) = R_1(k, m)$.

При этом оптимальное значение критерия (4) определяется выражением

$$J^{\text{opt}}(k+m/k) = x^T(k) [S(m) - R_1(k, m)] x(k). \quad (9)$$

Доказательство. Используем метод динамического программирования Беллмана. В момент времени $k+m-1$ критерий (4) имеет вид

$$J(k+m/k+m-1) = E\{x^T(k+m)R_1(k, m)x(k+m) + u^T(k+m-1/k)R(k, m-1)u(k+m-1/k) / x(k+m-1), \mathfrak{F}_{k+m-1}\}. \quad (10)$$

Выражая $x(k+m)$ через $x(k+m-1)$ с использованием уравнения системы (1) и подставляя в (10), будем иметь

$$J(k+m/k+m-1) = x^T(k+m-1)A^T R_1(k, m)Ax(k+m-1) + 2x^T(k+m-1)A^T R_1(k, m)E\{B[\eta(k+m), k+m] / \mathfrak{F}_{k+m-1}\}u(k+m-1/k) +$$

$$\begin{aligned}
& +u^T(k+m-1/k)\{E\{B^T[\eta(k+m),k+m]R_1(k,m)B[\eta(k+m),k+m]/\mathfrak{F}_{k+m-1}\}+R(k,m-1)\}u(k+m-1/k)= \\
& =x^T(k+m-1)A^TS(0)Ax(k+m-1)+2x^T(k+m-1)L_{12}(0)u(k+m-1/k)+ \\
& +u^T(k+m-1/k)\{L_{22}(0)+R(k,m-1)\}u(k+m-1/k),
\end{aligned} \tag{11}$$

где $S(0) = R_1(k,m)$; $L_{12}(0)$, $L_{22}(0)$ определяются уравнениями (6)–(7).

Оптимизируя (11) по $u(k+m-1/k)$, получаем оптимальное управление на $k+m-1$ шаге:

$$u^{\text{opt}}(k+m-1/k) = -[L_{22}(0) + R(k,m-1)]^{-1}L_{11}(0)x(k+m-1). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), получим оптимальное значение критерия (4) на $k+m-1$ шаге:

$$\begin{aligned}
J^{\text{opt}}(k+m/k+m-1) & = x^T(k+m-1)[A^TR_1(k,m)A - A^TR_1(k,m)M\{B[\eta(k+m),k+m]/\mathfrak{F}_{k+m-1}\} \times \\
& \times \{E\{B^T[\eta(k+m),k+m]R_1(k,m)B[\eta(k+m),k+m]/\mathfrak{F}_{k+m-1}\} + R(k,m-1)\}^{-1} \times \\
& \times E\{B^T[\eta(k+m),k+m]/\mathfrak{F}_{k+m-1}\}R_1(k,m)A]x(k+m-1) = \\
& = x^T(k+m-1)[A^TS(0)A - L_{12}(0)[L_{22}(0) + R(k,m-1)]^{-1}(L_{12}(0))^T]x(k+m-1) = \\
& = x^T(k+m-1)[S(1) - R_1(k,m-1)]x(k+m-1),
\end{aligned} \tag{13}$$

где $S(1)$ определяется уравнением (8).

Повторяя процедуру на следующем шаге, имеем

$$\begin{aligned}
J(k+m/k+m-2) & = E\{x^T(k+m-1)R_1(k,m-1)x(k+m-1) + \\
& + u^T(k+m-2/k)R(k,m-2)u(k+m-2/k) + J^{\text{opt}}(k+m/k+m-1)/x(k+m-2), \mathfrak{F}_{k+m-2}\} = \\
& = E\{x^T(k+m-1)S(1)x(k+m-1) + u^T(k+m-2/k)R(k,m-2)u(k+m-2/k)/x(k+m-2), \mathfrak{F}_{k+m-2}\} = \\
& = x^T(k+m-2)A^TS(1)Ax(k+m-2) + 2x^T(k+m-2)L_{12}(1)u(k+m-2/k) + \\
& + u^T(k+m-2/k)\{L_{22}(1) + R(k,m-2)\}u(k+m-2/k),
\end{aligned} \tag{14}$$

$L_{12}(1)$, $L_{22}(1)$ определяются уравнениями (6)–(7).

Оптимизируя (14) по $u(k+m-2/k)$, получаем оптимальное управление на $k+m-2$ шаге:

$$u^{\text{opt}}(k+m-2/k) = -[L_{22}(1) + R(k,m-2)]^{-1}L_{12}(1)x(k+m-2). \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14), имеем оптимальное значение критерия (4) на $k+m-2$ шаге:

$$\begin{aligned}
J^{\text{opt}}(k+m/k+m-2) & = x^T(k+m-2)[A^TS(1)A - A^TS(1)E\{B[\eta(k+m-1),k+m-1]/\mathfrak{F}_{k+m-2}\} \times \\
& \times \{E\{B^T[\eta(k+m-1),k+m-1]S(1)B[\eta(k+m-1),k+m-1]/\mathfrak{F}_{k+m-2}\} + R(k,m-2)\}^{-1} \times \\
& \times E\{B^T[\eta(k+m-1),k+m-1]/\mathfrak{F}_{k+m-2}\}S^T(1)A]x(k+m-2) = \\
& = x^T(k+m-2)[A^TS(1)A - L_{12}(1)[L_{22}(1) + R(k,m-2)]^{-1}(L_{12}(1))^T]x(k+m-2) = \\
& = x^T(k+m-2)[S(2) - R_1(k,m-2)]x(k+m-2),
\end{aligned} \tag{16}$$

где $S(2)$ определяется уравнением (8).

На шаге k получаем

$$\begin{aligned}
J(k+m/k) & = E\{x^T(k+1)S(m-1)x(k+1) + u^T(k/k)R(k,0)u(k/k)/x(k), \mathfrak{F}_k\} = \\
& = x^T(k)A^TS(m-1)Ax(k) + u^T(k/k)L_{11}(m-1)u(k/k) + 2x^T(k)L_{12}(m-1)u(k/k).
\end{aligned} \tag{17}$$

Нетрудно показать, что при этом оптимальное управление $u(k/k)$ имеет вид (5), оптимальное значение критерия (4) определяется уравнением (9).

3. Управление на бесконечном горизонте

Рассмотрим квадратичный критерий на бесконечном горизонте управления

$$J(k+m/k) = \sum_{i=1}^m E\{x^T(k+i)R_1x(k+i)/x(k), \mathfrak{F}_k\} + \sum_{i=0}^{m-1} E\{u^T(k+i/k)Ru(k+i/k)/x(k), \mathfrak{F}_k\}, m \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Предположим, что матрица $B[\eta(k), k]$, первые и вторые условные моменты процесса $\eta(k)$ не зависят от времени, т.е.

$$\begin{aligned} B[\eta(k), k] &= B[\eta(k)], \\ E\{\eta(k+i)/\mathfrak{F}_k\} &= \bar{\eta}(i), \\ E\{\eta(k+i)\eta^T(k+j)/\mathfrak{F}_k\} &= \Theta_{ij} \end{aligned}$$

для всех k, i, j . Данные предположения означают стационарность процесса $\eta(k)$.

Теорема 2. Пусть существует положительно определенное решение S^∞ уравнения

$$S^\infty = R_1 + A^T S^\infty A - L_{12}^\infty [L_{22}^\infty + R]^{-1} (L_{12}^\infty)^T, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} L_{12}^\infty &= A^T S^\infty E\{B[\eta(k+m-l), k+m-l]/\mathfrak{F}_{k+m-l+1}\}, \\ L_{22}^\infty &= E\{B^T[\eta(k+m-l), k+m-l]S^\infty B[\eta(k+m-l), k+m-l]/\mathfrak{F}_{k+m-l+1}\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда оптимальный закон управления с замкнутой обратной связью, минимизирующий критерий (18) на бесконечном горизонте управления, является стабилизирующим и имеет вид

$$u^{\text{opt}}(k) = -K^\infty x(k) = -[L_{22}^\infty + R]^{-1} L_{12}^\infty x(k). \quad (21)$$

Доказательство. Предположим, что существует положительно определенное решение S^∞ уравнения (19). Положим $R_1 = S^\infty$. Критерий (18) в момент времени $k=0$ имеет вид

$$J(m/0) = \sum_{i=1}^{m-1} E\{x^T(i)R_1x(i) + x^T(m)S^\infty x(m)/x(0), \mathfrak{F}_0\} + \sum_{i=0}^{m-1} E\{u^T(i/0)Ru(i/0)/x(0), \mathfrak{F}_0\}. \quad (22)$$

Так как S^∞ определяется из решения уравнения (19), то согласно теореме 1 оптимальное значение критерия (22) при любом m (в том числе при $m=\infty$) определяется выражением

$$J^{\text{opt}}(\infty/0) = x^T(0)[S^\infty - R_1]x(0).$$

Поскольку матрица $S^\infty - R_1$ неотрицательно определенная и имеет ограниченные элементы, то очевидно, что значение критерия $J^{\text{opt}}(\infty/0)$ – конечная величина.

Таким образом, последовательности $E\{x^T(k)R_1x(k)/x(0), \mathfrak{F}_0\}$, $E\{u^T(k)Ru(k)/x(0), \mathfrak{F}_0\}$ при оптимальном управлении являются бесконечными последовательностями с конечными суммами, откуда следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E\{x^T(k)R_1x(k)/x(0), \mathfrak{F}_0\} &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} E\{u^T(k)Ru(k)/x(0), \mathfrak{F}_0\} &= 0. \end{aligned}$$

Так как $R_1, R > 0$, то $x(k), u(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ в средне-квадратическом смысле, что доказывает стабилизируемость закона управления.

Для доказательства (21) получим оптимальный закон управления при $R_1 = S^\infty$. Используя Теорему 1, нетрудно показать, что оптимальный закон управления с замкнутой обратной связью для любого m (в том числе для $m=\infty$) имеет вид

$$u^{\text{opt}}(k) = -K^\infty x(k) = -[L_{22}^\infty + R]^{-1} L_{12}^\infty x(k). \quad (23)$$

Тогда можно утверждать, что для случая $m=\infty$ закон управления (23) оптимален для любой положительно определенной матрицы R_1 , так как

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E\{x^T(k+m)R_1x(k+m)/x(0), \mathfrak{F}_0\} = 0.$$

Заключение

Получены уравнения синтеза стратегий прогнозирующего управления с замкнутой обратной связью для стохастических систем со случайными зависимыми параметрами, относительно которых предполагаются известными только условные первые и вторые моменты распределений. Получены достаточные условия устойчивости оптимального закона управления на бесконечном горизонте.

Отметим, что предложенный подход без принципиальных затруднений может быть обобщен на следующие случаи:

- когда матрица A в уравнении (1) зависит от времени;
- когда уравнение (1) содержит аддитивные шумы с характеристиками, зависящими от вектора параметров η ;
- когда матрица A в уравнении (1) зависит от последовательности независимых случайных параметров, не коррелированных с вектором параметров η .

ЛИТЕРАТУРА

1. Домбровский В.В., Ляшенко Е.А. Линейно-квадратичное управление дискретными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами с применением к оптимизации инвестиционного портфеля // А и Т. 2003. № 10. С. 50 – 65.
2. Fisher S., Bhattacharya R. Linear quadratic regulation of systems with stochastic parameter uncertainties // Automatica. 2009. No. 45. P. 2831–2841.
3. Ghaoui E.L. State-feedback control of systems with multiplicative noise via linear matrix inequalities // Syst. Control Letters. 1995. V. 24. P. 223–228.
4. Dragan V., Morozan T. The Linear Quadratic Optimization Problems for a Class of Linear Stochastic Systems With Multiplicative White Noise and Markovian Jumping // IEEE Transactions on Automatic Control. 2004. V. 49, No 5. P. 665–675.
5. Домбровский В.В., Обедко Т.Ю. Управление с прогнозированием системами с марковскими скачками при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2011. № 5. С. 96–112.
6. Lee J.H., Cooley B.L. Optimal feedback control strategies for state-space systems with stochastic parameters // IEEE Transactions on Automatic Control. 1998. V. 43, No. 10. P. 1469–1475.
7. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // А и Т. 2005. № 4. С. 84–97.
8. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // А и Т. 2006. № 12. С. 71–85.
9. Dombrovskii V., Obedko T. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization // Automatica. 2015. V. 54. P. 325–331.
10. Mayne D.Q. Model predictive control: Recent developments and future promise // Automatica. 2014. V. 50. P. 2967–2986.

Домбровский Владимир Валентинович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

Обедко Татьяна Юрьевна, канд. физ.-мат. наук. E-mail: tatyana.obedko@mail.ru

Самородова Мария Владимировна. E-mail: samorodova21@gmail.com

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 22 декабря 2016 г.

Dombrovskii Vladimir V., Obedko Tatiana Y., Samorodova Mariya V. (National Research Tomsk State University, Russian Federation).

The closed-loop optimal feedback model predictive control policy for systems with stochastic correlated parameters.

Keywords: model predictive control; closed-loop feedback control; correlated parameters.

DOI: 10.17223/19988605/39/2

We consider the following discrete-time with stochastic parameters system on the probabilistic space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$:

$$x(k+1) = Ax(k) + B[\eta(k+1), k+1]u(k), \quad (1)$$

where $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ is the vector of state, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ is the vector of control inputs; $\eta(k) \in \mathbb{R}^q$ is assumed to be stochastic time series. The matrices $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B[\eta(k), k] \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ are the system matrix and the input matrix, respectively. All the elements of $B[\eta(k), k]$ are assumed to be linear functions of $\eta(k)$.

Let $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_k)_{k \geq 1}$ be the complete filtration with σ -field $\mathcal{F}_k$ generated by the $\{\eta(s): s=0, 1, 2, \dots, k\}$ that models the flow of information to time k . We allow the time series $\eta(k)$ is serially correlated. Let assume that we know the first- and the second-order conditional moments for the stochastic vector $\eta(k)$ about $\mathcal{F}_k$:

$$E\{\eta(k+i)/\mathfrak{F}_k\} = \bar{\eta}(k+i),$$

$$E\{\eta(k+i)\eta^T(k+j)/\mathfrak{F}_k\} = \Theta_{ij}(k), (k=0,1,2,\dots), (i,j=1,2,\dots,l).$$

We define the following cost function with receding horizon, which is to be minimized at every time k

$$J(k+m/k) = E\left\{\sum_{i=1}^m x^T(k+i)R_1(k,i)x(k+i) + u^T(k+i-1/k)R(k,i)u(k+i-1/k) \middle| x(k), \mathfrak{F}_k\right\}, \quad (2)$$

on trajectories of system (1) over the sequence of predictive control inputs $u(k/k), \dots, u(k+m-1/k)$ dependent on information up to time k , where $R_1(k,i) \geq 0$, $R(k,i) > 0$ are given symmetric weight matrices of corresponding dimensions; m is the prediction horizon.

The closed-loop optimal feedback law minimizing criterion (2) was derived via dynamic programming. Conditions that guarantee the stability of the infinite horizon formulation are given.

REFERENCES

1. Dombrovskii, V.V. & Lyashenko E.A. (2003) A linear quadratic control for discrete systems with random parameters and multiplicative noise and its application to investment portfolio optimization. *Automation and remote control*. 64(10). pp. 1558–1570. DOI: 10.1023/A:1026057305653
2. Fisher, S. & Bhattacharya, R. (2009) Linear quadratic regulation of systems with stochastic parameter uncertainties. *Automatica*. 45. pp. 2831–2841. DOI: 10.1016/j.automatica.2009.10.001
3. Ghaoui, E.L. (1995) State-feedback control of systems with multiplicative noise via linear matrix inequalities. *Syst. Control Letters*. 24. pp. 223–228.
4. Dragan, V. & Morozan, T. (2004) The Linear Quadratic Optimization Problems for a Class of Linear Stochastic Systems with Multiplicative White Noise and Markovian Jumping. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 49(5). pp. 665–675. DOI: 10.1109/TAC.2004.837750
5. Dombrovskii, V.V. & Obedko, T.Yu. (2011) Predictive control of systems with Markovian jumps under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 72(5), pp. 989–1003. DOI: 10.1134/S0005117911050079
6. Lee, J.H. & Cooley, B.L. (1998) Optimal feedback control strategies for state-space systems with stochastic parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 43(10). pp. 1469–1475. DOI: 10.1109/9.720511
7. Dombrovskii, V.V., Dombrovskii, D.V. & Lyashenko E.A. (2005) Predictive control of random-parameter systems with multiplicative noise. Application to investment portfolio optimization. *Automation and remote control*. 66(4). pp. 583–595. DOI: 10.1007/s10513-005-0102-5
8. Dombrovskii, V.V., Dombrovskii, D.V. & Lyashenko, E.A. (2006) Model predictive control of systems with random dependent parameters under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and remote control*. 67(12). pp. 1927–1939. DOI: 10.1134/S000511790612006X
9. Dombrovskii, V. & Obedko, T. (2015) Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization. *Automatica*. 54. pp. 325–331. DOI: 10.1016/j.automatica.2015.02.021
10. Mayne, D.Q. (2014) Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*. 50. pp. 2967–2986. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.10.128

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.8

DOI: 10.17223/19988605/39/3

Д.П. Бураков, М.И. Гарина

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУКТУРЫ
ПРЕДПОЧТЕНИЙ ЛПР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ТИПОВЫХ ОБОБЩАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Предлагается алгоритм сокращенного перебора точек, соответствующих объектам, характеризующимся несколькими признаками, для построения линейной выпуклой оболочки и Парето-оболочки множества этих объектов. Данный алгоритм используется при исследовании структуры предпочтений ЛПР с использованием типовых обобщающих функций.

Ключевые слова: линейная выпуклая оболочка; многомерное пространство; Парето-доминирование.

В задаче определения условий оптимальности некоторой альтернативы из дискретного множества, рассмотренной в предыдущем докладе авторов, решаются две нетривиальные подзадачи. Первая подзадача решается для определения потенциальной оптимальности альтернативы и заключается в определении её принадлежности $\text{conv}_P(Y)$ – Парето-оболочке множества Y , получаемой объединением 2^n множеств Парето Y_P для всех возможных сочетаний направлений оптимизации n критериев. Здесь Y – множество векторных оценок множества альтернатив X : $y(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, $x \in X$, $y(x) \in Y$, $|Y| = |X| = N$. Тогда векторная оценка представляет собой точку в n -мерном пространстве (если все $f_j(x)$ – числовые, то $Y \subset \mathbb{R}^n$). Точки, входящие в $\text{conv}_P(Y)$, принадлежат поверхности тела (необязательно выпуклого) минимального объема, заключающего в себе множество Y целиком. В простейшем случае это тело представляет собой невыпуклый многогранник, вершинами которого являются точки $\text{conv}_P(Y)$.

Вторая подзадача решается для определения типа обобщающей функции $F_O(w; y)$ и вектора весовых коэффициентов w , применение которых делает альтернативу y оптимальной, и заключается в определении принадлежности альтернативы $\text{conv}_L(Y)$ – линейной выпуклой оболочке Y , которая представляет собой выпуклый многогранник минимального объема, обрамляющий Y . При этом в обе оболочки как минимум входят все точки y_{ex} , имеющие экстремальное значение хотя бы одной координаты: $y_{ex} \in \text{conv}_L(Y) \cap \text{conv}_P(Y) \Leftrightarrow \exists j = 1, \dots, n: (f_j(x) = \max_{x \in X} (f_j(x)) \vee f_j(x) = \min_{x \in X} (f_j(x)))$, кроме того, $\text{conv}_L(Y) \subseteq \text{conv}_P(Y)$.

Тогда возникает вопрос, как выбрать вершины и определить геометрические параметры этих многогранников и можно ли использовать их и методы аналитической геометрии для определения потенциальной оптимальности альтернативы, типа обобщающей функции и вектора весовых коэффициентов. Рассмотрению данных вопросов и уделяется внимание в данной статье.

1. Формирование Парето-оболочки

Авторы считают, что построение Парето-оболочки не может быть осуществлено алгоритмом меньшей сложности, чем сокращенный.

1. Для каждого из 2^n вариантов направлений оптимизации n критериев нужно рассчитать множество Y_P Парето-точек путем их попарного сравнения. Вычислительная сложность определения множества Парето в худшем случае, при необходимости полного попарного сравнения, составляет $n \cdot N \cdot (N - 1)/2 \sim n \cdot N^2$, где $N = |Y|$. Это предполагает несравнимость всех имеющихся точек по Парето, и в результирующее множество

Y_P при этом войдут все N точек. Однако в общем случае возможно сокращение перебора: если одна точка доминирует над другой, то доминируемую точку имеет смысл исключить из дальнейшего перебора и не использовать для сравнения с остальными. Таким образом, в лучшем случае вычислительная сложность составит $n \cdot (N-1) \sim n \cdot N$. При этом только одна доминирующая альтернатива будет сравниваться с остальными. Для максимального сокращения рекомендуется начинать перебор с точек, вошедших в множество $\{y_{ex}\}$, т.е. имеющих экстремальные значения хотя бы по одной координате.

2. Объединить множества Y_P . Вычислительной сложностью $(N-1) \cdot n \sim n \cdot N$ можно пренебречь.

Таким образом, вычислительная сложность предлагаемого алгоритма построения $\text{conv}_P(Y)$ составляет в худшем случае $2^n \cdot n \cdot N^2$, а в лучшем – $2^n \cdot n \cdot N$.

2. Определение потенциальной оптимальности альтернативы

Чтобы некоторая альтернатива обладала потенциальной оптимальностью, она должна принадлежать Парето-оболочке $\text{conv}_P(Y)$, т.е. находиться либо в одной из вершин, либо лежать на одной из её граней. В первом случае определение оптимальности тривиально и заключается в последовательном сравнении точки с вершинами, формирующими оболочку. Во втором случае следует определить уравнение каждой грани (гиперплоскости) и, подставляя координаты точки, выяснить, удовлетворяют ли они одному из них. Задача осложняется тем, что не каждые n точек $\text{conv}_P(Y)$ формируют её грань и не каждая грань лежит только с одной стороны многогранника, так как он невыпуклый. Поэтому алгоритмически проще во время формирования многогранника Парето не исключать из множества вершин точки, лежащие точно на гранях. В этом случае оба варианта определения потенциальной оптимальности сводятся к однократному перебору вершин $\text{conv}_P(Y)$.

3. Формирование линейной выпуклой оболочки

Для построения выпуклой линейной оболочки $\text{conv}_L(Y)$ в двумерном пространстве используют алгоритм Грэхема, Чана и Джарвиса (алгоритм «заворачивания подарка») и их модификации [1, 2], но в пространствах более высокой размерности они неприменимы. В литературе отсутствуют описания обобщения алгоритмов поиска выпуклых оболочек для случая R^n при $n > 2$.

Если бы заранее не была построена оболочка Парето $\text{conv}_P(Y)$, то, поскольку $\text{conv}_L(Y)$ является минимальным выпуклым многогранником, содержащим Y , для его поиска следовало бы перебрать все гиперплоскости, проходящие через n точек из Y , т.е. сочетания по n точек из Y . После выбора очередной n -ки точек из Y необходимо проверить каждую из оставшихся $N - n$ точек на то, с какой стороны от выбранной гиперплоскости она находится. Если для текущей гиперплоскости все точки Y находятся с одной стороны, то образующая её n -ка точек входит в $\text{conv}_L(Y)$. Взаимное положение гиперплоскости, проходящей через n точек, и $n + 1$ -й определяется знаком определителя n -го порядка, построенного из разностей этих $n + 1$ точек. Если все проверяемые $N - n$ точек расположены с одной стороны от рассматриваемой гиперплоскости, то эти определители имеют одинаковый знак. Если же для $n + 1$ -й точки этот определитель равен 0, то это означает, что она лежит в этой же гиперплоскости. При этом в самом худшем случае для построения $\text{conv}_L(Y)$ необходимо вычислить $C_N^n \cdot (N - n)$ определителей порядка n , а сложность вычисления каждого определителя $\sim n^3$.

Поэтому для построения $\text{conv}_L(Y)$ предлагается алгоритм сокращенного перебора вершин многогранника $\text{conv}_P(Y)$, использующий тот факт, что $\text{conv}_L(Y) \subseteq \text{conv}_P(Y)$.

1. Для каждого из 2^n вариантов направлений оптимизации $f_j(x) \rightarrow \{\min, \max\}$, $j = 1, \dots, n$:

а. Выбирается n точек из $\text{conv}_P(Y)$, имеющих экстремальные значения хотя бы по одному критерию, и строится гиперплоскость L , проходящая через них. Сложность – $n \cdot (N + n^2) \sim n^3$. Кубическая компонента появляется в связи с необходимостью вычисления определителя для построения гиперплоскости.

б. Выбирается (или формируется искусственно) «предельная» точка y_{extr} , имеющая экстремальные значения по всем $f_j(x)$, и определяется её ориентированное расстояние d до гиперплоскости L [3]. Сложность – $n \cdot (N + 1) \sim N \cdot n$.

с. Путем перебора формируется множество точек $Y^* \subseteq \text{conv}_P(Y)$, ориентированное расстояние от которых до гиперплоскости имеет тот же знак, что d , а остальные отбрасываются. Сложность – $N \cdot n$.

d. Множество $Y_i \subseteq Y^*$ формируется путем повторения пунктов а–с для всех наборов по n точек из Y^* . Если $|Y^*| \leq n + 1$, то $Y_i = Y^*$. Сложность в худшем случае составляет $C_N^n \cdot (n^3 + N \cdot n)$, а в лучшем – 0.

2. Для получения $\text{conv}_L(Y)$ множества Y_i объединяются. Вычислительной сложностью можно пренебречь.

Получается, что вычислительная сложность предлагаемого алгоритма построения $\text{conv}_L(Y)$ в худшем случае составляет $2^n \cdot C_N^n \cdot n \cdot (n^2 + N)$, а в лучшем – $2^n \cdot n \cdot (n^2 + N)$.

4. Поиск вектора весовых коэффициентов, обеспечивающих оптимальность альтернативы

Для аддитивной и мультипликативной обобщающих функций, как показано в предыдущей работе, задача определения вектора весовых коэффициентов включает в себя поиск вектора, перпендикулярного гиперплоскости, являющейся гранью $\text{conv}_L(Y)$ или $\text{conv}_L(\ln(Y))$.

Известно, что всякая гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$ проходит через n точек [3]. Уравнение гиперплоскости определяется как $C_1 \cdot y_1 + \dots + C_n \cdot y_n + D = 0$, где $C_1, \dots, C_n$ – координаты нормали данной гиперплоскости. С другой стороны, гиперплоскость также описывается уравнением $|(y - a_1 \dots a_{n-1} - a_1)^T| = 0$, где $a_1, \dots, a_n$ – точки, входящие в гиперплоскость, а y – произвольная точка пространства, тоже находящаяся на гиперплоскости. Разрешив это уравнение относительно y , найдем $C_1, \dots, C_n$. Для этого необходимо разложить указанный определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} y - a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} - a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 - a_{1,1} & \dots & y_n - a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} - a_{1,1} & \dots & a_{n-1,n} - a_{1,n} \end{vmatrix} = (y_1 - a_{1,1}) \cdot A_{1,1} + \dots + (y_n - a_{1,n}) \cdot A_{1,n} = \\ = y_1 \cdot A_{1,1} + \dots + y_n \cdot A_{1,n} - (a_{1,1} \cdot A_{1,1} + \dots + a_{1,n} \cdot A_{1,n}) = 0.$$

Следовательно, алгебраические дополнения первой строки и есть компоненты нормального вектора. При этом они вычисляются через координаты точек $a_1, \dots, a_{n-1}$. Далее обратим внимание, что у всякой гиперплоскости существует не один нормальный вектор, а целое семейство векторов, задаваемое выражением $\alpha \cdot \mathbf{n}$, где $\alpha \neq 0$, а $\mathbf{n}$ – любой из векторов, перпендикулярный гиперплоскости (например, вектор с координатами $(A_{1,1}, \dots, A_{1,n})$, как показано выше). Однако для правильного определения направления, важного для определения направлений оптимизации, нас интересует не всякий вектор, нормальный к указанной грани, а только такой, который выходил бы изнутри многогранника наружу перпендикулярно к указанной плоскости.

Таким образом, встают две задачи: 1) найти точку y_0 , принадлежащую внутренности многогранника; 2) найти точку y_g , принадлежащую указанной грани, такую, что вектор $(y_g - y_0)$ был бы перпендикулярен грани. Первую часть задачи можно решить двумя способами: если множество $Y \setminus \text{conv}_L(Y)$ не пусто, в качестве y_0 можно взять любую точку из него. В противном случае в качестве y_0 можно взять точку, являющуюся арифметическим средним всех точек из $\text{conv}_L(Y)$: в силу выпуклости многогранника она будет всегда принадлежать его внутренности. Для нахождения точки y_g нужно решить систему уравнений (поиск точки пересечения прямой и гиперплоскости, при условии что прямая задана в параметрической форме, а ее направляющий вектор является нормальным вектором гиперплоскости):

$$\begin{cases} y_{g1} = y_{01} + A_{1,1} \cdot t, \\ \dots \\ y_{gn} = y_{0n} + A_{1,n} \cdot t, \\ (A_{1,1}^2 + \dots + A_{1,n}^2) \cdot t - (A_{1,1} \cdot a_{1,1} + \dots + A_{1,n} \cdot a_{1,n}) = 0. \end{cases}$$

Здесь $y_{g1}, \dots, y_{gn}$ – координаты искомой точки y_g ; $y_{01}, \dots, y_{0n}$ – координаты внутренней точки y_0 ; $a_{1,1}, \dots, a_{1,n}$ – координаты точки a_1 , являющейся вершиной грани. Числа $A_{1,1}, \dots, A_{1,n}$ – координаты нормального

вектора гиперплоскости, найденные выше. Найдя число t , найдем и координаты искомой точки y_g , а вычитанием $(y_g - y_0)$ найдем искомый вектор.

Однако всякая вершина многогранника принадлежит одновременно $k \geq 1$ гиперплоскостям. Поэтому если нас интересует такой вектор w , который доставляет этой точке наибольшее значение, то этот вектор должен находиться во внутренности конуса, образованного нормальными векторами этих гиперплоскостей. Но тогда w должен представляться как их выпуклая комбинация. В простейшем случае будем брать средний вектор, т.е. для k граней $w = (w_{\perp gr1} + \dots + w_{\perp grk}) / k$. Тем самым мы можем перейти от систем неравенств к уравнениям, ищущим для каждой гиперплоскости нормальный вектор, а зная для точки, в какие грани она входит, образовать из них конус и взять «средний» внутренний вектор-луч этого конуса.

Заключение

В работе показано, что задача поиска вектора весовых коэффициентов w , оптимизирующего указанную альтернативу по значению аддитивной или мультипликативной обобщающей функции (при условии ее принадлежности паретовской или линейной оболочке множества), алгоритмически разрешима. Кроме того, приведены алгоритмы, позволяющие построить эти оболочки для произвольного конечного множества в R^n эффективнее, чем полным перебором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Микони С.В. Теория принятия управленческих решений. СПб. : Лань, 2015. 448 с.
2. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы. Построение и анализ. 3-е изд. СПб. : Вильямс, 2015. 1328 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. 240 с.

Бураков Дмитрий Петрович, канд. техн. наук. E-mail: bds@yandex.ru

Гарина Марина Игоревна, канд. техн. наук. E-mail: migarina@gmail.com

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I

Поступила в редакцию 14 марта 2016 г.

Burakov Dmitry P., Garina Marina I. (Saint-Petersburg State Transport University, Russian Federation).

Algorithmic aspects to analysis of decision maker's preferences structure with standard aggregative functions.

Keywords: linear convex envelope; multidimensional space; Pareto dominance.

DOI: 10.17223/19988605/39/3

There are two non-trivial tasks in the considered in the previous paper algorithm of checking if some object is optimal. First task is about potential ability for an object to be optimal. It solves by checking if an object belongs to $\text{conv}_P(Y)$ – Pareto-envelope of Y set, obtained as a union of 2^n Pareto-sets Y_P for all combinations of directions for n criteria. Second task is about to determine the type of aggregative function and weight vector which make an object optimal. It contains the checking if an object belongs $\text{conv}_L(Y)$ – linear convex envelope Y . Here Y is a set of vectors which characterizes the set of objects X : $y(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, $x \in X$, $y(x) \in Y$. Any vector is a point in n -dimensional space R^n , and envelopes $\text{conv}_P(Y)$ and $\text{conv}_L(Y)$ are the general form polytope and the convex polytope, framing Y . Both of polytopes contains at least all points y_{ex} having extreme value of at least one of coordinates: $y_{ex} \in \text{conv}_L(Y) \cap \text{conv}_P(Y) \Leftrightarrow \exists j = 1, \dots, n: (f_j(x) = \max_{x \in X} (f_j(x)) \vee f_j(x) = \min_{x \in X} (f_j(x)))$. And also $\text{conv}_L(Y) \subseteq \text{conv}_P(Y)$. We declare then the Pareto envelope cannot be found with an algorithm less complex then reduced search:

1. Calculating the Pareto set for any of 2^n combinations of directions of n criteria using the pairwise comparisons. The computational complexity of calculating the Pareto set is $n \cdot N \cdot (N-1)/2 \sim n \cdot N^2$ at worse case, $N = |Y|$. That worse case is if all objects are Pareto incomparable. In that case, all N objects will be in Pareto set Y_P . However, in general, there is a possibility of reducing the calculating: if one object is dominated by another, we must exclude that dominated object from the further search. Therefore, in the best case the computational complexity will be $n \cdot (N-1) \sim n \cdot N$. In this case, we have one best object, which we will compare with others. We recommend to start with objects from the set $\{y_{ex}\}$ in order to provide the maximal reducing.

2. Unioning of Y_P . Computational complexity $(N-1) \cdot n \sim n \cdot N$ is less then above and it can be neglected.

So approximately computational complexity of $\text{conv}_P(Y)$ construction algorithm is $2^n \cdot n \cdot N^2$ at worse case and $2^n \cdot n \cdot N$ at best case. For linear convex envelope $\text{conv}_L(Y)$ construction in two-dimension space we can use the Graham scan and its modifications, but with quantity of dimensions $n > 2$ it is not applicable. Instead of Graham scan we consider the following reducing search algorithm using the fact that $\text{conv}_L(Y) \subseteq \text{conv}_P(Y)$.

1. For all of 2^n combination of directions $f_j(x) \rightarrow \{\min, \max\}$, $j = 1, \dots, n$:

- a. Choose one object from $\text{conv}_P(Y)$, having extreme value at least of one criteria and construct the hyperplane L passing through them. The complexity is $n \cdot (N + n^2) \sim n^3$. The cubical component is from need to calculate the determinant for hyperplane construction.
 - b. Choose or form the new “limited” point $\mathbf{y}_{\text{extr}}$, having extreme values of all $f_j(x)$ with given combination of directions and calculate the oriented distance d between it and the hyperplane. The complexity is $n \cdot (N + 1) \sim N \cdot n$.
 - c. Form the $Y^* \subseteq \text{conv}_P(Y)$ from objects for which the oriented distance to hyperplane has the same sign that d , another neglected. The complexity is $N \cdot n$.
 - d. The set $Y_t \subseteq Y^*$ forming by iterative repeating $a-c$ for all sets of n points from Y^* . If $|Y^*| \leq n + 1$, then $Y_t = Y^*$. The complexity at the worse case is $C_N^n \cdot (n^3 + N \cdot n)$, and at the best – 0.
2. The envelope $\text{conv}_L(Y)$ is union of all Y_t . The complexity is less then above and can be neglected.
- So approximately computational complexity of $\text{conv}_L(Y)$ constructing algorithm is $2^n \cdot C_N^n \cdot n \cdot (n^2 + N)$ at the worse case and $2^n \cdot n \cdot (n^2 + N)$ at the best.

REFERENCES

1. Mikoni, S.V. (2015) *Teoriya prinyatiya upravlencheskikh resheniy* [Theory of Managerial Decision-Making]. Saint-Petersburg: Lan.
2. Kormen, T., Leisserson, C., Rivest, R. & Stein, K. (2015) *Algoritmy. Postroenie i analiz* [Introduction to Algorithms, CLRS]. Translated from English by I.V. Krasikov. St. Petersburg: Williams.
3. Ilyin, V.A. & Poznyak, E.G. (2002) *Analiticheskaya geometriya* [Analitical Geometry]. Moscow: PhisMathLit.

К.И. Лившиц, А.А. Назаров

ПРОСТАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ДЛЯ МОДЕЛИ КРАМЕРА–ЛУНДБЕРГА СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПРЕМИЯМИ

Предлагается и исследуется оценка вероятности разорения страховой компании для модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями. Проводится сравнение предлагаемой оценки как с точными выражениями, так и с известной ранее асимптотической оценкой вероятности разорения.

Ключевые слова: вероятность разорения; модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями; аппроксимация вероятности разорения.

Стандартной задачей актуарной математики является задача вычисления вероятности разорения страховой компании, т.е. вероятности ситуации, когда страховая компания не может исполнять свои финансовые обязательства ввиду отсутствия денежных средств при различных предположениях о потоках, поступающих в компанию страховых премий и страховых выплат, производимых страховой компанией [1–3]. Сложность состоит, как правило, в нахождении явных решений соответствующих интегро-дифференциальных уравнений, определяющих вероятность разорения. Поэтому представляет интерес нахождение оценок для вероятности разорения, для построения которых не нужно решать соответствующие уравнения. В настоящей работе предлагается и исследуется оценка вероятности разорения страховой компании для модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями [4, 5].

1. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями

Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями строится при следующих предположениях: предполагается, что поток страховых премий, поступающих в компанию, является пуассоновским с интенсивностью λ , премии – независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $\Phi(x)$ и моментами $a_k = M\{x^k\}$ [Там же]. Страховые выплаты также образуют пуассоновский поток с интенсивностью μ , выплаты – независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $\Psi(x)$ и моментами $b_k = M\{x^k\}$. Предполагается также, что с начала деятельности страховой компании прошло достаточно длительное время, так что поток страховых выплат не зависит от потока страховых премий.

Пусть в момент времени t капитал компании равен $S(t)$. При сделанных выше предположениях

$$S(t) = S(0) + \sum_{i=1}^{m(t)} x_i - \sum_{j=1}^{n(t)} y_j, \quad (1)$$

где $S(0)$ – начальный капитал, $m(t)$ – число поступивших страховых премий до момента времени t , $n(t)$ – число страховых выплат, x_i – величина i -й страховой премии, y_j – величина j -й страховой выплаты. Определим $T = \min\{t : S(t) < 0\}$ и $T = \infty$, если $S(t) > 0 \forall t$. Случайная величина T – момент разорения. Тогда вероятность предельного разорения страховой компании, при условии, что ее капитал в начальный момент равен S ,

$$P(S) = \Pr\{T < \infty\}. \quad (2)$$

Можно показать [4, 5], что вероятность разорения $P(S)$ (2) определяется уравнением

$$(\lambda + \mu)P(S) = \lambda \int_0^\infty P(S+x)\Phi(x)dx + \mu \int_0^S P(S-x)\Psi(x)dx + \mu \int_S^\infty \Psi(x)dx \quad (3)$$

с граничным условием $P(+\infty) = 0$. Для существования отличного от $P(S) = 1$ решения уравнения необходимо выполнение условия

$$\lambda a_1 = (1 + \theta)\mu b_1, \quad (4)$$

где $\theta > 0$ – нагрузка страховой премии. Точное решение уравнения (3) удастся найти лишь в нескольких частных случаях, например при экспоненциальных или гиперэкспоненциальных распределениях страховых премий и выплат [4, 6].

Известны следующие оценки вероятности разорения $P(S)$. Оценка вероятности разорения сверху [4, 5]. Обозначим

$$L_\Phi(\omega) = \int_0^\infty e^{-\omega S} \Phi(S) dS, \quad L_\Psi(\omega) = \int_0^\infty e^{-\omega S} \Psi(S) dS.$$

Тогда если уравнение

$$\lambda L_\Phi(k) + \mu L_\Psi(k) = \lambda + \mu$$

имеет положительный корень k , то

$$P(S) \leq e^{-kS}. \quad (5)$$

Во-вторых, при θ много меньше 1 [7]:

$$P(S) \approx \frac{\mu \exp\left(-\frac{2\mu b_1}{\lambda a_2 + \mu b_2} \theta S\right)}{\lambda + \mu - \lambda \int_0^\infty e^{-\frac{2\mu b_1}{\lambda a_2 + \mu b_2} \theta x} \Phi(x) dx}. \quad (6)$$

Точность оценки (6) тем выше, чем меньше значение параметра θ .

2. Простая оценка вероятности разорения

Следуя [8], назовем «простой» оценкой вероятности разорения такую ее аппроксимацию, для построения которой используются только моменты a_k и b_k распределений страховых премий и страховых выплат и не требуется строить оценку решения уравнения (3). Для классической модели Крамера–Лундберга известна оценка вероятности разорения De Vylder [8, 9], которая основана на идее замены истинного процесса риска с произвольным распределением страховых выплат на процесс риска, в котором страховые выплаты имеют экспоненциальное распределение, а параметры аппроксимирующего процесса подобраны так, чтобы три первых момента у истинного и аппроксимирующего процессов риска совпадали. За оценку вероятности разорения при этом принимается вероятность разорения, соответствующая аппроксимирующему процессу. Воспользуемся этой идеей.

Пусть страховые премии и страховые выплаты имеют экспоненциальные распределения

$$\Phi(S) = \frac{1}{a} e^{-\frac{S}{a}}, \quad \Psi(S) = \frac{1}{b} e^{-\frac{S}{b}}. \quad (7)$$

Тогда вероятность разорения [4]

$$P(S) = \frac{\mu(a+b)}{(\lambda + \mu)a} e^{-\frac{\lambda a - \mu b}{(\lambda + \mu)ab} S}. \quad (8)$$

Или, учитывая (4),

$$P(S) = \frac{\mu(a+b)}{(\lambda + \mu)a} e^{-\frac{\mu}{(\lambda + \mu)a} S}.$$

Обозначим

$$m_k(t) = M\{S(t)^k\}, k = \overline{1,4}. \quad (9)$$

Считая для простоты, что $S(0) = 0$, несложно показать, что для процесса $S(t)$ (2) имеют место соотношения

$$m_1(t) = (\lambda a_1 - \mu b_1)t, \quad (10)$$

$$m_2(t) = (\lambda a_2 + \mu b_2)t + (\lambda a_1 - \mu b_1)^2 t^2, \quad (11)$$

$$m_3(t) = (\lambda a_3 - \mu b_3)t + 3(\lambda a_2 + \mu b_2)(\lambda a_1 - \mu b_1)t^2 + (\lambda a_1 - \mu b_1)^3 t^3, \quad (12)$$

$$m_4(t) = (\lambda a_4 + \mu b_4)t + (2(\lambda a_1 - \mu b_1)(\lambda a_3 - \mu b_3) + 3(\lambda a_2 + \mu b_2)^2 + \frac{3}{2}(\lambda a_3 - \mu b_3)(\lambda a_1 - \mu b_1))t^2 + \\ + 3(\lambda a_2 + \mu b_2)(\lambda a_1 - \mu b_1)^2 t^3 + (\lambda a_1 - \mu b_1)^4 t^4. \quad (13)$$

При экспоненциальных распределениях страховых премий и страховых выплат (7) имеем, очевидно,

$$a_k = k!a^k, \quad b_k = k!b^k.$$

Если интенсивности потоков страховых премий и страховых выплат в аппроксимирующем процессе риска равны λ_0 и μ_0 соответственно, то для совпадения моментов $m_k(t)$ двух процессов достаточно выполнения условий

$$d_1 = \lambda a_1 - \mu b_1 = \lambda_0 a - \mu_0 b, \quad (14)$$

$$d_2 = \frac{1}{2}(\lambda a_2 + \mu b_2) = \lambda_0 a^2 + \mu_0 b^2, \quad (15)$$

$$d_3 = \frac{1}{6}(\lambda a_3 - \mu b_3) = \lambda_0 a^3 - \mu_0 b^3, \quad (16)$$

$$d_4 = \frac{1}{24}(\lambda a_4 + \mu b_4) = \lambda_0 a^4 + \mu_0 b^4. \quad (17)$$

В результате получаем систему уравнений (14)–(17) на определение неизвестных параметров аппроксимирующего процесса a, b, λ_0, μ_0 . Из уравнений (14), (15)

$$\lambda_0 = \frac{d_1 b + d_2}{a(a+b)}, \quad \mu_0 = \frac{d_2 - d_1 a}{b(a+b)}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в уравнения (16) и (17), получим

$$d_1 a b + d_2 (a - b) = d_3, \quad (19)$$

$$[d_1 (a - b) + d_2] a b + d_2 (a - b)^2 = d_4. \quad (20)$$

Обозначим

$$v = a - b, \quad u = a b. \quad (21)$$

Из уравнений (19) и (20) получим

$$v = \frac{d_1 d_4 - d_2 d_3}{d_1 d_3 - d_2^2}, \quad u = \frac{d_3^2 - d_2 d_4}{d_1 d_3 - d_2^2}. \quad (22)$$

Наконец, соотношения (21) дают

$$a = \frac{v + \sqrt{v^2 + 4u}}{2}, \quad b = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 4u}}{2}. \quad (23)$$

Оценка вероятности разорения будет иметь вид

$$P(S) = \frac{\mu_0 (a+b)}{(\lambda_0 + \mu_0) a} e^{-\frac{\lambda_0 a - \mu_0 b}{(\lambda_0 + \mu_0) a b} S}, \quad (24)$$

где параметры a, b, λ_0, μ_0 вычисляются по формулам (18), (23).

Так как параметры a и b должны быть положительны, то очевидно, что для применимости построенной оценки должны выполняться условия

$$\frac{d_1 d_4 - d_2 d_3}{d_1 d_3 - d_2^2} < 0, \quad \frac{d_3^2 - d_2 d_4}{d_1 d_3 - d_2^2} > 0. \quad (25)$$

3. Примеры

Пример 1. *Распределения Эрланга страховых премий и страховых выплат.* Пусть страховые премии и страховые выплаты имеют распределения Эрланга

$$\Phi(S) = \frac{S}{\alpha^2} e^{-\frac{S}{\alpha}}, \quad \Psi(S) = \frac{S}{\beta^2} e^{-\frac{S}{\beta}}. \quad (26)$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$P(S) = A_1 e^{-\gamma_1 S} + A_2 e^{-\gamma_2 S}. \quad (27)$$

Подставляя выражение (27) в уравнение (3), получим, что для этого должны выполняться условия

$$\frac{A_1}{\beta \gamma_1 - 1} + \frac{A_2}{\beta \gamma_2 - 1} = -1, \quad (28)$$

$$\frac{A_1}{(\beta \gamma_1 - 1)^2} + \frac{A_2}{(\beta \gamma_2 - 1)^2} = 1, \quad (29)$$

$$\frac{\lambda}{(\alpha \gamma_i + 1)^2} + \frac{\mu}{(\beta \gamma_i - 1)^2} = \lambda + \mu, \quad i = 1, 2. \quad (30)$$

Таким образом, величины γ_i должны быть положительными корнями уравнения

$$f(z) = \frac{\lambda}{(\alpha z + 1)^2} + \frac{\mu}{(\beta z - 1)^2} - \lambda - \mu = 0. \quad (31)$$

Функция $f(z)$ обладает следующими свойствами: $f(0) = 0$, $f'(0) = -(\lambda \alpha - \mu \beta) < 0$, $f(-\frac{1}{\alpha}) = \infty$, $f(\frac{1}{\beta}) = \infty$, $f(\pm\infty) = -(\lambda + \mu)$, откуда следует, что уравнение $f(z) = 0$ имеет два положительных корня: $\gamma_1 \in (0, \frac{1}{\beta})$ и $\gamma_2 \in (\frac{1}{\beta}, \infty)$. Решая систему уравнений (28), (29), получаем, что вероятность разорения в нашем случае имеет вид

$$P(S) = \frac{\gamma_2(1 - \beta \gamma_1)^2}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_1 S} - \frac{\gamma_1(1 - \beta \gamma_2)^2}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_2 S}. \quad (32)$$

На рис. 1 приведены зависимость вероятности разорения $P(S)$ от начального капитала, вычисленная по формуле (32), и ее оценки, построенные по формулам (6) и (24) соответственно. Параметры $\alpha = 0,5$, $\beta = 5$, $\mu = 1$, $\lambda = (1 + \theta) \frac{\beta}{\alpha}$. Параметр $\theta = 0,05; 0,1; 0,5; 1$.

Пример 2. *Постоянные страховые премии и страховые выплаты.* Пусть страховые премии и страховые выплаты постоянны:

$$\Phi(S) = \delta(S - a), \quad \Psi(S) = \delta(S - b).$$

Точное решение уравнения (3) получить в этом случае не удастся. В таблице приведены оценка вероятности разорения, полученная в результате имитационного моделирования, и оценки вероятности разорения, построенные по формулам (6) и (24). Параметры $a = 1$, $b = 10$, $\mu = 1$, $\lambda = (1 + \theta) \frac{b}{a}$. Параметр $\theta = 0,05; 0,1; 1$. Объем выборки при моделировании – 50 000. Отметим, что оценка вероятности разорения, полученная путем имитационного моделирования, всегда является заниженной из-за конечности

времени моделирования процесса $S(t)$ (1). Как видно из приведенных данных, при всех значениях θ оценка (24) оказывается лучше, чем оценка (6). Выигрыш растет с увеличением нагрузки страховой премии.

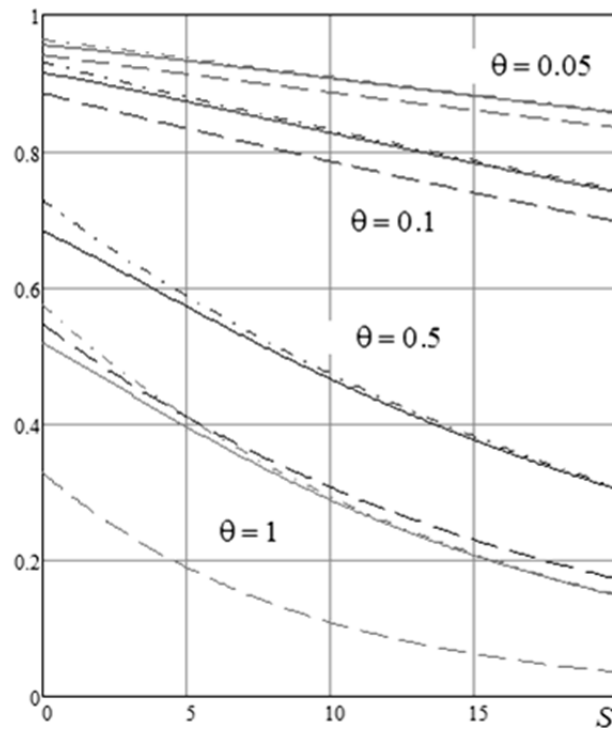


Рис. 1. Зависимость вероятности разорения от начального капитала (сплошные линии) и ее оценки, полученные по формуле (6) (штриховые линии) и формуле (24) (штрихпунктирные линии) при распределениях Эрланга страховых премий и выплат

Оценки зависимости вероятности разорения от начального капитала при постоянных страховых премиях и страховых выплатах

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Результат модел. $\theta = 0,05$	0,952	0,948	0,942	0,934	0,93	0,925	0,917	0,907	0,9	0,893	0,884
Оценка (24)	0,939	0,931	0,922	0,914	0,906	0,898	0,891	0,883	0,875	0,867	0,86
Оценка (6)	0,914	0,905	0,897	0,889	0,881	0,873	0,865	0,858	0,85	0,842	0,835
Результат модел. $\theta = 0,1$	0,91	0,899	0,891	0,88	0,871	0,858	0,846	0,834	0,817	0,799	0,781
Оценка (24)	0,886	0,871	0,856	0,842	0,828	0,814	0,8	0,786	0,773	0,76	0,747
Оценка (6)	0,836	0,821	0,806	0,792	0,778	0,764	0,75	0,737	0,724	0,711	0,698
Результат модел. $\theta = 1$	0,699	0,648	0,619	0,598	0,569	0,543	0,512	0,478	0,439	0,404	0,367
Оценка (24)	0,631	0,589	0,549	0,512	0,477	0,445	0,415	0,387	0,361	0,336	0,314
Оценка (6)	0,445	0,408	0,374	0,343	0,314	0,288	0,264	0,242	0,222	0,203	0,186

Пример 3. Гиперэкспоненциальное распределение страховых премий и выплат. Пусть страховые премии и страховые выплаты имеют гиперэкспоненциальные распределения

$$\Phi(S) = \sum_{k=1}^m A_k \alpha_k e^{-\alpha_k S}, \quad \Psi(S) = \sum_{k=1}^n B_k \beta_k e^{-\beta_k S}. \quad (33)$$

Тогда вероятность разорения $P(S)$ имеет вид [6]:

$$P(S) = \sum_{j=1}^n P_j e^{-\gamma_j S}, \quad (34)$$

где γ_i – положительные корни уравнения

$$f(z) = \lambda \sum_{k=1}^m \frac{A_k \alpha_k}{\alpha_k + z} + \mu \sum_{k=1}^n \frac{B_k \beta_k}{\beta_k - z} - \lambda - \mu = 0, \quad (35)$$

а P_j – решение системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta_k - \gamma_j} P_j = \frac{1}{\beta_k}. \quad (36)$$

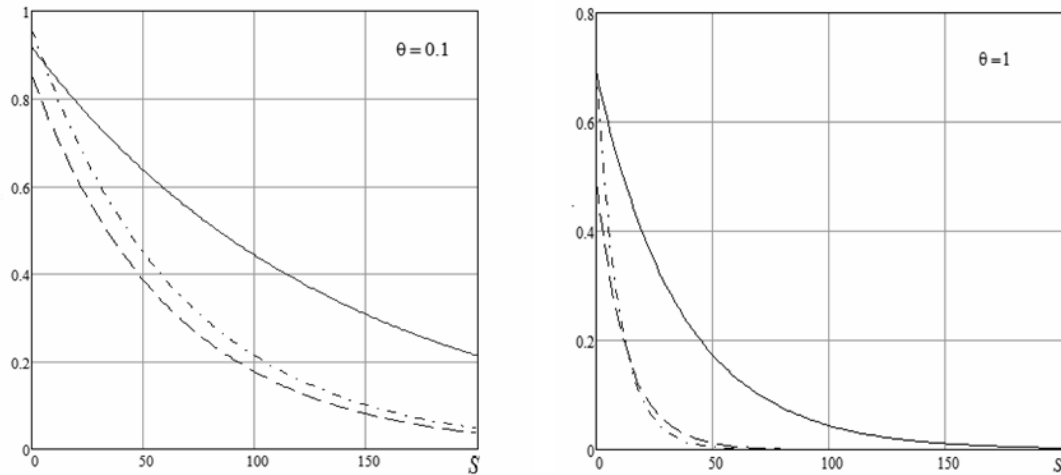


Рис. 2. Зависимость вероятности разорения от начального капитала (сплошные линии) и ее оценки, полученные по формуле (6) (штриховые линии) и формуле (24) (штрихпунктирные линии) при гиперэкспоненциальных распределениях страховых премий и выплат

На рис. 2 приведены вероятность разорения, вычисленная по формулам (34)–(35) при $m = n = 2$, и ее оценки, полученные по формулам (6) и (24) при $\theta = 0,1$ и $\theta = 1$. Параметры $a = 1, b = 10, \mu = 1, \lambda = (1 + \theta) \frac{b}{a}$. Как видно из рис. 2, в этом случае обе оценки являются плохими, но и в этом примере оценка (24) ведет себя «чуть лучше», чем оценка (6). Формально использовать оценку (24) в рассматриваемой ситуации нельзя, так как параметры аппроксимирующего процесса, вычисленные по формулам (23) и (18), отрицательны. Например, при $\theta = 0,1$ $a = -0,405, \lambda_0 = -16,762$. Однако комбинации величин, непосредственно входящие в оценку (24), положительны.

Заключение

В работе получены расчетные формулы, позволяющие вычислить оценку вероятности разорения страховой компании при произвольных распределениях страховых выплат и страховых премий для модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями. Как следует из рассмотренных примеров, во всех рассмотренных случаях точность предлагаемой оценки лучше, чем точность известной ранее оценки вероятности разорения. В принципе тот же подход может быть использован для вычисления вероятностей разорения и для более сложных моделей, например, для случая, когда и моменты поступления страховых премий образуют ММР поток [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Panjer H.Y., Wilmot G.E. Insurance Risk Models. Society of Actuaries, 1992. 442 p.
2. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбит С., Хикман Д. Актуарная Математика. М. : Янус-К, 2001. 656 с.
3. Глухова Е.В., Змеев О.А., Лившиц К.И. Математические модели страхования. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2004. 180 с.

4. Livshits K.I. Probability of Ruin of an Insurance Company for the Poisson Model // Russian Physics Journal. 1999. V. 42, No. 4. P. 394–399.
5. Бойков А.В. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и ее применение. 2002. Т. 47, вып. 3. С. 549–553.
6. Лившиц К.И., Сухотина Л.Ю. Вероятность разорения страховой компании при гиперэкспоненциальных распределениях страховых премий и страховых выплат для различных моделей страхования // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 2 (35). С. 37–45.
7. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4 (17). С. 64–73.
8. Grandell J. Simple approximation of ruin probabilities // Insurance: Mathematics and Economics. 2000. V. 26. P. 157–173.
9. De Vylder F.E. A practical solution to the problem of ultimate ruin probability // Scandinavian Actuarial Journal. 1978. P. 114–119.

Лившиц Климентий Исаакович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: kim47@mail.ru
Назаров Анатолий Андреевич, д-р техн. наук, профессор. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com
 Национальный исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 10 декабря 2016 г.

Livshits Klimenty I., Nazarov Anatoly A. (Tomsk State University, Russian Federation).

Simple approximation of an insurance company ruin probability for Cramer-Lundberg model with stochastic premiums.

Keywords: probability of ruin; Cramer-Lundberg model with stochastic premiums; ruin probabilities approximation.

DOI: 10.17223/19988605/39/4

In this paper the calculated formulas which allow to construct the simple approximation for the ruin probability of an insurance company for Cramer-Lundberg model with stochastic premiums are obtained. The approximation is based on the replacement of the true risk process with arbitrary distributions of the insurance premiums and the insurance payments

$$S(t) = S(0) + \sum_{i=1}^{m(t)} x_i - \sum_{j=1}^{n(t)} y_j,$$

where $S(0)$ is the initial capital, $m(t)$ is the number of received insurance premiums to the time t , $n(t)$ is the number of insurance payments, x_i is the value of i -th insurance premiums, y_j is the value of j -th insurance payment, $a_k = M\{x_i^k\}$, $b_k = M\{y_i^k\}$, the flow of insurance premiums is Poisson with intensity λ , the flow of insurance payments is Poisson with intensity μ , on the risk process with the insurance premiums and the insurance payments having the exponential distributions. At that the premiums flow intensives λ_0 , the payments flow intensives μ_0 , the average values of the premiums a and the payments b in the approximating process are chosen so that the first four moments of the true and approximating risk processes coincided. This requires the fulfillment of the conditions

$$\begin{aligned} d_1 &= \lambda a_1 - \mu b_1 = \lambda_0 a - \mu_0 b, \quad d_2 = \frac{1}{2}(\lambda a_2 + \mu b_2) = \lambda_0 a^2 + \mu_0 b^2, \\ d_3 &= \frac{1}{6}(\lambda a_3 - \mu b_3) = \lambda_0 a^3 - \mu_0 b^3, \quad d_4 = \frac{1}{24}(\lambda a_4 + \mu b_4) = \lambda_0 a^4 + \mu_0 b^4. \end{aligned}$$

The parameters a, b, λ_0, μ_0 are determined by the ratios

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{d_1 b + d_2}{a(a+b)}, \quad \mu_0 = \frac{d_2 - d_1 a}{b(a+b)}, \\ a &= \frac{v + \sqrt{v^2 + 4u}}{2}, \quad b = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 4u}}{2}, \end{aligned}$$

where

$$v = \frac{d_1 d_4 - d_2 d_3}{d_1 d_3 - d_2^2}, \quad u = \frac{d_3^2 - d_2 d_4}{d_1 d_3 - d_2^2}.$$

For the rating of the ruin probability is taken the ruin probability of the approximating process

$$P(S) = \frac{\mu_0(a+b)}{(\lambda_0 + \mu_0)a} e^{-\frac{\lambda_0 a - \mu_0 b}{(\lambda_0 + \mu_0)ab} S}.$$

REFERENCES

1. Panjer, H.Y. & Wilmot, G.E. (1992) *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries. Schaumburg, IL.
2. Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hekman, J.C., Jones, D.A. & Nesbitt, C.J. (1998) *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, Michigan.

3. Gluhova, E.V., Zmeev, O.A. & Livshits, K.I. (2004) *Matematicheskie modeli strakhovaniya* [Mathematical Models of Insurance]. Tomsk: Tomsk State University.
4. Livshits, K.I. (1999) Probability of Ruin of an Insurance Company for the Poisson Model. *Russian Physics Journal*. 42(4). pp. 394–399. DOI: 10.1007/BF02509675
5. Boykov, A.V. (2002) Cramer-Lundberg Model with Stochastic Premiums. *Theory of Probability and Its Applications*. 47(3). pp. 549–553. DOI: 10.1137/S0040585X9797987
6. Livshits, K. I. & Suhotina, L. Yu. (2016) Ruin Probability of an Insurance Company with Hyperexponential Distribution of Insurance Premiums and Insurance Payments for Different Insurance Models. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(35). pp. 37–45. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/35/4
7. Livshits, K.I. & Bublic, Ya.S. (2011) Ruin probability of an insurance company under double stochastic flows of insurance premium and insurance payments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17). pp. 64–73. (In Russian).
8. Grandell, J. (2000) Simple approximation of ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*. 26. pp. 157–173. DOI: 10.1016/S0167-6687(99)00050-5
9. De Vylder, F.E. (1978) A practical solution to the problem of ultimate ruin probability. *Scandinavian Actuarial Journal*. pp. 114–119. DOI: 10.1080/03461238.1978.10419484

Е.Ю. Лисовская, С.П. Моисеева

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕМАРКОВСКОЙ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕМА С ВХОДЯЩИМ РЕКУРРЕНТНЫМ ПОТОКОМ*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00292 мол_.*

Рассматривается система массового обслуживания $GI/GI/\infty$ с требованиями случайного объема. Решается задача исследования суммарного объема требований, находящихся в системе в стационарном режиме функционирования. С помощью метода асимптотического анализа при условии высокой интенсивности входящего потока доказано, что распределение вероятностей суммарного объема требований в системе является гауссовским.

Ключевые слова: бесконечнолинейная система массового обслуживания; метод динамического просеивания; случайный объем требований; метод асимптотического анализа.

При проектировании систем обработки и передачи сообщений, таких как систем коммутации сообщений и систем обработки радиолокационной информации возникает задача определения объема памяти, предназначенной для хранения информации о сообщении во время его передачи и обслуживания. Величина такого объема определяется непрерывной случайной величиной, которую будем называть суммарным объемом требований [1].

Задача определения характеристик суммарного объема требований в классических системах теории массового обслуживания и ее приложениях к решению задач проектирования компьютерных и коммутационных систем обсуждалась в работах [2–4], где исследовались некоторые характеристики таких систем в предположении, что входящий поток является простейшим, время обслуживания распределено по экспоненциальному закону, а параметры обслуживания требования могут зависеть от объема требования.

Современные потоки данных в информационных и телекоммуникационных системах включают в себя интегрированные потоки, содержащие передачу текста, голоса и видеоисточников, что требует использования более сложных моделей потоков. В качестве таких моделей, как правило, используют математические модели модулированных или рекуррентных потоков [5, 6]. Для исследования систем с входящими непуассоновскими потоками, например, рекуррентным и марковски модулированными потоками, в работах [7–9] предлагается использовать метод асимптотического анализа, позволяющий находить приемлемое для практических приложений решение в определенных условиях.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает рекуррентный поток, заданный функцией распределения длин интервалов между последовательными моментами поступления заявок в систему $A(x)$. Продолжительность обслуживания заявки имеет произвольную функцию распределения, одинаковую для всех приборов $B(x)$. Предполагаем, что каждое требование характеризуется некоторым случайным объемом $v > 0$, $G(y) = P\{v < y\}$ – функция распределения случайной величины v . Объемы различных требований независимы. По окончании обслуживания заявка покидает систему и «уносит» свой объем.

Пусть $i(t)$ – число заявок, находящихся на обслуживании в системе в момент t , $V(t)$ – полная сумма объемов требований, находящихся в системе в момент времени t .

Поставим задачу нахождения характеристик двумерного случайного процесса $\{i(t), V(t)\}$. Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Поэтому для его исследования будем использовать метод динамического просеивания [10].

Построим просеянный поток для рассматриваемой СМО GI|GI| ∞ . Для этого зафиксируем некоторый момент времени T . Полагаем, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t < T$ с вероятностью

$$S(t) = 1 - B(T - t),$$

формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1 - S(t)$ эта заявка в просеянном потоке не рассматривается.

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t , $W(t)$ – суммарный объем просеянных требований. Тогда, если в начальный момент $t_0 < T$ система была свободна, то для момента времени T для любых m и v выполняются равенства

$$P\{i(T) = m\} = P\{n(T) = m\}, \quad P\{V(T) < v\} = P\{W(T) < v\}.$$

Следует отметить, что использование метода просеянного потока позволяет точно определить характеристики процесса $V(t)$, так как в просеянном потоке присутствуют только те заявки, которые не закончат обслуживание к моменту времени T .

2. Дифференциальное уравнение Колмогорова

Введем обозначение $P(z, n, w, t) = P\{z(t) < z, n(t) = n, W(t) < w\}$ – распределение вероятностей трехмерного Марковского процесса, где $z(t)$ – остаточное время от момента t до момента наступления следующего события в исходном рекуррентном потоке. Для этого распределения составим Δt -методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности запишем равенство

$$\begin{aligned} P(z, n, w, t + \Delta t) = & [P(z + \Delta t, n, w, t) - P(\Delta t, n, w, t)] + P(\Delta t, n, w, t)(1 - S(t))A(z) + \\ & + S(t)A(z) \int_0^v P(\Delta t, n - 1, w - y, t) dG(y) + o(\Delta t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$z > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad w > 0.$$

Из (1) получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(z, n, w, t)}{\partial t} = & \frac{\partial P(z, n, w, t)}{\partial z} + \frac{\partial P(0, n, w, t)}{\partial z} (A(z) - 1) + \\ & + S(t)A(z) \left[\int_0^v \frac{\partial P(0, n - 1, w - y, t)}{\partial z} dG(y) - \frac{\partial P(0, n, w, t)}{\partial z} \right], \end{aligned}$$

$$z > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad w > 0,$$

с начальным условием

$$P(z, n, w, t_0) = \begin{cases} R(z), & n = 0, w > 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь и далее $R(z)$ – стационарное распределение вероятностей значений случайного процесса $z(t)$, определяемое выражением

$$R(z) = \lambda \int_0^z (1 - A(x)) dx, \quad \text{где } \lambda = \frac{1}{\int_0^\infty (1 - A(x)) dx}.$$

Введем частичную характеристическую функцию вида

$$h(z, u_1, u_2, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ju_1 n} \int_0^\infty e^{ju_2 w} P(z, n, dw, t), \quad z > 0.$$

Учитывая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{ju_1 n} \int_0^{\infty} e^{ju_2 w} \int_0^v \frac{\partial P(0, n-1, d(w-y), t)}{\partial z} dG(y) = e^{ju_1} \frac{\partial h(0, u_1, u_2, t)}{\partial z} G^*(u_2),$$

где $G^*(u_2)$ определяется как

$$G^*(u_2) = \int_0^{\infty} e^{ju_2 y} dG(y),$$

можно записать дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial h(z, u_1, u_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(z, u_1, u_2, t)}{\partial z} + \frac{\partial h(0, u_1, u_2, t)}{\partial z} [A(z) - 1 + S(t)A(z)(e^{ju_1} G^*(u_2) - 1)] \quad (2)$$

с начальным условием

$$h(z, u_1, u_2, t_0) = R(z). \quad (3)$$

3. Метод асимптотического анализа

Так как прямое решение уравнения (2) не представляется возможным, то для решения задачи (2)–(3) воспользуемся методом асимптотического анализа [11] в условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока [10]. Запишем функцию распределения длин интервалов между моментами поступления заявок в систему в виде $A(Nz)$, где $N \rightarrow \infty$ – параметр высокой интенсивности потока.

Тогда, выполнив преобразования, уравнение (2) примет вид

$$\frac{1}{N} \frac{\partial h(z, u_1, u_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(z, u_1, u_2, t)}{\partial z} + \frac{\partial h(0, u_1, u_2, t)}{\partial z} [A(z) - 1 + S(t)A(z)(e^{ju_1} G^*(u_2) - 1)] \quad (4)$$

с начальным условием

$$h(z, u_1, u_2, t_0) = R(z). \quad (5)$$

Асимптотический анализ первого порядка проведем в виде доказательства теоремы 1.

Теорема 1. Асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей процесса $\{z(t), n(t), V(t)\}$ первого порядка имеет вид

$$h(z, u_1, u_2, t) = R(z) \exp \left\{ N \lambda \left[ju_1 + ju_2 a_1 \right] \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\},$$

где a_1 – математическое ожидание случайной величины, определяемой функцией распределения объема требований $G(y)$.

Доказательство. Выполним в выражениях (4) и (5) замены

$$\varepsilon = \frac{1}{N}, \quad u_1 = \varepsilon w_1, \quad u_2 = \varepsilon w_2, \quad h(z, u_1, u_2, t) = f_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon). \quad (6)$$

Тогда задача (4)–(5) примет вид

$$\varepsilon \frac{\partial f_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial f_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial f_1(0, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial z} [A(z) - 1 + S(t)A(z)(e^{j\varepsilon w_1} G^*(\varepsilon w_2) - 1)] \quad (7)$$

с начальным условием

$$f_1(z, w_1, w_2, t_0, \varepsilon) = R(z). \quad (8)$$

Найдем асимптотическое, при $\varepsilon \rightarrow 0$, решение задачи (7)–(8), т.е. $f_1(z, w_1, w_2, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon)$.

Этап 1. Положим в (7) $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial f_1(z, w_1, w_2, t)}{\partial z} + \frac{\partial f_1(0, w_1, w_2, t)}{\partial z} (A(z) - 1) = 0.$$

Можем сделать вывод, что $f_1(z, w_1, w_2, t)$ может быть представлена в виде

$$f_1(w_1, w_2, t) = R(z) \Phi_1(w_1, w_2, t), \quad (9)$$

где $\Phi_1(w_1, w_2, t)$ – некоторая скалярная функция, в силу (8) удовлетворяющая условию $\Phi_1(w_1, w_2, t_0) = 1$.

Этап 2. Выполним в (7) предельный переход $z \rightarrow \infty$. Получим

$$\varepsilon \frac{\partial f_1(\infty, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial f_1(0, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial z} S(t) (e^{j\varepsilon w_1} G^*(\varepsilon w_2) - 1).$$

Подставим сюда выражение (9), воспользуемся разложениями

$$e^{j\varepsilon w_1} = 1 + j\varepsilon w_1 + O(\varepsilon^2), \quad e^{j\varepsilon w_2} = 1 + j\varepsilon w_2 + O(\varepsilon^2),$$

поделим обе части на ε и произведем предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$. С учетом того, что $R'(0) = \lambda$ [10], получим дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi_1(w_1, w_2, t)$:

$$\frac{\partial \Phi_1(w_1, w_2, t)}{\partial t} = \Phi_1(w_1, w_2, t) [\lambda S(t) (jw_1 + jw_2 a_1)], \quad (10)$$

здесь и далее $a_1 = \int_0^\infty y dG(y)$ – математическое ожидание случайной величины, определяемой функцией распределения объема требований $G(y)$. Решение (10) с учетом начального условия дает

$$\Phi_1(w_1, w_2, t) = \exp \left\{ \lambda (jw_1 + jw_2 a_1) \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}.$$

Подставляя данное выражение в (9), получаем

$$f_1(w_1, w_2, t) = R(z) \exp \left\{ \lambda (jw_1 + jw_2 a_1) \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}.$$

В силу замен (6) можно записать асимптотическое, при $\varepsilon \rightarrow 0$, приближенное равенство:

$$\begin{aligned} h(z, u_1, u_2, t) &= f_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon) \approx f_1(z, w_1, w_2, t) = R(z) \Phi_1(w_1, w_2, t) = \\ &= R(z) \exp \left\{ \lambda \left[j \frac{u_1}{\varepsilon} + j \frac{u_2}{\varepsilon} a_1 \right] \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\} = R(z) \exp \left\{ N\lambda [ju_1 + ju_2 a_1] \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Функция $h(u_1, u_2, t) = \lim_{z \rightarrow \infty} h(z, u_1, u_2, t)$ есть характеристическая функция для процесса $\{n(t), V(t)\}$ – числа событий, наступивших в просеянном потоке к моменту времени t и суммарного объема требований в просеянном потоке к моменту времени t .

Следствие. Полагая $t = T$, $t_0 = -\infty$, для характеристической функции процесса $\{i(t), V(t)\}$ в стационарном режиме получим

$$h(u_1, u_2) = \exp \{ N\lambda b_1 [ju_1 + ju_2 a_1] \},$$

здесь и далее

$$b_1 = \int_0^\infty (1 - B(\tau)) d\tau$$

определяет математическое ожидание случайной величины с функцией распределения $B(x)$.

Асимптотический анализ второго порядка проведем в виде доказательства теоремы 2.

Теорема 2. Асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей процесса $\{z(t), n(t), V(t)\}$ второго порядка имеет вид

$$\begin{aligned} h(z, u_1, u_2, t) &= R(z) \exp \left\{ N\lambda (ju_1 + ju_2 a_1) \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \frac{(ju_1)^2}{2} \left(N\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + N\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(ju_2)^2}{2} \left(N\lambda a_2 \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + Na_1^2 \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right) + (j)^2 u_1 u_2 \left(N\lambda a_1 \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + Na_1 \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\kappa = 2(f'(0) - \lambda f(\infty)),$$

a_2 – второй начальный момент случайной величины, определяемой функцией $G(y)$; функция $f(z)$ – некоторая функция.

Доказательство. В уравнении (4) выполним замену

$$h(z, u_1, u_2, t) = h_2(z, u_1, u_2, t) \exp \left\{ N \lambda (ju_1 + ju_2 a_1) \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau \right\}, \quad (11)$$

получим уравнение относительно функции $h_2(z, u_1, u_2, t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \frac{\partial h_2(z, u_1, u_2, t)}{\partial t} + \lambda (ju_1 + ju_2 a_1) S(t) h_2(z, u_1, u_2, t) = \\ & = \frac{\partial h_2(z, u_1, u_2, t)}{\partial z} + \frac{\partial h_2(0, u_1, u_2, t)}{\partial z} [A(z) - 1 + S(t) A(z) (e^{ju_1} G^*(u_2) - 1)], \end{aligned} \quad (12)$$

с начальным условием

$$h_2(z, u_1, u_2, t_0) = R(z). \quad (13)$$

Выполним здесь следующие замены:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N}, \quad u_1 = \varepsilon w_1, \quad u_2 = \varepsilon w_2, \quad h_2(z, u_1, u_2, t) = f_2(z, w_1, w_2, t, \varepsilon). \quad (14)$$

С использованием этих обозначений задача (12)–(13) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial f_2(z, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} + f_2(z, w_1, w_2, t, \varepsilon) \lambda (j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1) S(t) = \frac{\partial f_2(z, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial f_2(0, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial z} [A(z) - 1 + S(t) A(z) (e^{j\varepsilon w_1} G^*(\varepsilon w_2) - 1)] \end{aligned} \quad (15)$$

с начальным условием

$$f_2(z, w_1, w_2, t_0, \varepsilon) = R(z). \quad (16)$$

Найдем асимптотическое, при $\varepsilon \rightarrow 0$, решение этой задачи, т.е. $f_2(z, w_1, w_2, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_2(z, w_1, w_2, t, \varepsilon)$.

Этап 1. Выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ в (15), получим

$$\frac{\partial f_2(z, w_1, w_2, t)}{\partial z} + \frac{\partial f_2(0, w_1, w_2, t)}{\partial z} (A(z) - 1) = 0.$$

Отсюда следует, что $f_2(z, w_1, w_2, t)$ можно записать в виде

$$f_2(z, w_1, w_2, t) = R(z) \Phi_2(w_1, w_2, t), \quad (17)$$

где $\Phi_2(w_1, w_2, t)$ – некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию $\Phi_2(w_1, w_2, t_0) = 1$.

Этап 2. Решение уравнения (15) запишем в виде разложения

$$f_2(z, w_1, w_2, t, \varepsilon) = \Phi_2(w_1, w_2, t) [R(z) + (j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1) S(t) f(z)] + O(\varepsilon^2), \quad (18)$$

где $f(z)$ – некоторая функция. Подставим это выражение в (15). Используя разложения

$$e^{j\varepsilon w_1} = 1 + j\varepsilon w_1 + O(\varepsilon^2), \quad e^{j\varepsilon w_2} = 1 + j\varepsilon w_2 + O(\varepsilon^2),$$

получим

$$\begin{aligned} & \lambda (j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1) S(t) R(z) \Phi_2(w_1, w_2, t) = \Phi_2(w_1, w_2, t) \{ R'(z) + \\ & + (j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1) S(t) f'(z) + \lambda (A(z) - 1) + \lambda S(t) A(z) (j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1) + \\ & + f'(0) S(t) (j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1) (A(z) - 1) \} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$R'(z) = \lambda (1 - A(z)),$$

приведя подобные и сократив обе части на $(j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1) S(t)$, получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $f(z)$:

$$\lambda R(z) = f'(z) + f'(0) [A(z) - 1] + \lambda A(z),$$

решение которого дает следующий результат:

$$f(z) = \lambda \int_0^z (A(u) - F(u)) du + f'(0) \int_0^z (A(u) - 1) du.$$

Нетрудно показать, что

$$f'(0) = \lambda f(\infty) + \frac{\kappa}{2}, \quad (19)$$

где величина κ определяется по формуле $\kappa = \lambda^3(\sigma^2 - a^2)$ [10], величины a и σ^2 – математическое ожидание и дисперсия случайной величины с функцией распределения $A(x)$.

Этап 3. В (15) выполним предельный переход при $z \rightarrow \infty$. В силу способа построения функции $F_2(z, w_1, w_2, t, \varepsilon)$ она является монотонно возрастающей и ограниченной сверху функцией по z . Следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\partial f_2(z, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial z} = 0.$$

Учитывая это и применяя разложения

$$e^{j\varepsilon w_1} = 1 + j\varepsilon w_1 + \frac{(j\varepsilon w_1)^2}{2} + O(\varepsilon^3), \quad e^{j\varepsilon w_2} = 1 + j\varepsilon w_2 + \frac{(j\varepsilon w_2)^2}{2} + O(\varepsilon^3),$$

в результате несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial f_2(\infty, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} + f_2(\infty, w_1, w_2, t, \varepsilon) \lambda (j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1) S(t) = \\ & = \frac{\partial f_2(0, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial z} S(t) \left(j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1 + \frac{(j\varepsilon w_1)^2}{2} + \frac{(j\varepsilon w_2)^2}{2} a_2 + (j\varepsilon w_1)(j\varepsilon w_2) a_1 + O(\varepsilon^3) \right). \end{aligned}$$

Подставим сюда разложение (18), при $z \rightarrow \infty$ запишем

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2, t)}{\partial t} + \lambda (j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1) S(t) \Phi_2(w_1, w_2, t) + \\ & + \lambda \left((j\varepsilon w_1)^2 + 2(j\varepsilon w_1)(j\varepsilon w_2) a_1 + (j\varepsilon w_2 a_1)^2 \right) S^2(t) f(\infty) \Phi_2(w_1, w_2, t) = \\ & = \Phi_2(w_1, w_2, t) \lambda S(t) \left(j\varepsilon w_1 + j\varepsilon w_2 a_1 + \frac{(j\varepsilon w_1)^2}{2} + \frac{(j\varepsilon w_2)^2}{2} a_2 + (j\varepsilon w_1)(j\varepsilon w_2) a_1 \right) + \\ & + \left((j\varepsilon w_1)^2 + 2(j\varepsilon w_1)(j\varepsilon w_2) a_1 + (j\varepsilon w_2 a_1)^2 \right) S^2(t) \frac{\partial f(0)}{\partial z} \Phi_2(w_1, w_2, t) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Приводя подобные слагаемые и сокращая на ε^2 , учитывая (19) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\Phi_2(w_1, w_2, t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi_2(w_1, w_2, t)}{\partial t} = \Phi_2(w_1, w_2, t) \left\{ \frac{(jw_1)^2}{2} (\lambda S(t) + \kappa S^2(t)) + \right. \\ & \left. + \frac{(jw_2)^2}{2} (\lambda a_2 S(t) + a_1^2 \kappa S^2(t)) + (jw_1)(jw_2) (\lambda a_1 S(t) + a_1 \kappa S^2(t)) \right\}. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения с учетом начального условия, имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_2(w_1, w_2, t) = \exp & \left\{ \frac{(jw_1)^2}{2} \left(\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right) + \frac{(jw_2)^2}{2} \left(\lambda a_2 \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + a_1^2 \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right) + \right. \\ & \left. + (jw_1)(jw_2) \left(\lambda a_1 \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + a_1 \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right) \right\}, \end{aligned}$$

подставляя которое в (17), получаем

$$f_2(z, w_1, w_2, t) = R(z) \exp \left\{ \frac{(jw_1)^2}{2} \left(\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right) + \right. \\ \left. + \frac{(jw_2)^2}{2} \left(\lambda a_2 \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + a_1^2 \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right) + (jw_1)(jw_2) \left(\lambda a_1 \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + a_1 \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right) \right\}. \quad (20)$$

Выполним в выражении (20) замены, обратные к (14) и (11), получим следующее выражение для асимптотической характеристической функции $H(z, u_1, u_2, t)$ числа событий просеянного потока, наступивших до момента времени t , и суммарного объема требований, находящихся в просеянном потоке в момент времени t :

$$h(z, u_1, u_2, t) = R(z) \exp \left\{ N\lambda(ju_1 + ju_2 a_1) \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + \frac{(ju_1)^2}{2} \left(N\lambda \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + N\kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right) + \right. \\ \left. + \frac{(ju_2)^2}{2} \left(N\lambda a_2 \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + Na_1^2 \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right) + (ju_1)(ju_2) \left(N\lambda a_1 \int_{t_0}^t S(\tau) d\tau + Na_1 \kappa \int_{t_0}^t S^2(\tau) d\tau \right) \right\}.$$

Теорема доказана.

Функция $h(u_1, u_2, t) = \lim_{z \rightarrow \infty} h(z, u_1, u_2, t)$ есть характеристическая функция для процесса $\{n(t), V(t)\}$ – числа событий, наступивших в просеянном потоке к моменту времени t и суммарного объема требований в просеянном потоке к моменту времени t .

Следствие 1. Полагая $t = T$, $t_0 = -\infty$, для характеристической функции процесса $\{i(t), V(t)\}$ в стационарном режиме получим

$$h(u_1, u_2) = \exp \left\{ ju_1 N\lambda b_1 + ju_2 N\lambda b_1 a_1 + \frac{(ju_1)^2}{2} (N\lambda b_1 + N\kappa b_2) + \right. \\ \left. + \frac{(ju_2)^2}{2} (N\lambda a_2 b_1 + Na_1^2 \kappa b_2) + (ju_1)(ju_2) (N\lambda a_1 b_1 + Na_1 \kappa b_2) \right\}, \quad (21)$$

где

$$b_2 = \int_0^\infty (1 - B(\tau))^2 d\tau.$$

Из вида функции (21) очевидно, что двумерный процесс $\{i(t), V(t)\}$ является асимптотически гауссовским с вектором математических ожиданий

$$\mathbf{a} = N \cdot [\lambda b_1 \quad \lambda a_1 b_1]$$

и ковариационной матрицей

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = N \cdot \begin{bmatrix} \lambda b_1 + \kappa b_2 & \lambda a_1 b_1 + a_1 \kappa b_2 \\ \lambda a_1 b_1 + a_1 \kappa b_2 & \lambda a_2 b_1 + a_1^2 \kappa b_2 \end{bmatrix}.$$

Следствие 2. Асимптотическая характеристическая функция суммарного объема требований в системе в стационарном режиме имеет вид гауссовской характеристической функции

$$h(u, t) = \exp \left\{ ju N\lambda a_1 b_1 + \frac{(ju)^2}{2} (N\lambda a_2 b_1 + Na_1^2 \kappa b_2) \right\}$$

с параметрами $a = N\lambda a_1 b_1$ и $\sigma^2 = N\lambda a_2 b_1 + Na_1^2 \kappa b_2$.

Заключение

В результате проведенного исследования построена математическая модель обслуживания требований случайного объема в бесконечнолинейной системе массового обслуживания GI|GI| ∞ . С помощью

метода асимптотического анализа при условии высокой интенсивности входящего потока доказано, что распределение вероятностей суммарного объема требований в системе является гауссовским.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моделирование процессов и систем обработки информации: курс лекций / О.М. Тихоненко. Минск : БГУ, 2008. 148 с.
2. Sengupta B. The Spatial Requirement of M/G/1 Queue or: How to Design for Buffer Space Modeling and Performance Evaluation Methodology // Lect. Notes Contr. Inf. Sci. / eds. by F. Baccelli, G. Fayolle. Berlin, 1984. V. 60. P. 547–562.
3. Тихоненко О.М. Распределение суммарного объема сообщений в системах массового обслуживания с групповым поступлением // Автоматика и телемеханика. 1987. № 11. С. 111–120.
4. Тихоненко О.М. Распределение суммарного объема сообщений в однолинейной системе массового обслуживания с групповым поступлением // Автоматика и телемеханика. 1985. № 11. С. 78–83.
5. Kang S.H., Kim Y.H., Sung D.K., Choi B.D. An application of Markovian Arrival Process to modeling superposed ATM cell streams // IEEE Transactions on Communications. 2002. V. 50, No. 4. P. 633–642.
6. Klemm A., Lindermann C., Lohmann M. Modelling IP traffic using the batch Markovian arrival process // Performance Evaluation. 2003. V. 54. P. 149–173.
7. Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П. Асимптотический анализ системы $MMPP|GI|_{\infty}$ с обслуживанием требований случайного объема // Труды Томского государственного университета. Т. 299. Сер. физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы IV Междунар. молодеж. науч. конф. Томск, 20–21 мая 2016 г. / под общ. ред. И.С. Шмырина. Томск : Издательский Дом Том. гос. ун-та, 2016. С. 99–104.
8. Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объема с входящим $MMPP$ -поток // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016) : материалы XV Междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова (12–16 сентября 2016 г.). Томск : Изд-во Том. ун-та, 2016. Ч. 1. С. 77–82.
9. Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П. Суммарный объем заявок в бесконечнолинейной системе массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016) = Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2016) : материалы Девятнадцатой междунар. науч. конф., 21–25 нояб. 2016 г. : в 3 т. / под общ. ред. В.М. Вишневого, К.Е. Самуйлова. М. : РУДН, 2016. С. 313–325.
10. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания / А.Н. Моисеев, А.А. Назаров. Томск : Изд-во НТЛ, 2015. 240 с.
11. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, С.П. Моисеева. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Лисовская Екатерина Юрьевна. E-mail: ekaterina_lisovs@mail.ru

Моисеева Светлана Петровна, д-р физ.-мат. наук, доцент. E-mail: smoiseeva@mail.ru

Национальный Исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 30 декабря 2016 г.

Lisovskaya Ekaterina Yu., Moiseeva Svetlana P. (National Research Tomsk State University, Russian Federation).

Asymptotical analysis of a non-Markovian queueing system with renewal input process and random capacity of customers.

Keywords: Infinite-server Queue; dynamic screening method; customer with random capacity; asymptotic analysis method.

DOI: 10.17223/19988605/39/5

In this paper, the GI/GI_{∞} queueing system (QS) with random capacity customers is studied. The arrival process is a Renewal process. The system has an unlimited number of servers and service times on each server are i.i.d. with distribution function $B(x)$. All customers have a random capacity $v > 0$ with probability distribution $G(v) = P\{v < y\}$ and the customers capacities are independent. Moreover, we assume that service time and customers capacity are mutually independent. After the service, customers leave the system and "take away" the capacity.

We considered two-dimensional stochastic process $\{i(t), V(t)\}$, where $i(t)$ and $V(t)$ denote the number of customers in the system and the total customers capacity at time t , respectively.

We proposed the dynamic screening method for its investigation. Note that this method exactly determines the characteristics of the process $V(t)$ since the screened process contains only those customers, which do not finish the service at the moment T .

We obtained the system of Kolmogorov differential equations and by using the partial characteristic function, we wrote the main equation:

$$\frac{\partial h(z, u_1, u_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(z, u_1, u_2, t)}{\partial z} + \frac{\partial h(0, u_1, u_2, t)}{\partial z} [A(z) - 1 + S(t)A(z)(e^{ju_1} G^*(u_2) - 1)]$$

with the initial condition

$$h(z, u_1, u_2, t_0) = R(z).$$

By using the asymptotic analysis method under the condition of an infinitely growing arrival rate, we obtained that in steady state regime the characteristic function of the customers number in the system and the total customers capacity corresponds to a two-dimensional Gaussian distribution

$$h(u_1, u_2) = \exp \left\{ ju_1 N \lambda b_1 + ju_2 N \lambda a_1 b_1 + \frac{(ju_1)^2}{2} (N \lambda b_1 + N \kappa b_2) + \frac{(ju_2)^2}{2} (N \lambda a_2 b_1 + N a_1^2 \kappa b_2) + (ju_1)(ju_2)(N \lambda a_1 b_1 + N a_1 \kappa b_2) \right\},$$

and the asymptotic characteristic function of the total customers capacity corresponds to a Gaussian distribution

$$h(u, t) = \exp \left\{ ju N \lambda a_1 b_1 + \frac{(ju)^2}{2} (N \lambda a_2 b_1 + N a_1^2 \kappa b_2) \right\}.$$

REFERENCES

1. Tihonenko, O.M. (2008) *Modelirovanie protsessov i system obrabotki informatsii* [Modelling of processes and information processing systems: lectures]. Minsk: BSU.
2. Sengupta, B. (1984) The Spatial Requirement of M/G/1 Queue or: How to Design for Buffer Space Modeling and Performance Evaluation Methodology. In: Baccelli, F. & Fayolle, G. (eds) *Lect. Notes Contr. Inf. Sci.* Vol. 60. Berlin. pp. 547–562.
3. Tihonenko, O.M. (1987) Raspredelenie summarnogo ob"ema soobshcheniy v sistemakh massovogo obsluzhivaniya s gruppovym postupleniem [Distribution of the total volume of messages in a queuing system with batch arrival]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 11. pp. 111–120.
4. Tihonenko, O.M. (1985) Raspredelenie summarnogo ob"ema soobshcheniy v odnolineynoy sisteme massovogo obsluzhivaniya s gruppovym postupleniem [Distribution of the total volume of messages in a single-server queuing system with batch arrival]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 11. pp. 78–83.
5. Kang, S.H., Kim, Y.H., Sung, D.K. & Choi, B.D. (2002) An application of Markovian Arrival Process to modeling superposed ATM cell streams. *IEEE Transactions on Communications*. 50(4). pp. 633–642.
6. Klemm, A., Lindermann, C. & Lohmann, M. (2003) Modelling IP traffic using the batch Markovian arrival process. *Performance Evaluation*. 54. pp. 149–173. DOI: 10.1016/S0166-5316(03)00067-1
7. Lisovskaya, E.Yu. & Moiseeva, S.P. (2016) [Asymptotic analysis MMPP|GI| ∞ queue with random customers capacity]. *Matematicheskoe i pro-grammnoe obespechenie informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software information, technical and economic systems]. Proc. of the 4th International Youth Scientific Conference. Tomsk: Tomsk State University. pp. 99–104. (In Russian).
8. Lisovskaya, E.Yu. & Moiseeva, S.P. (2016) [Study of infinite-server queue with random customers capacity with the MMPP arrives]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2016)* [Information technology and mathematical modeling (ITMM 2016)]. Proc. of the 15th International Conference named after A.F. Terpuhov. Vol. 1. Tomsk: Tomsk State University. pp. 77–82. (In Russian).
9. Lisovskaya, E.Yu. & Moiseeva, S.P. (2016) [The total volume of customers in the infinite-server queuing system with renewal input process]. *Raspredelennye komp'yuternye i telekommunikatsionnye seti: upravlenie, vychislenie, svyaz' (DCCN-2016)* [Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2016)]. Proc. of the 19th International Conference. Moscow: PFUR. pp. 313–325. (In Russian).
10. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2015) *Beskonechnolinyne sistemy i seti massovogo obsluzhivaniya* [Queuing systems and networks with infinite number of servers]. Tomsk: NTL.
11. Nazarov, A.A. & Moiseeva, S.P. (2006) *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Method of asymptotic analysis in queuing theory]. Tomsk: NTL.

Г.А. Медведев

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ДОХОДНОСТИ

Рассматривается возможность представления временных структур доходности в виде полиномов и степенных рядов в моделях с процессами краткосрочной процентной ставки, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями с полиномиальными функциями дрейфа и диффузии. Показано, что такое представление имеет место только в случае, когда функции дрейфа и диффузии – полиномы не выше первого порядка.

Ключевые слова: диффузионные модели процентных ставок; функции дрейфа и диффузии; временные структуры доходности.

Проблема представления временных структур степенными рядами связана с решением бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов ряда. Эта система уравнений имеет особенности, не позволяющие получить ее решение в аналитическом виде в общем случае. В тех частных случаях, когда это удалось сделать, представление временной структуры в виде степенного ряда не существует, поскольку коэффициенты ряда не удовлетворяют требуемым свойствам. Результаты иллюстрируются для известных моделей процессов краткосрочной процентной ставки Ана–Гао и CIR (1980).

1. Временная структура доходности

Пусть состояние финансового рынка описывается процентной ставкой $r(t)$, которая следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dr(t) = \mu(r(t)) dt + \sigma(r(t)) dw(t)$$

с функцией дрейфа $\mu(x)$, функцией волатильности $\sigma(x)$ и стандартным винеровским процессом $w(t)$.

Уравнение временной структуры, определяющее зависимость цены бескупонной облигации $P(r, \tau)$ от срока до ее погашения τ , в этом случае имеет вид [1]:

$$-\frac{\partial P(r, \tau)}{\partial \tau} + (\mu(r) - \lambda(r)\sigma(r)) \frac{\partial P(r, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2(r) \frac{\partial^2 P(r, \tau)}{\partial r^2} - r P(r, \tau) = 0.$$

Для упрощения записи введем функцию дрейфа $m(r) = \mu(r) - \lambda(r)\sigma(r)$ и функцию диффузии $s(r) = 0,5 \sigma^2(r)$. При этом уравнение временной структуры преобразуется к виду

$$-\frac{\partial P(r, \tau)}{\partial \tau} + m(r) \frac{\partial P(r, \tau)}{\partial r} + s(r) \frac{\partial^2 P(r, \tau)}{\partial r^2} - r P(r, \tau) = 0, \quad P(r, 0) = 1.$$

Обозначим $\ln P(r, \tau) = z(r, \tau)$. Тогда можно записать уравнение временной структуры для функции $z(r, \tau)$ в следующем виде:

$$-\frac{\partial z(r, \tau)}{\partial \tau} + m(r) \frac{\partial z(r, \tau)}{\partial r} + s(r) \left[\frac{\partial^2 z(r, \tau)}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial z(r, \tau)}{\partial r} \right)^2 \right] - r = 0, \quad z(r, 0) = 0. \quad (1)$$

Предположим, что функции дрейфа $m(r)$ и диффузии $s(r)$ являются полиномами, т.е.

$$m(r) = \sum_{i=0}^{\beta} b_i r^i, \quad s(r) = \sum_{i=0}^{\alpha} c_i r^i.$$

Возникает вопрос, может ли в этом случае решение уравнения (1) тоже представляться в форме полинома по переменной r , т.е. существует ли полином

$$z(\tau, r) = \sum_{i=0}^k a_i(\tau) r^i, \quad (2)$$

удовлетворяющий уравнению (1)?

Подстановка представления (2) в уравнение (1) приводит к тому, что левая часть равенства (1) будет суммой трех полиномов по переменной r , которые условно назовем полиномом доходности, полиномом дрейфа и полиномом диффузии.

Полином доходности

$$-\frac{\partial z(r, \tau)}{\partial \tau} - r = -\sum_{i=0}^k a'_i(\tau) r^i - r$$

имеет степень k (штрих обозначает производную по τ).

Полином дрейфа степени $\beta + k - 1$ имеет вид

$$m(r) \frac{\partial z(r, \tau)}{\partial r} = \sum_{i=0}^{\beta} \sum_{j=1}^k j b_i a_j(\tau) r^{i+j-1}.$$

Полином диффузии имеет степень $\alpha + 2k - 2$ и определяется выражением

$$s(r) \left[\frac{\partial^2 z(r, \tau)}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial z(r, \tau)}{\partial r} \right)^2 \right] = \sum_{i=0}^{\alpha} c_i r^i \left[\sum_{j=2}^k j(j-1) a_j(\tau) r^{j-2} + \left(\sum_{j=1}^k j a_j(\tau) r^{j-1} \right)^2 \right].$$

Это выражение выписано для случая, когда $k \geq 2$. Если это неравенство не выполняется, то первая сумма в квадратных скобках отсутствует.

Поскольку постановка задачи предполагает, что рассматриваемая модель задана, то функции $\mu(r)$, $\sigma(r)$ и $\lambda(r)$ известны. Следовательно, наборы параметров $\{b_i\}$ и $\{c_i\}$ тоже являются известными. Таким образом, задача состоит в определении набора функций $\{a_i(\tau)\}$, которые определяют решение (2), если оно существует.

2. Временная структура как полином

Как мы выяснили, левая часть уравнения (1) представляет из себя полином по переменной r степени $\gamma \equiv \max\{k, \alpha + 2k - 2, \beta + k - 1\} \geq k$. Этот полином равномерно по r равен нулю. Поскольку степенные функции $\{r^i\}$ линейно независимы, то в этом случае коэффициенты при r^i , $i = 0, 1, 2, \dots, \gamma$, должны быть равны нулю. Это дает систему $(\gamma + 1)$ уравнений для определения $(k + 1)$ функций $a_i(\tau)$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Заметим, что $(k + 1)$ уравнений этой системы являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, а остальные $(\gamma - k)$ уравнений нелинейные алгебраические. Когда $\gamma > k$, система уравнений относительно функций $a_i(\tau)$ является переопределенной. Сделаем также естественные предположения, что α , β и k – целые числа, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $k \geq 1$.

Пусть $\delta \equiv \max\{\alpha + 2k - 2, \beta + k - 1\}$. Рассмотрим последовательно все три возможных случая: $k > \delta$, $k = \delta$, $k < \delta$.

Предположим, что $k > \delta$. Найдём все возможные пары чисел $\{\alpha, \beta\}$, которые соответствуют этому предположению. Для этого нужно решить следующую систему неравенств: $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $k \geq 1$, $k > \beta + k - 1$, $k > \alpha + 2k - 2$. Два последние неравенства дают $\beta < 1$, $\alpha + k < 2$. Поэтому получаем, что существует единственный вариант возможного решения уравнения (1): $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $k = 1$.

Для определения функций $a_i(\tau)$, $i = 0, 1$, получаем систему уравнений

$$a'_0(\tau) = b_0 a_1(\tau) + c_0 a_1^2(\tau), \quad a_0(0) = 0; \quad a'_1(\tau) = -1, \quad a_1(0) = 0,$$

решение которой имеет вид

$$a_1(\tau) = -\tau, \quad a_0(\tau) = -b_0 \tau^2/2 + c_0 \tau^3/3.$$

Наконец, решение (2) уравнения (1) выглядит следующим образом:

$$z(\tau, r) = -b_0\tau^2/2 + c_0\tau^3/3 - \tau r.$$

Поэтому временная структура доходности в этом случае будет иметь вид полинома первой степени по переменной r :

$$y(\tau, r) = -\frac{z(\tau, r)}{\tau} = r + \frac{b_0\tau}{2} - \frac{c_0\tau^2}{3}.$$

Заметим, что цена облигации с такой доходностью рассматривалась Р. Мертоном [2].

Предположим теперь, что $k = \delta$. В этом случае имеется три варианта построения решения:

$$\begin{aligned} \{\beta + k - 1 = k, \alpha + 2k - 2 < k\}, \text{ откуда } \beta = 1, \alpha + k < 2 \text{ и } \alpha = 0, \beta = 1, k = 1; \\ \{\beta + k - 1 = k, \alpha + 2k - 2 = k\}, \text{ откуда } \beta = 1, \alpha + k = 2 \text{ и } \alpha = 1, \beta = 1, k = 1; \\ \{\beta + k - 1 < k, \alpha + 2k - 2 = k\}, \text{ откуда } \beta < 1, \alpha + k = 2 \text{ и } \alpha = 1, \beta = 0, k = 1. \end{aligned}$$

Как видно, все эти варианты соответствуют полиному первой степени ($k = 1$).

В случае $\{\alpha = 0, \beta = 1\}$ для определения функций $a_i(\tau)$, $i = 0, 1$, имеем систему уравнений

$$a'_0(\tau) = b_0a_1(\tau) + c_0a_1^2(\tau), a_0(0) = 0; a'_1(\tau) = b_1a_1(\tau) - 1, a_1(0) = 0.$$

Используем обозначения, которые обычно применяются в литературе о временных структурах процентных ставок: $a_0(\tau) = A(\tau)$, $a_1(\tau) = -B(\tau)$, $b_0 = k\theta - \lambda\sigma$, $b_1 = -k$, $c_0 = \sigma^2/2$. Тогда решение этой системы уравнений запишется в виде

$$A(\tau) = -\tau \left(\theta - \frac{\sigma\lambda}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) + \left(\theta - \frac{\sigma\lambda}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) B(\tau) - \frac{\sigma^2}{4k} B(\tau)^2, \quad B(\tau) = \frac{1 - e^{-k\tau}}{k},$$

в котором легко узнаются функции временной структуры модели Васичека [1].

В случае $\{\alpha = 1, \beta = 1\}$ для определения функций $a_i(\tau)$, $i = 0, 1$, имеем систему уравнений

$$a'_0(\tau) = b_0a_1(\tau) + c_0a_1^2(\tau), a_0(0) = 0; a'_1(\tau) = b_1a_1(\tau) + c_1a_1^2(\tau) - 1, a_1(0) = 0.$$

При использовании традиционных обозначений $a_0(\tau) = A(\tau)$, $a_1(\tau) = -B(\tau)$, $b_0 = k\theta - \lambda\sigma_0$, $b_1 = -(k + \lambda\sigma_1)$, $c_0 = \sigma_0/2$, $c_1 = \sigma_1/2$ эта система преобразуется к виду

$$\begin{aligned} A' &= -(k\theta - \lambda\sigma_0) B(\tau) + \sigma_0 [B(\tau)]^2/2, \quad A(0) = 0, \\ B' &= 1 - (k + \lambda\sigma_1) B(\tau) - \sigma_1 [B(\tau)]^2/2, \quad B(0) = 0. \end{aligned}$$

Полученные уравнения определяют функции временной структуры модели Даффи–Кана.

$$A(\tau) = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} [B(\tau) - \tau] - \frac{2k}{\sigma_1^2} (\sigma_1\theta - \sigma_0) [\nu\tau - \ln(1 + \nu B(\tau))], \quad B(\tau) = \left(\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon\tau} - 1} + V \right)^{-1},$$

где $\varepsilon = \sqrt{(k + \lambda\sigma_1)^2 + 2\sigma_1}$, $\nu = (\varepsilon - k - \lambda\sigma_1)/2$, $V = (\varepsilon + k + \lambda\sigma_1)/2$.

Наконец, в случае $\{\alpha = 1, \beta = 0\}$ функции $a_i(\tau)$, $i = 0, 1$, удовлетворяют системе уравнений

$$a'_0(\tau) = b_0a_1(\tau) + c_0a_1^2(\tau), a_0(0) = 0; a'_1(\tau) = c_1a_1^2(\tau) - 1, a_1(0) = 0,$$

решение которой в традиционных обозначениях $a_0(\tau) = A(\tau)$, $a_1(\tau) = -B(\tau)$, $b_0 = k\theta - \lambda\sigma_0$, $c_0 = \sigma_0/2$, $c_1 = \sigma_1/2$ (в рассматриваемом случае $\lambda\sigma_1 = -k$) выражается через гиперболические функции

$$A(\tau) = \frac{1}{\sigma_1} \left[\sigma_0\tau - \frac{2k}{\sigma_1} (\sigma_1\theta + \sigma_0) \ln(\text{ch}(\tau\sqrt{\sigma_1/2})) \right], \quad B(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\sigma_1}} \text{th} \left(\tau\sqrt{\frac{\sigma_1}{2}} \right).$$

Заметим, что модели временной структуры Васичека и Даффи–Кана в литературе достаточно подробно изучены (см., например, [3]), но последний случай $\{\alpha = 1, \beta = 0\}$, предусматривающий ограничение $\lambda\sigma_1 = -k$ (возможно, редко встречающийся на реальном рынке), еще нигде не обсуждался. Для него кривая доходности

$$\begin{aligned} y(\tau, r) &= \frac{rB(\tau) - A(\tau)}{\tau} = \\ &= \frac{1}{\sigma_1\tau} \{ r\sqrt{2\sigma_1} \text{th}(\tau\sqrt{\sigma_1/2}) - \sigma_0\tau + \frac{2k}{\sigma_1} (\sigma_1\theta + \sigma_0) \ln(\text{ch}(\tau\sqrt{\sigma_1/2})) \} \end{aligned}$$

и форвардная кривая

$$f(\tau, r) = r \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1} \{ (\sigma_0 + \sigma_1 r) \operatorname{sch}[\tau \sqrt{\sigma_1/2}]^2 + \frac{k}{\sqrt{2\sigma_1}} (\sigma_1 \theta + \sigma_0) \operatorname{th}[\tau \sqrt{\sigma_1/2}] \} - \frac{\sigma_0}{\sigma_1}$$

являются полиномами первой степени.

Заметим, что обе эти кривые имеют одинаковое предельное значение при $\tau \rightarrow \infty$, равное

$$k \left(\theta + \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right) \sqrt{\frac{2}{\sigma_1}} - \frac{\sigma_0}{\sigma_1}.$$

На рис. 1 кривые $y(\tau, r)$ и $f(\tau, r)$ представлены для следующих значений параметров $r = 0,01; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; k = 0,4, \theta = 9^{-1}, \sigma_0 = 0,16, \sigma_1 = 0,18$. Для представления кривых «целиком» для всего интервала возможных значений сроков до погашения $\tau \in (0, \infty)$ использовано нелинейное преобразование сроков до погашения: $u = 1 - e^{-\rho\tau}$, которое отображает положительную полуось $(0, \infty)$ в единичный интервал $(0, 1)$. Принятое при расчетах численное значение $\rho = \ln 10/30 = 0,07675$ соответствует тому, что сроки до погашения от 0 до 30 отображаются в интервал $(0; 0,9)$. Кривые стартуют из точки $Y(0, r) = F(0, r) = r$ и при $u \rightarrow 1$ стремятся к одному и тому же пределу $Y(1, r) = F(1, r) = 0,444$.

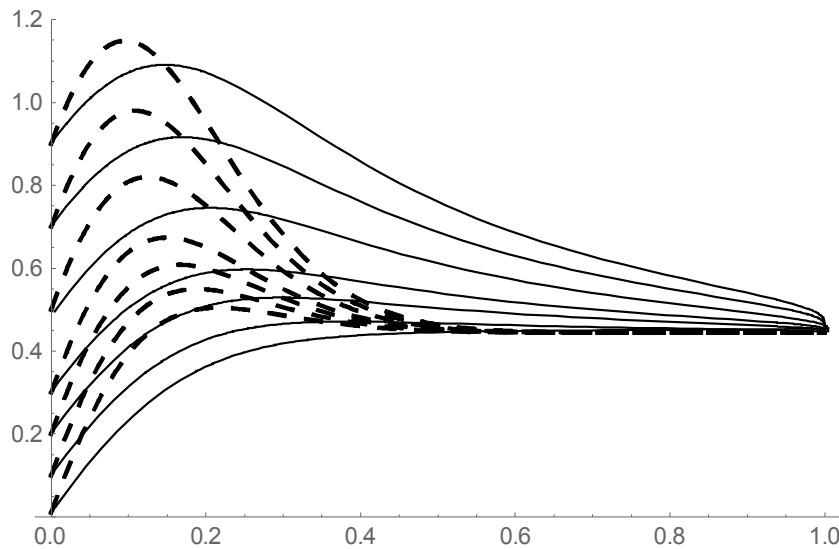


Рис. 1. Кривые доходности $Y(u, r)$ (сплошные линии) и форвардные кривые $F(u, r)$ (пунктирные линии)

Предположим наконец, что $k < \delta = \max\{\alpha + 2k - 2, \beta + k - 1\}$. Из уравнения временной структуры (1) получаем равенство

$$-r - \sum_{i=0}^k \frac{da_i(\tau)}{d\tau} r^i + \sum_{j=0}^{\beta} b_j r^j \sum_{i=1}^k i a_i(\tau) r^{i-1} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\alpha} c_j r^j \left(\sum_{i=2}^k i(i-1) a_i(\tau) r^{i-2} + \left(\sum_{i=1}^k i a_i(\tau) r^{i-1} \right)^2 \right) = 0.$$

В этом случае для определения $(k+1)$ функций $a_i(\tau)$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, получается система $(k+1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнения этой системы являются однородными за исключением одного, при $i = 1$) и система $(\delta - k) \geq 1$ однородных алгебраических уравнений. Эти уравнения находятся приравнованием коэффициентов при r^i , $i = 0, 1, 2, \dots, \delta$, к нулю. Коэффициенты при r^i , $0 \leq i \leq k$, приводят к системе дифференциальных уравнений, а коэффициенты при r^i , $k < i \leq \delta$, — к системе алгебраических уравнений. Заметим, что коэффициент при r^δ имеет вид либо $k^2 c_\alpha a_k(\tau)^2$ в случае

$\delta = \alpha + 2k - 2$, либо $kb_\beta a_k(\tau)$ в случае $\delta = \beta + k - 1$, либо $(k^2 c_\alpha a_k(\tau) + kb_\beta) a_k(\tau)$, когда $\delta = \alpha + 2k - 2 = \beta + k - 1$. Во всех этих случаях он имеет в качестве множителя функцию $a_k(\tau)$ и равномерно по τ должен быть равен нулю. Следовательно, равномерно по τ равна нулю функция $a_k(\tau)$ и, следовательно, равна нулю и ее производная. Отсюда имеем, что степень полинома доходности понижается до $(k - 1)$. Вместе с этим понижается и порядок системы дифференциальных уравнений (уравнение с производной функции $a_k(\tau)$ становится алгебраическим). После приравнивания нулю функции $a_k(\tau)$ и ее производной в оставшейся системе в уравнении, полученном приравниванием коэффициента при $r^{\delta-1}$ нулю, окажется множителем функция $a_{k-1}(\tau)$. Ввиду однородности уравнения эта функция равномерно по τ должна быть равна нулю. Так что равна нулю и ее производная. Степень полинома доходности понижается до $(k - 2)$. Продолжение этой процедуры приводит к тому, что функция $a_1(\tau)$ должна быть равна нулю, но при $i = 1$ уравнение является неоднородным, и это исключается, что приводит к противоречию. Отсюда следует, что не существует конечного k , для которого полином (2) мог бы быть решением уравнения (1).

Для иллюстрации описанной процедуры приведем пример. Пусть $k = \alpha = \beta = 2$, когда $\delta = 4$. Тогда относительно функций $\{a_i(\tau)\}$ получается система трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{da_0(\tau)}{d\tau} &= a_1(\tau)b_0 + a_1^2(\tau)c_0 + 2a_2(\tau)c_0, \\ \frac{da_1(\tau)}{d\tau} &= a_1(\tau)b_1 + a_1^2(\tau)c_1 + 2a_2(\tau)c_1 + 2a_2(\tau)b_0 + 4a_1(\tau)a_2(\tau)c_0 - 1, \\ \frac{da_2(\tau)}{d\tau} &= a_1(\tau)b_2 + a_1^2(\tau)c_2 + 2a_2(\tau)c_2 + 2a_2(\tau)b_1 + 4a_1(\tau)a_2(\tau)c_1 + 4a_2^2(\tau)c_0\end{aligned}$$

и система двух алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}2a_2(\tau)b_2 + 4a_1(\tau)a_2(\tau)c_{21} + 4a_2^2(\tau)c_1 &= 0, \\ 4a_2^2(\tau)c_2 &= 0.\end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует, что $a_2(\tau) = 0$ для всех возможных τ . Поэтому равна нулю и производная этой функции. Используем это в исходной системе уравнений. Тогда она преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\frac{da_0(\tau)}{d\tau} &= a_1(\tau)b_0 + a_1^2(\tau)c_0, \\ \frac{da_1(\tau)}{d\tau} &= a_1(\tau)b_1 + a_1^2(\tau)c_1 - 1, \\ a_1(\tau)b_2 + a_1^2(\tau)c_2 &= 0.\end{aligned}$$

Из третьего уравнения получаем, что $a_1(\tau) = 0$ для всех возможных τ . Поэтому равна нулю и производная этой функции. Однако это противоречит второму уравнению. Следовательно, решения в виде (2) не существует.

3. Временная структура как степенной ряд

Итак, решения (2) для конечных k не существует, но, может, оно существует при неограниченном k , т.е., может быть, существует решение в виде функционального ряда

$$z(\tau, r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\tau) r^i. \quad (3)$$

Проверим эту версию. После подстановки представления (3) в уравнение (1) оно преобразуется к виду

$$\begin{aligned}-r - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{da_i(\tau)}{d\tau} r^i + \sum_{j=0}^{\beta} b_j r^j \sum_{i=1}^{\infty} i a_i(\tau) r^{i-1} + \\ + \sum_{j=0}^{\alpha} c_j r^j \left(\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i(\tau) r^{i-2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} i a_i(\tau) r^{i-1} \right)^2 \right) = 0.\end{aligned}$$

Изменяя порядок суммирования в двойных суммах этого выражения, его можно записать в более удобном для анализа виде:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{da_i(\tau)}{d\tau} - B_i(\tau) - C_i(\tau) + \delta_{i1} \right) r^i = 0, \quad (4)$$

где δ_{i1} – символ Кронекера ($\delta_{11} = 1$, $\delta_{i1} = 0$, если $i \neq 1$), а функции $B_i(\tau)$ и $C_i(\tau)$ определяются равенствами

$$B_i(\tau) = \sum_{j=u}^i b_{i-j}(j+1)a_{j+1}(\tau) + \sum_{j=v}^i c_{i-j}(j+1)(j+2)a_{j+2}(\tau), \quad (5)$$

$$C_i(\tau) = \sum_{j=v}^i c_{i-j} \left(\sum_{l=1}^{j+1} l(j+2-l)a_l(\tau)a_{j+2-l}(\tau) \right), \quad (6)$$

где $u = \max\{0, i - \beta\}$, $v = \max\{0, i - \alpha\}$.

Поскольку равенство (4) должно удовлетворяться равномерно по переменным r и τ , а степенные функции $\{r^i\}$ линейно независимы, то для справедливости (4) при всех значениях индекса $i = 0, 1, 2, \dots$ должны выполняться равенства

$$\frac{da_i(\tau)}{d\tau} - B_i(\tau) - C_i(\tau) + \delta_{i1} = 0, \quad a_i(0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

которые с учетом (5) и (6) образуют бесконечную систему дифференциальных уравнений относительно функций $\{a_i(\tau)\}$. Заметим, что эта система является неоднородной. Решение этой системы в аналитическом виде проблематично, поскольку, во-первых, уравнения (7) являются нелинейными из-за функции $C_i(\tau)$ в виде (6), и, во-вторых, из-за того, что в уравнении (7) для функции $a_i(\tau)$ используются не только предыдущие функции $a_j(\tau)$, $j \leq i$, но и последующие функции $a_{i+1}(\tau)$ и $a_{i+2}(\tau)$, поэтому нельзя реализовать стандартную рекуррентную процедуру для последовательного решения дифференциальных уравнений системы (7).

Вместе с тем можно попытаться вычислить функции $\{a_i(\tau)\}$ с помощью следующей эвристической процедуры. Заметим, что формулы (5) и (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} B_i(\tau) &= c_0(i+1)(i+2)a_{i+2}(\tau) + (i+1)(b_0 + i c_1)a_{i+1}(\tau) + \\ &+ i(b_1 + (i-1)c_2)a_i(\tau) + (i-1)(b_2 + (i-1)c_3)a_{i-1}(\tau) + \dots, \\ C_i(\tau) &= 2c_0[(i+1)a_1(\tau)a_{i+1}(\tau) + 2ia_2(\tau)a_i(\tau) + 3(i-1)a_3(\tau)a_{i-1}(\tau) + \dots] + \\ &+ 2c_1[i a_1(\tau)a_i(\tau) + 2(i-1)a_2(\tau)a_{i-1}(\tau) + \dots] + 2c_2[(i-1)a_1(\tau)a_{i-1}(\tau) + \dots] + \dots \end{aligned}$$

С помощью этих представлений уравнения (7) можно переписать так, чтобы функция $a_i(\tau)$ выражалась только через функции с предыдущими индексами или их производные.

$$\begin{aligned} a_2(\tau) &= \frac{1}{2c_0} \left(\frac{da_0(\tau)}{d\tau} - b_0 a_1(\tau) - c_0 a_1(\tau)^2 \right), \\ a_3(\tau) &= \frac{1}{6c_0} \left(\frac{da_1(\tau)}{d\tau} - b_0 2a_2(\tau) - b_1 a_1(\tau) - c_0 4a_1(\tau)a_2(\tau) - c_1(2a_2(\tau) + a_1(\tau)^2) + 1 \right), \\ a_4(\tau) &= \frac{1}{12c_0} \left(\frac{da_2(\tau)}{d\tau} - 3b_0 a_3(\tau) - 2b_1 a_2(\tau) - b_2 a_1(\tau) - c_0(6a_1(\tau)a_3(\tau) + 4a_2(\tau)^2) - \right. \\ &\quad \left. - c_1(6a_3(\tau) + 4a_1(\tau)a_2(\tau)) - c_2(2a_2(\tau) + a_1(\tau)^2) \right), \\ a_5(\tau) &= \frac{1}{20c_0} \left(\frac{da_3(\tau)}{d\tau} - 4b_0 a_4(\tau) - 3b_1 a_3(\tau) - 2b_2 a_2(\tau) - b_3 a_1(\tau) - c_0(8a_1(\tau)a_4(\tau) + 12a_2(\tau)a_3(\tau)) - \right. \\ &\quad \left. - c_1(12a_4(\tau) + 6a_1(\tau)a_3(\tau) + 4a_2(\tau)^2) - c_2(6a_3(\tau) + 4a_1(\tau)a_2(\tau)) - c_3(2a_2(\tau) + a_1(\tau)^2) \right), \end{aligned}$$

и вообще для $i > 3$

$$a_{i+2}(\tau) = \frac{1}{c_0(i+1)(i+2)} \left(\frac{da_i(\tau)}{d\tau} - (i+1)[b_0 + i c_1 + 2c_0 a_1(\tau)]a_{i+1}(\tau) - \right. \\ \left. -i[b_1 + (i-1)c_2 + 2c_1 a_1(\tau) + 4c_0 a_2(\tau)]a_i(\tau) - (i-1)[b_2 + (i-2)c_3 + 2c_2 a_1(\tau) + 4c_1 a_2(\tau) + \right. \\ \left. + 6c_0 a_3(\tau)]a_{i-1}(\tau) - \dots \right).$$

Из этих выражений следует, что все функции $a_i(\tau)$ для $i > 1$ могут быть последовательно выражены через две первые функции $a_0(\tau)$ и $a_1(\tau)$. Если удастся определить эти функции каким-либо образом или оценить их, рассматривая выборку наблюдений, остальные функции можно последовательно определить.

К сожалению, с ростом индекса i будет увеличиваться громоздкость выражений для функций $a_i(\tau)$. Кроме того, такая процедура не гарантирует того, что получающиеся функции $a_i(\tau)$ будут удовлетворять начальным условиям $a_i(0) = 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Имеются и другие требования к функциям $\{a_i(\tau)\}$, основанные на их экономическом смысле. Если решение (3) уравнения (1) существует, то кривая доходности до погашения выражается в виде

$$y(\tau, r) = -\frac{z(\tau, r)}{\tau} = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i(\tau)}{\tau} r^i, \quad (8)$$

что налагает на функции $a_i(\tau)$ определенные свойства.

Для равномерной сходимости ряда (8) необходимо, чтобы $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i(\tau) = 0$ равномерно по τ . Предельная долгосрочная доходность $\lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau, r) \equiv y(\infty)$ должна быть неотрицательной, конечной и не зависеть от значений краткосрочной ставки r .

В связи с этим функция $a_0(\tau)$ должна иметь прямолинейную асимптоту $\text{const} - \tau y(\infty)$, так как $\lim_{\tau \rightarrow \infty} a_0(\tau)/\tau = -y(\infty)$. При этом каждая функция $a_i(\tau)$, $i \geq 1$, должна удовлетворять условию $\lim_{\tau \rightarrow \infty} a_i(\tau)/\tau = 0$. Для этого достаточно, чтобы для каждой функции существовал конечный предел $\lim_{\tau \rightarrow \infty} a_i(\tau) = a_i$. В этом случае

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{da_i(\tau)}{d\tau} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому предельные значения a_i находятся из системы алгебраических уравнений

$$2c_0 a_2 + b_0 a_1 + c_0 a_1^2 + y(\infty) = 0, \\ 6c_0 a_3 + b_0 2a_2 + b_1 a_1 + c_0 4a_1 a_2 + c_1 (2a_2 + a_1^2) = 1, \\ (i+1)(i+2)c_0 a_{i+2} + \sum_{j=u}^i b_{i-j}(j+1)a_{j+1} + \sum_{j=v+1}^i j(j+1)c_{i-j+1}a_{j+1} + \\ + \sum_{j=v}^i c_{i-j} \left(\sum_{l=1}^{j+1} l(j+2-l)a_l a_{j+2-l} \right) = 0, \quad i > 1.$$

Как видно из этой системы, значения a_i , $i > 1$, последовательно выражаются по рекуррентным формулам через две величины a_1 и $y(\infty)$:

$$a_2 = -\frac{a_1 b_0 + a_1^2 c_0 + y(\infty)}{2c_0} = 0, \\ a_3 = \frac{c_0 + a_1(b_0^2 + c_0(2a_1^2 c_0 - b_1) + b_0(3a_1 c_0 + c_1)) + (b_0 + 2a_1 c_0 + c_1)y(\infty)}{6c_0^2}, \\ a_4 = \frac{1}{24c_0^3} (3a_1 b_0 b_1 c_0 - a_1 b_0^3 - b_0 c_0 - 7a_1^2 b_0^2 c_0 - 2a_1 c_0^2 - 12a_1^3 b_0 c_0^2 + 4a_1^2 b_1 c_0^2 - 2a_1 b_2 c_0^2 - \\ - 6a_1^4 c_0^3 - 3a_1 b_0^2 c_1 - 2c_0 c_1 - 4a_1^2 b_0 c_0 c_1 + 2a_1 b_1 c_0 c_1 - 2a_1 b_0 c_1^2 + 2a_1 b_0 c_0 c_2 + (2c_0 c_2 - b_0^2 - \\ - 8a_1 b_0 c_0 + 2b_1 c_0 - 8a_1^2 c_0^2 - 3b_0 c_1 - 2a_1 c_0 c_1 - 2c_1^2)y(\infty) + 2c_0 y^2(\infty))$$

и т.д. К сожалению, с ростом индекса очень быстро растет сложность получающихся выражений a_i через величины a_1 и $y(\infty)$, причем значения самих величин в рамках этой системы уравнений не определяются.

С другой стороны, по определению $\lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau, r) = r$. Следовательно, если представление (8) имеет место, то

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau, r) = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i(\tau)}{\tau} r^i = - \sum_{i=0}^{\infty} \left. \frac{da_i(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} r^i = r,$$

так что

$$\left. \frac{da_1(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = -1, \quad \left. \frac{da_i(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad i \neq 1.$$

4. Тестирование известных моделей

Таким образом, если набор функций $\{a_i(\tau)\}$ обладает перечисленными выше свойствами, есть надежда, что временная структура доходности имеет представление в виде степенного ряда (8). Функции $\{a_i(\tau)\}$ определяются уравнениями (5)–(7) с помощью наборов коэффициентов $\{b_j \mid 0 \leq j \leq \beta\}$ и $\{c_j \mid 0 \leq j \leq \alpha\}$. В свою очередь, набор коэффициентов определяется принятой моделью процесса краткосрочной процентной ставки. Рассмотрим некоторые примеры известных моделей краткосрочной ставки. Более интересны модели, для которых уравнения для функций $\{a_i(\tau)\}$ получаются такими, что последующие функции определяются только через предыдущие. Тогда функции $a_i(\tau)$ можно найти в аналитическом виде. К таким моделям относится модель CIR (1980) [4] и модель Ана–Гао [5]. Рассмотрим их.

Пусть процесс краткосрочной ставки $r(t)$ задается моделью CIR (1980), которая предусматривает, что

$$dr(t) = \sigma r(t)^\gamma dw(t), \quad r(t) \geq r_0,$$

где r_0 – нижняя граница возможных значений процентной ставки [6]. Примем $\gamma = 2,5$, что обеспечивает процессу $r(t)$ существование стационарного режима с математическим ожиданием $E[r(t)] = 2r_0$ и дисперсией $\text{Var}[r(t)] = 2r_0^2$. Для такой модели наборы коэффициентов $\{b_j\}$ и $\{c_j\}$ определяются так: $b_j = 0, j \geq 0$; $c_5 = 0,5\sigma^2$, $c_j = 0, j \neq 5$. Подставляя эти значения в соотношения (5)–(7), получаем систему уравнений, решения которых для $\{a_i(\tau), i \leq 10\}$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_0(\tau) &= a_2(\tau) = a_3(\tau) = a_4(\tau) = a_6(\tau) = a_7(\tau) = a_{10}(\tau) = 0, \\ a_1(\tau) &= -\tau, \quad a_5(\tau) = \frac{c_5 \tau^3}{3}, \quad a_8(\tau) = \frac{5 c_5^2 \tau^4}{3}, \quad a_9(\tau) = -\frac{2 c_5^2 \tau^5}{3}. \end{aligned}$$

Нетрудно выяснить, что ненулевые функции с последующими индексами тоже будут степенными функциями со степенями, увеличивающимися с номером индекса, что противоречит свойству $\lim_{\tau \rightarrow \infty} a_i(\tau)/\tau = 0$. Следовательно, кривая доходности для модели CIR (1980) не может быть представлена в виде ряда (8).

Рассмотрим теперь в качестве модели процесса краткосрочной ставки $r(t)$ модель Ана–Гао, задаваемую соотношением

$$dr(t) = k(\theta - r(t))r(t) + \sigma r(t)^{3/2} dw(t).$$

Для этой модели наборы коэффициентов $\{b_j\}$ и $\{c_j\}$ определяются так: $b_0 = 0$, $b_1 = k\theta > 0$, $b_2 = -k$; $b_j = 0, j \geq 3$; $c_3 = 0,5\sigma^2$; $c_j = 0, j \neq 3$. Аналитический вид первых функций $a_i(\tau)$ следующий:

$$\begin{aligned} a_0(\tau) &= 0, \quad a_1(\tau) = -\frac{1}{b_1}(e^{\tau b_1} - 1), \quad a_2(\tau) = -\frac{b_2}{2b_1^2}(e^{\tau b_1} - 1)^2, \\ a_3(\tau) &= -\frac{b_2^2 - c_3 + b_2 c_3}{3b_1^3}(e^{\tau b_1} - 1)^3, \end{aligned}$$

$$a_4(\tau) = -\frac{b_2^3 + 3(b_2 - 1)b_2c_3 + 2(b_2 - 1)c_3^2}{4b_1^4}(e^{\tau b_1} - 1)^4 \text{ и т.д.}$$

Как видно, функции $a_i(\tau)$ экспоненциально возрастают по абсолютной величине с ростом τ , что препятствует сходимости ряда (8).

Приведенные примеры демонстрируют, что представление временной структуры доходности в виде ряда если возможно, то не всегда. Правда, это не доказывает того факта, что не существует моделей краткосрочной процентной ставки, для которых временная структура может быть представлена в виде степенного ряда (8). Для такого доказательства нужно отдельное исследование.

Заключение

В большинстве диффузионных моделей краткосрочных процессов процентных ставок функции дрейфа и диффузии задаются в виде полиномов. Среди известных в аналитическом виде временных структур доходности, соответствующих этим моделям, имеется класс аффинных моделей, в котором временные структуры тоже описываются полиномами. Поэтому возникает вопрос, существуют ли еще такие модели краткосрочных процессов процентных ставок, для которых временные структуры – полиномы по значениям процентной ставки. В статье показано, что ответ на этот вопрос – отрицательный. Несколько более сложным для анализа оказывается предположение о том, что в рассматриваемом случае временные структуры могут описываться степенным рядом по значениям процентной ставки. В статье найдена структура такого предположительного ряда, для коэффициентов которого получена система дифференциальных уравнений и обсуждены условия, при которых такой ряд мог бы быть описанием временной структуры доходности. Для диффузионных моделей краткосрочных процессов процентных ставок CIR (1980) и Ана–Гао системы дифференциальных уравнений решены аналитически и показано, что степенной ряд по значениям процентной ставки не может быть использован в качестве модели временной структуры для этих моделей. К сожалению, доказательства этого в общем случае пока не найдено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vasiček O.A. An equilibrium characterization of the term structure // J. of Financial Economics. 1977. V. 5. P. 177–188.
2. Merton R. Theory of Rational Option Pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. 1973. V. 4. P. 141–183.
3. Медведев Г.А. Стохастические процессы финансовой математики. Минск : БГУ, 2005. 243 с.
4. CIR: Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. An analysis of variable rate loan contracts // J. of Finance. 1980. V. 35. P. 389–403.
5. Ahn D.-H., Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics // The Review of Financial Studies. 1999. V. 12, No. 4. P. 721–762.
6. Медведев Г.А. Плотности вероятностей процессов процентных ставок доходности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 3 (36). С. 35–48.

Медведев Геннадий Алексеевич, д-р. физ.-мат. наук, профессор. E-mail: MedvedevGA@bsu.by
Белорусский государственный университет (г. Минск, Республика Беларусь)

Поступила в редакцию 22 ноября 2016 г.

Medvedev Gennady A. (Belarusian State University, Belarus).

Polynomial models of yield term structure.

Keywords: diffusion models of interest rates; drift and diffusion functions; the term structure of yield.

DOI: 10.17223/19988605/39/6

The possibility of representation of yield term structures in the form of polynomials or power series in models where short-term interest rate processes are described by stochastic differential equations is considered. In most diffusion models of short-term interest rate processes the functions of the drift and diffusion are polynomials. Among the well-known analytical form of yield term structures, corresponding to these models, there is a class of affine models in which term structure is also described by polynomials. The question therefore arises whether there are more such models short-term interest rate processes, for which the term structure are polynomials on the values of the interest rate. The paper shows that the answer to this question in the general case is negative. Such a representation takes place only in the case when the functions of drift and diffusion are polynomials not higher than of first order. Somewhat more

complex to analyze is the assumption that in the present case, the term structure could be described by a power series on values of the interest rate. The problem of representation of the term structures by power series is connected with the solution of the infinite system of ordinary differential equations of first order for the coefficients of the series. This system of equations has features that do not allow to obtain the solution in analytical form in the general case. The conditions under which a power series could be a description of the term structure of yields are discussed. It is shown that there are models of the short rate for which the equations for the coefficients of the series are such that the subsequent coefficients are determined only by the previous one. Such models are, in particular, diffusion models of short-term interest rates CIR (1980) and Ahn–Gao. For them the system of differential equations is solved analytically and it is shown that a power series on values of the interest rate cannot be used as a model of term structure for these models. Unfortunately, the proof of this in the general case has not yet been found.

REFERENCES

1. Vasiček, O. A. (1977) An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*. 5. pp. 177–188. DOI: 10.2307/2330340
2. Merton, R. (1973) Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*. 4. pp. 141–183.
3. Medvedev, G.A. (2005) *Stokhasticheskie protsessy finansovoy matematiki* [Stochastic processes of financial mathematics]. Minsk: BSU.
4. Cox, J.C., Ingersoll, J.E. & Ross, S.A. (1980) An analysis of variable rate loan contracts. *Journal of Finance*. 35. pp. 389–403. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1980.tb02169.x
5. Ahn, D.-H., Gao, B. (1999) A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *The Review of Financial Studies*. 12(4). pp. 721–762. DOI: 10.1093/rfs/12.4.721
6. Medvedev, G.A. (2016) The probability density of the processes of yield interest rates. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(36). pp. 35–48. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/36/4

В.С. Микшина, С.И. Павлов**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ
ПРИ ВЫБОРЕ СПОСОБА КАРДИОПЛЕГИИ**

Описывается построение математических моделей вероятности летального исхода операции аортокоронарного шунтирования при различных способах кардиоплегии.

Ключевые слова: логистическая регрессия; прямой отбор переменных; поддержка принятия решений в медицине.

В настоящее время заболевания сердечно-сосудистой системы являются одной из остросоциальных проблем. По данным Всемирной организации здоровья, около половины смертей в результате сердечно-сосудистых заболеваний приходится на ишемическую болезнь сердца [1]. Инфаркт миокарда – это одна из форм ишемической болезни сердца, протекающая с развитием ишемического некроза участка миокарда, обусловленного абсолютной или относительной недостаточностью его кровоснабжения [1–3].

Существуют различные формы лечения ишемической болезни сердца. При обширном поражении сосудов сердца пациенту может быть показана операция аортокоронарного шунтирования. Аортокоронарное шунтирование – это хирургическое вмешательство, в результате которого восстанавливается кровоток сердца ниже места сужения сосуда. При данной хирургической манипуляции вокруг места сужения создают другой путь для кровотока к той части сердца, которая не снабжалась кровью. Комплекс мероприятий по защите сердца от ишемии во время операций аортокоронарного шунтирования, в условиях искусственного кровообращения для пациентов с ишемической болезнью сердца при остром инфаркте миокарда называется кардиоплегией.

При подготовке к операции кардиохирург принимает решение по выбору способа кардиоплегии. В настоящее время распространены два способа: кровяная кардиоплегия и кардиоплегия раствором «Кустодиол». В данной работе исследуется задача выбора способа кардиоплегии и оценки благоприятного и неблагоприятного исхода операции методами математического моделирования.

Задачи оценки риска оперативного вмешательства математическими методами при лечении ишемической болезни сердца встречаются в литературе на протяжении последних 20 лет достаточно часто. Например, в работе [4] исследуются различные методики анализа операционного риска операции аортокоронарного шунтирования. В [5] приводится пример применения классификации с использованием логических правил, сформированных с помощью методов интеллектуального анализа данных.

Задача классификации с оценкой риска оперативного вмешательства в работах [6, 7] решалась при выборе способа завершения операции по поводу перитонита, применяя в качестве классифицирующего правила модель, полученную с использованием нейронных сетей.

Для решения классификационных задач также могут применяться различные алгоритмы на основе деревьев решений [8].

1. Исходные данные

При планировании операции, а также выборе способа кардиоплегии врач основывается на параметрах состояния пациента. Параметрами состояния пациента являются результаты клинических исследований, показатели общего состояния пациента, взятые из документов пациента (пол, возраст), сведения, полученные в ходе устного опроса, например срок болевого синдрома или анамнез (табл. 1) [2, 3].

Показатели состояния пациента перед операцией аортокоронарного шунтирования

№ п/п	Фактор (переменная)	Обозначение	Шкала измерения	Единица измерения	№ п/п	Фактор (переменная)	Обозначение	Шкала измерения	Единица измерения
1	Возраст	X ₁	Абс.	год	16	Конечный диастолический объём	X ₁₆	Абс.	мм
2	Вес	X ₂	Абс.	кг	17	Конечный систолический объём	X ₁₇	Абс.	мм
3	Пол	X ₃	Номинал.		18	Конечный диастолический размер	X ₁₈	Абс.	мм
4	Сахарный диабет	X ₄	Номинал.		19	Конечный систолический размер	X ₁₉	Абс.	мм
5	Гипертоническая болезнь	X ₅	Номинал.		20	Удельный объём	X ₂₀	Абс.	мл
6	Поражение брахиоцефального ствола	X ₆	Номинал.		21	Среднее давление в легочной артерии	X ₂₁	Абс.	мм рт. ст.
7	Нарушения ритма сердца	X ₇	Номинал.		22	Аортальный клапан: градиент давления	X ₂₂	Абс.	мм рт. ст.
8	Гипокинезы	X ₈	Номинал.		23	Аортальный клапан: скорость кровотока	X ₂₃	Абс.	м/с
9	Проходимость левой коронарной артерии	X ₉	Абс.	%	24	Аортальный клапан: степень регургитации	X ₂₄	Порядк.	
10	Проходимость ветви тупого края	X ₁₀	Абс.	%	25	Митральный клапан: градиент давления	X ₂₅	Абс.	мм рт. ст.
11	Проходимость передней межжелудочковой ветви	X ₁₁	Абс.	%	26	Митральный клапан: скорость кровотока	X ₂₆	Абс.	м/с
12	Проходимость огибающей ветви	X ₁₂	Абс.	%	27	Митральный клапан: степень регургитации	X ₂₇	Порядк.	
13	Проходимость правой коронарной артерии	X ₁₃	Абс.	%	28	Срок болевого синдрома	X ₂₈	Кол.	дни
14	Проходимость задней межжелудочковой ветви	X ₁₄	Абс.	%	29	Тропонины I	X ₂₉	Абс.	нг/мл
15	Фракция выброса левого желудочка	X ₁₅	Абс.		30	Тропонины T	X ₃₀	Абс.	нг/мл

Данные в таблице представлены в разных шкалах:

– абсолютная (в таблице обозначена «Кол.»). В этой шкале измерения проводятся в физических величинах. Например, переменная «возраст» измеряется в годах, переменная «вес» – в килограммах, переменная «аортальный клапан: градиент давления» – в мм рт. ст. Некоторые величины могут быть выражены в так называемой дольной абсолютной шкале, фракция выброса измеряется в процентах;

– номинальная – используется для регистрации самого низшего уровня измерений, например наличие или отсутствие какого-либо признака, пол и т.д.;

– порядковая – переменная описывает признаки объектов, которые можно упорядочить, без возможности точного установления расстояния между ними [5].

На рис. 1 изображен процесс принятия решений кардиохирургом по выбору способа кардиоплегии на основе анализа исходных данных.



Рис. 1. Структурная схема принятия решения по выбору кардиоплегии

При выборе способа кардиоплегии врач основывается на исходных данных и интуитивно учитывает исход операции, фактически оценивая риск благоприятного и неблагоприятного исхода.

2. Формирование задачи обучения по прецедентам

Задачу выбора способа кардиоплегии сформулируем как задачу обучения по прецедентам [9, 10]. Задача формируется следующим образом. Пусть объекты описываются n -числовыми признаками $f_j: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}, j = 1 \dots n$. Тогда пространство признаков объектов представляется как $\mathbf{X} = \mathbf{R}^n$. Пусть $\mathbf{Z}$ – конечное множество классов, под каждым из которых подразумевается определенный исход операции. В нашем случае классов всего два: благоприятный исход $Z = -1$ и неблагоприятный исход $Z = +1$. Пусть задана обучающая выборка пар «объект, ответ» (состояние пациента, исход операции):

$$\mathbf{X}^m = \{(x_1, z_1), \dots, (x_m, z_m)\}. \quad (1)$$

В качестве математической модели исхода операции использовалась модель логистической регрессии, позволяющая определить вероятность попадания в один из классов:

$$P = \frac{1}{1 + \exp^{-\langle x, \beta \rangle}}. \quad (2)$$

Для двух классов $Z = \{-1, +1\}$ в логистической регрессии строится линейный алгоритм классификации $\mathbf{a}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}$, который позволяет отнести объект к одному из двух классов:

$$\mathbf{a}(x, \beta) = \text{sign} \left(\sum_{j=1}^n \beta_j f_j(x) - \beta_0 \right) = \text{sign} \langle x, \beta \rangle, \quad (3)$$

где β_i – вес i -го признака, β_0 – порог принятия решения, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ – вектор весов, $\langle x, \beta \rangle$ – скалярное произведение. Предполагается, что искусственно введен константный признак $f_0(x) = -1$.

Задача обучения линейного классификатора заключается в том, чтобы по выборке $\mathbf{X}^m$ настроить вектор весов в уравнении (2). Использование модели логистической регрессии позволяет определить значимые переменные и определить числовые коэффициенты при этих переменных. Работа проводится в два этапа.

На первом этапе осуществляется отбор переменных в модель с помощью метода прямого отбора. Алгоритм отбора переменных следующий [9].

1. Рассчитывается матрица коэффициентов корреляции переменных, описывающих состояние пациента $\mathbf{X} = \mathbf{R}^n$. Из списка всех возможных независимых переменных формируется выборка независимых переменных с коэффициентом корреляции выше порога, принимаемого равным 0,6. Коэффициент корреляции рассчитывается по формуле

$$\rho = \frac{M(x - m_x)(y - m_y)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (4)$$

где m_x, m_y – математические ожидания x и y , а σ_x, σ_y – их средние квадратические отклонения.

2. После того как переменная x_i была выбрана, она добавляется в модель (2), в результате чего появляется уравнение, содержащее всего одну переменную:

$$y_i = \beta_{ij}x_{ij} + \beta_{i0}. \quad (5)$$

Полученное уравнение проверяется на адекватность при помощи функции правдоподобия $-2\log$. Если адекватность модели не подтверждается, то выбирается другая переменная из сформированной выборки. Если адекватность уравнения подтверждается, то текущая переменная добавляется в модель. Таким образом, тестируются все переменные, отобранные из корреляционной матрицы.

3. Далее проводится последовательное исключение из модели переменных, удаление которых может привести к повышению адекватности модели. В случае, если такая переменная найдена, она удаляется из модели. Далее осуществляется переход к началу алгоритма прямого отбора переменных.

На втором этапе определяются коэффициенты в модели логистической регрессии с помощью метода максимального правдоподобия. Использование вероятности отнесения к одному из классов Z в зависимости от X , $P(Z|X)$ полностью определяет условное распределение по классам. Для дальнейших рассуждений удобно использовать логарифм функций правдоподобия в виду одинакового поведения их производных, а также в силу проекта от произведения их составляющих к сумме. Тогда для N наблюдений логарифмическая функция правдоподобия будет

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^N \log p_{g_i}(x_i; \beta), \quad (6)$$

где $p_{z_i}(x_i; \beta) = P(Z = k | X = x_i; \beta)$, β – вектор коэффициентов в модели.

Подробно рассмотрим случай двух классов. Удобно кодировать классы Z_i через ответ y_i , где $y_i = 0$, когда $Z_i = 0$, и $y_i = 1$, когда $Z_i = 1$. Пусть $p_1(x; \theta) = p(x; \theta)$ и $p_2(x; \theta) = 1 - p(x; \theta)$. В таком случае логарифмическое правдоподобие может быть записано следующим образом:

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^N \{y_i \log p_{z_i}(x_i; \beta) + (1 - y_i) \log(1 - p(x_i; \beta))\} = \sum_{i=1}^N \{y_i \beta^T x_i - \log(1 + e^{\beta^T x_i})\}. \quad (7)$$

Здесь $\beta = \{\beta_{10}, \beta_1\}$.

Для максимизации правдоподобия приравняем производную к нулю:

$$\frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^N x_i (y_i - p(x_i; \beta)) = 0. \quad (8)$$

Для нахождения значений коэффициентов β в формуле (6) используем алгоритм Ньютона–Рафсона, необходимым условием для которого является получение матрицы Гессе (Гессиан):

$$\frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta \partial \beta^T} = - \sum_{i=1}^N x_i x_i^T p(x_i; \beta) (1 - p(x_i; \beta)). \quad (9)$$

Начиная с произвольного первого приближения β^0 , одна итерация методом Ньютона заключается в нахождении

$$\beta^1 = \beta^0 - \left(\frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta \partial \beta^T} \right)^{-1} \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta}, \quad (10)$$

где производные вычисляются на основании β^0 .

Для вычислений удобно записать значения коэффициентов и Гессиан в виде матриц. Пусть $\mathbf{y}$ – значения вектора y_i ; $\mathbf{X}$ – матрица, содержащая значения x_i ; $\mathbf{p}$ – вектор полученной вероятности i -го элемента $p(x_i; \beta^i)$, и $\mathbf{W}$ – $N \times N$ – диагональная матрица, содержащая элементы $p(x_i; \beta^i)(1 - p(x_i; \beta^i))$. Таким образом, получаем

$$\frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta} = \mathbf{X}^T (\mathbf{y} - \mathbf{p}); \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta \partial \beta^T} = -\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X}. \quad (12)$$

Тогда значения для β^{l+1} следующей итерации будут равны

$$\beta^{l+1} = \beta^l + (X^T W X)^{-1} X^T (y - p) = (X^T W X)^{-1} X^T W (X \beta^l + W^{-1} (y - p)) = (X^T W X)^{-1} X^T W g, \quad (13)$$

$$g = X \beta^l + W^{-1} (y - p). \quad (14)$$

Вектор g выражает связь между ответом (y) и каждый раз рассчитываемыми коэффициентами; он известен также как «скорректированный ответ». Этот алгоритм называется итерационно корректируемым методом наименьших квадратов (iteratively reweighted least squares or IRLS), так как на каждом шаге уменьшает квадрат невязки.

$$\beta^l \leftarrow \arg \min_{\beta} (g - X \beta)^T W (g - X \beta). \quad (15)$$

3. Полученные результаты

На основании данных, полученных в Сургутском окружном кардиологическом диспансере, с помощью численного алгоритма Ньютона–Рафсона были построены математические модели вероятности неблагоприятного исхода операции аортокоронарного шунтирования для каждого способа кардиоплегии.

1. Логистическая регрессионная модель неблагоприятного исхода при кардиоплегии с помощью Кустодиол:

$$P_{1z=1}(x) = [1 + \exp(-21,009 \cdot X_5 - 0,021 \cdot X_9 + 1,024 \cdot X_{15} - 2,049 \cdot X_{23} + 25,256)]^{-1}. \quad (16)$$

2. Логистическая регрессионная модель неблагоприятного исхода при кровяной кардиоплегии:

$$P_{1z=1}(x) = [1 + \exp(-18,841 \cdot X_5 + 0,847 \cdot X_{18} - 0,923 \cdot X_2 - 1,809 \cdot X_{11} - 1,124 X_{10} + 15,158)]^{-1}. \quad (17)$$

Из тридцати исходных параметров, описывающих состояние пациента, представленных переменными из табл. 1, в модели (16) и (17) вошли не все. В модели исхода операции при кардиоплегии с помощью Кустодиол (16) отразились следующие параметры: X_5 – наличие гипертонической болезни, X_9 – проходимость левой коронарной артерии, X_{15} – объем фракции выброса, X_{23} – скорость кровотока через аортальный клапан. Модель исхода операции при кровяной кардиоплегии (17) включает следующие параметры: X_5 – наличие гипертонической болезни, X_{11} – проходимость передней межжелудочковой ветви, X_{10} – проходимость ветви тупого края, X_{18} – конечный диастолический размер, X_2 – масса тела.

Следует заметить, что в модели (16) и (17) входят разные переменные, за исключением переменной X_5 , которая является самой существенной в обеих моделях. Высокие значения β_5 говорят о превосходящем влиянии гипертонической болезни сердца на результат операции аортокоронарного шунтирования вне зависимости от выбранного способа кардиоплегии. Таким образом, показано, что применение того или иного способа кардиоплегии требует предварительного анализа различных параметров.

4. Правдоподобие и адекватность моделей

Для проверки правдоподобия моделей, т.е. определения, насколько полученное теоретическое распределение соответствует экспериментальному, применялись логарифмическая функция правдоподобия $f(p) = -2\text{Ln}(\ell(x, \beta))$ и коэффициент детерминации R^2 Кокса–Шнела:

$$R^2 = 1 - \left\{ \frac{L(M_{\text{Intercept}})}{L(M_{\text{Full}})} \right\}^{2/N}, \quad (18)$$

где L – оценка вероятности; $M_{\text{Intercept}}$ – модель, дополненная данными для проверки; M_{Full} – исходная модель.

В табл. 2 представлены результаты расчета различных критериев правдоподобия моделей (16) и (17) по двум критериям.

Значения коэффициента детерминации R^2 выше 0,6 говорят об адекватной работе моделей на данных, не участвовавших в построении модели. Малые значения функции правдоподобия $-2\text{Ln}(\ell(x, \beta))$, также подтверждают высокое качество моделей (16) и (17) [5, 6].

Правдоподобие моделей вероятности неблагоприятного исхода

Модель	$-2 \log$	R^2
$P_{1z=1}$	3,054	0,781
$P_{2z=1}$	20,479	0,684

Проверить адекватность полученных моделей можно с помощью метода перекрестной проверки аналитической модели *cross-validation*. Для такой проверки исходная выборка разделяется на K приблизительно равных блоков (обычно принимается $K = 10$). Процедура моделирования, описанная алгоритмом (2)–(15), проводится на данных, входящих в $K-1$ блоков. Построение модели начинается с исключения первого блока, который используется для проверки адекватности. Затем исключается второй блок и т.п. Аналогичным образом проводится проверка K раз на моделях, полученных последовательным исключением одного из блоков.

Функция $L(a(x_i), z_i^*)$ характеризует величину отклонения значения, полученного с помощью алгоритма (2)–(15) от экспериментального значения z_i^* :

$$L(a(x_i), z_i^*) = (z_i - z_i^*)^2,$$

где $z = a(x_i)$ – результат классификации алгоритма $\mathbf{a}$; z^* – реальное значение проверяющей выборки.

Для классифицирующего алгоритма $\mathbf{a}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}$, сумма квадратов ошибок классификации, называемая в литературе функцией потерь, имеет следующий вид [6]:

$$Q(a, X^m) = \frac{1}{m} \sum_{x_i}^m L(a(x_i), z_i), x_i \in X^m, z_i \in Z^m, \quad (19)$$

где $Q(a, X^m)$ – функционал эмпирического риска модели.

Результаты проверки адекватности моделей приведены в табл. 3.

Таблица 3

Значения функции потерь, полученные в результате перекрестной проверки на разных блоках

Номер блока Модель	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	сумма
$Q(a, X^m)$ для $P_{1z=1}$	0,009	0,017	0,009	0,000	0,009	0,009	0,018	0,009	0,018	0,000	0,090
$Q(a, X^m)$ для $P_{2z=1}$	0,009	0,000	0,000	0,019	0,028	0,009	0,009	0,000	0,009	0,000	0,085

В табл. 3 в первой строке указаны номера блоков, последовательно исключаемые из процедуры математического моделирования по алгоритму (2)–(15), но участвовавшие в проверке адекватности. Во второй строке таблицы приводятся значения функционала потерь для модели $P_{1z=1}$ – вероятности исхода операции аортокоронарного шунтирования при кардиоплегии Кустодиол. В третьей строке содержатся значения функционала потерь для модели $P_{2z=1}$ – вероятности исхода операции при использовании кровяной кардиоплегии.

Считается, что чем ближе значения функционала потерь к 0,1, тем больше ошибок имеется в модели [6]. При использовании первого способа кардиоплегии в трех блоках: 2-, 7- и 9-м, при проверке было найдено по две ошибки классификации. В 1, 3, 5, 6, 8-м, блоках найдено по одной ошибке. В 4- и 10-м блоках ошибок классификации не найдено. Таким образом, в 92% случаев модель верно предсказывает вероятность исхода операции при кардиоплегии с помощью Кустодиол.

Лучшие результаты классификации получены для модели $P_{2z=1}$. При перекрестной проверке на блоках 4 и 5 оказалось соответственно две и три ошибки прогнозирования исхода. В блоках 1, 6 и 9 найдено по одной ошибке классификации. Модель (17) дает верный прогноз исхода в 96% случаев.

Заключение

Таким образом, получены математические модели исхода операции аортокоронарного шунтирования при остром инфаркте миокарда для двух способов кардиоплегии: кровяная кардиоплегия и кардиоплегия раствором «Кустадиол». Соответствие полученных моделей экспериментальной функции распределения оценивалось следующими показателями: логарифмической функцией правдоподобия и коэффициентом детерминации R^2 Кокса–Шнелла. Значения коэффициента детерминации и логарифмической функции правдоподобия говорят о том, что полученные математические модели правдоподобны.

Для проверки адекватности моделей проводилась перекрестная проверка с оценкой функционала риска. Значение функционала $Q < 0,01$ подтверждает адекватность результатов. Установлено, что наличие гипертонической болезни повышает операционный риск, что подтверждает опыт многолетней практики, описанный в работах Е.И. Чазова с коллегами в [2, 3]. Компьютерное исследование на моделях (16)–(17) показало, что применение того или иного способа защиты миокарда во время операции обусловлено влиянием различных параметров, описывающих состояние пациента до операции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Информационный бюллетень №317 Январь 2015 г. URL: <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs317/ru/>
2. Руководство по кардиологии : учеб. пособие : в 3 т. / под ред. Г.И. Сторожакова, А.А. Горбаченкова. 2008. Т. 1. 672 с.
3. Руководство по кардиологии : в 4 т. Т. 3: Заболевания сердечно-сосудистой системы (I) / под ред. Е.И. Чазова М. : Практика, 2014. 864 с.
4. Дюк В.А., Курапеев Д.И. Применение методов интеллектуального анализа данных для оценки риска оперативного вмешательства в кардиохирургии // Тр. СПИИРАН. 2009. Т. 9. С. 187–196.
5. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning. Data Mining, Inference, and Prediction. Second Edition. Springer, 2009.
6. Микшина В.С., Егоров А.А. Модель принятия решений хирурга // Вестник Новых медицинских технологий. 2011. Т. XVII, № 4. С. 287–290.
7. Микшина В.С., Дарвин В.В., Егоров А.А., Суровов В.А. Интеллектуальная информационная система поддержки принятия решений хирурга по выбору способа завершения операции // Современные проблемы науки и образования. 2011. № 5. URL: <http://www.science-education.ru/99-4930>
8. Ташкинов А.А., Вильдеман А.В., Бронников В.А. Применение метода деревьев классификации к прогнозированию уровня развития моторики у больных с нарушениями двигательных функций // Российский журнал биомеханики. 2008. Т. 12, № 4 (42). С. 84–95
9. Воронцов К.В. Курс лекций: Линейные методы классификации. 2009. URL: <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/6/68/Voron-ML-Lin.pdf>
10. Айвазян С.А. и др. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. М. : Финансы и статистика, 1983. 471 с.

Микшина Виктория Степановна, канд. техн. наук, профессор. E-mail: mikshinavs@gmail.com

Павлов Сергей Игоревич. E-mail: sergey8991@mail.ru

Сургутский государственный университет

Поступила в редакцию 21 октября 2016 г.

Mikshina Victoria S., Pavlov Sergey I. (Surgut State University, Russian Federation).

The use of logistic regression in choosing method of cardioplegia.

Keywords: logistic regression; forward selection; decision support in medicine.

DOI: 10.17223/19988605/39/7

In bypass surgery in acute myocardial infarction a cardiac standstill is expected for manipulating coronary vessels. To protect the heart muscle (myocardium), special techniques are applied. Paper presents the results of the mathematical modeling choice method of protection (cardioplegia) myocardium during coronary artery bypass surgery. As a guideline for choosing cardioplegia is used forecasting the outcome of the operation using a mathematical model of logistic regression, allowing a certain probability attributed the outcome of the operation to one of two classes: a favorable outcome or unfavorable. The inclusion of variables in the regression model was carried out by using the method “forward selection”, i.e., consistent inclusion of variables that increase the adequacy and the value of the log-likelihood function of the model and serial elimination of variables reducing the adequacy. The values of the weighting coefficients in the model are calculated using the Newton-Raphson algorithm. Computer investigation method of choice cardioplegia models showed that the use of a particular method of myocardial protection during surgery caused by influence of various parameters describing the condition of the patient before surgery.

REFERENCES

1. WHO. (2015) Serdechno-sosudistye zavolevaniya [Cardio-Vascular Diseases]. *Informatsionnyy byulleten'*. 317. [Online] Available from: <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs317/ru/>
2. Storozhakov, G.I. & Gorbachenkov, A.A. (eds) (2008) *Rukovodstvo po kardiologii* [Manual of Cardiology]. Vol. 1. Moscow: GEOTAR Media.
3. Chazov, E.I. (ed.) (2014) *Rukovodstvo po kardiologii : v 4 t.* [Manual of Cardiology in four vols]. Vol. 3. Moscow: Praktika.
4. Dyuk, V.A. & Kurapeev, D.I. (2009) Primenenie metodov intellektual'nogo analiza dannykh dlya otsenki riska operativnogo vmeshatel'stva v kardiokhirurgii [Application of data mining for risk assessment in cardiac surgery]. *Tr. SPIIRAN - SPIIRAS Proceedings*. 9 pp. 187–196.
5. Hastie, T., Tibshirani, R. & Friedman, J. (2009) The Elements of Statistical Learning. *Data Mining, Inference, and Prediction*. 2nd ed. Springer.
6. Mikshina, V.S. & Egorov, A.A. (2011) Model' prinyatiya resheniy khirurga [Decision making model of surgeon]. *Journal of New Medical Technologies*. 17(4). pp. 287-290.
7. Mikshina, V.S., Darwin, V.V., Egorov, A.A. & Surovov V.A. (2011) The intelligent information system supporting decision-making on the surgeon's choice of method of completion of the operation. *Modern problems of science and education*. no.5. URL <http://www.science-education.ru/99-4930>
8. Tashkinov, A.A., Wildemann, A.V. & Bronnikov, V.A. (2008) Primenenie metoda derev'ev klassifikatsii k prognozirovaniyu urovnya razvitiya motoriki u bol'nykh s narusheniyami dvigatel'nykh funktsiy [Application of the classification tree to predict the level of motor skills in patients with impaired motor function]. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki – Russian Journal of Biomechanics*. 12(4). pp. 84–95.
9. Vorontsov, K.V. (2009) *Kurs lektsiy: Lineynye metody klassifikatsii* [Lecture course: Linear classification methods]. [Online] Available from: <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/6/68/Voron-ML-Lin.pdf>.
10. Ayvazyan, S.A. et al. (1983) *Prikladnaya statistika: Osnovy modelirovaniya i pervichnaya obrabotka dannykh* [Applied statistics: Fundamentals of modeling and primary data processing]. Moscow: Finance and Statistics.

A.I. Rouban

THE SENSITIVITY FUNCTIONALS IN THE BOLTS'S PROBLEM FOR MULTIVARIATE DYNAMIC SYSTEMS DESCRIBED BY ORDINARY INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

The variational method of calculation of sensitivity functional (connecting first variation of quality functional with variations of variable and constant parameters) for multivariate non-linear dynamic systems, described by ordinary Volterra's the second-kind integro-differential equations by use of the generalized quality functional of a dynamic system (the Bolts problem) is developed.

Key words: variational method; sensitivity functional; integro-differential equation; conjugate equation.

The problem of calculation of sensitivity functional (SF) (connecting first variation of quality functional with variations of variable and constant parameters) and sensitivity coefficients (SC) (components of vector gradient from quality functional according to constant parameters) of dynamic systems are main at the analysis and syntheses of control laws, identification, optimization [1–7]. The first-order sensitivity indexes are most used. Later on we shall examine only SF and SC of the first-order.

Consider a vector output $x(t)$ of dynamic object model under continuous time $t \in [t_0, t^1]$, implicitly depending on vectors parameters $\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}$, and functional I constructed on the basis of $x(t)$ under $t \in [t_0, t^1]$. The first variation δI and variations $\delta \tilde{\alpha}(t)$ are connected with each other with the help of a single-line functional –

SF with respect to variable parameters $\tilde{\alpha}(t)$: $\delta_{\tilde{\alpha}(t)} I = \int_{t_0}^{t^1} V(t) \delta \tilde{\alpha}(t) dt$. SC with respect to constant parameters $\bar{\alpha}$

are called a gradient from I on $\bar{\alpha}$: $(dI / d\bar{\alpha})^T \equiv \nabla_{\bar{\alpha}} I$. SC are a coefficients of single-line relationship between the first variation of functional δI and the variations of constant parameters

$$\bar{\alpha} : \delta_{\bar{\alpha}} I = (dI / d\bar{\alpha}) \delta \bar{\alpha} \equiv \sum_{j=1}^m (\partial I / \partial \bar{\alpha}_j) \delta \bar{\alpha}_j.$$

For simplest classes of dynamic systems it is shown, that at the SC calculation it is possible to pass from a solution of the bulky sensitivity equations to a solution of the conjugate equations – conjugated with respect to object dynamic equations. Method of receipt of conjugate equations (it was offered in 1962) is cumbersome, because it is based on the analysis of sensitivity equations, and it does not get its developments.

Variational method [4], ascending to Lagrange's, Hamilton's, Euler's memoirs, makes possible to simplify the process of determination of conjugate equations and formulas of account of SC and SF. On the basis of this method it is an extension of quality functional by means of including into it object dynamic equations by means of Lagrange's multipliers and obtaining the first variation of extended functional in phase coordinates of object and on interesting parameters. The dynamic equations for Lagrange's multipliers are obtained from a condition of equality to zero of appropriate components (relative to phase coordinates) of the first variation of an extended functional. Given simplification of first variation of extended functional brings at presence in the right part only parameter variations, i.e. it is produced the SF. If all parameters are constant then the parameters variations are carried out from corresponding integrals and at the final result in obtained functional variation the coefficients before parameters variations are the required SC. Given method was used in [8] for dynamic systems described by ordinary continuous Volterra's of the second-kind integral and integro-differential equations.

In this paper the variational method of account of SF develops to more general continuous many-dimensional non-linear dynamic systems circumscribed by the vectorial non-linear continuous Volterra's of the second-kind integro-differential equations with variable $\tilde{\alpha}(t)$ and constant $\bar{\alpha}$ parameters and with reviewing of generalised quality functional (the Bolts problem) and registration of dependencies: 1) disturbing actions of a object model from initial instant; 2) of initial t_0 and final t^1 instants from constant parameters $\bar{\alpha}$.

1. Statement of the problem

Consider that the dynamic object is described by system of non-linear continuous integro-differential equations (I-DE) with integral components of Volterra's type of the second genus and with variable $\tilde{\alpha}(t)$ and constant $\bar{\alpha}$ parameters

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), y(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t_0 < t \leq t^1, \quad x(t_0) = x_0(\bar{\alpha}, t_0), \\ y(t) &= r(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t_0, t) + \int_{t_0}^t K(t, x(s), y(s), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t^1, \quad t_0 = t_0(\bar{\alpha}), \quad t^1 = t^1(\bar{\alpha}). \end{aligned} \quad (1)$$

Here: the magnitudes of initial t_0 and final t^1 and initial values $x(t_0)$ are known functions from constant parameters $\bar{\alpha}$: $t_0 = t_0(\bar{\alpha})$, $t^1 = t^1(\bar{\alpha})$, $x(t_0) = x_0(\bar{\alpha}, t_0)$; x, y – a vector-columns of phase coordinates; $\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}$ – vector-columns of interesting variable and constant parameters; $f(\cdot)$, $r(\cdot)$, $K(\cdot)$, $t_0(\bar{\alpha})$, $t^1(\bar{\alpha})$, $x_0(\cdot)$ – known continuously differentiated limited vector-functions.

The model of a measuring device is given as

$$\eta(t) = \eta(x(t), y(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t \in [t_0, t^1], \quad (2)$$

where $\eta(\cdot)$ is also continuous, differentiated, limited (together with the first derivatives) vector-function. The required parameters $\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}$ are inserted also in (2). Dimensionality of vectors x , y and η in general event can be different.

On the basis of output coordinates of a measuring device η the quality functional of a dynamic system is constructed:

$$I(\alpha) = \int_{t_0}^{t^1} f_0(\eta(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t) dt + I_1(\eta(t^1), \bar{\alpha}, t^1). \quad (3)$$

Conditions for functions $f_0(\cdot)$, $I_1(\cdot)$ are the same as for $f(\cdot)$, $r(\cdot)$, $K(\cdot)$, $t_0(\cdot)$, $t^1(\cdot)$, $x_0(\cdot)$, etc.

With use of a functional (3) in the optimization problem (in the theory of optimal control) known as the Bolts's problem. From it as the individual variants follows: Lagrange's problem (when there is only integrated component) and Mayer's problem (when there is only second component – function from phase coordinates at a finishing point).

With the purpose of simplification of appropriate deductions with preservation of a generality in all transformations (1)–(3) there are a two vectors of parameters $\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}$. If in the equations (1)–(3) the parameters are different then it is possible formally to unite them in one vector $\tilde{\alpha}(t)$ or else $\bar{\alpha}$, to use obtained outcomes and then, taking into account a structure of a vectors $\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}$, to make appropriate simplifications.

The scheme of interaction between variables of object model, measuring device and quality functional is shown in fig. 1.

By obtaining of results the obvious designations:

$$\begin{aligned} f(t) &\equiv f(x(t), y(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad r(t) \equiv r(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t_0, t), \quad K(t, s) \equiv K(t, x(s), y(s), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, s), \\ \eta(t) &\equiv \eta(x(t), y(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad f_0(t) \equiv f_0(\eta(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad I_1(t^1) \equiv I_1(\eta(t^1), \bar{\alpha}, t^1) \end{aligned}$$

are used.

Let's pass from the integro-differential equations (I-DE) to integral equations (IE), we shall apply results of paper [9] and then shall return to initial variables.

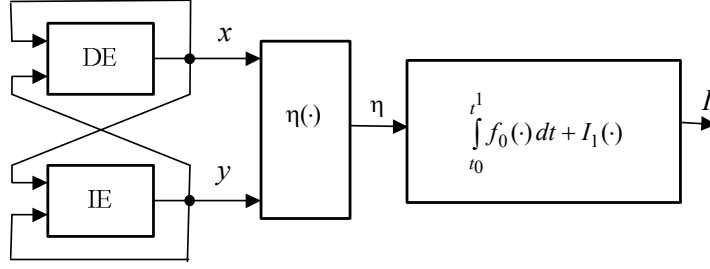


Fig. 1. Scheme of interaction between variables in (1)–(3)

The convenience of a integro-differential model consists in its structural universality. At simplification of a model it is enough in final results to convert in a zero appropriate addends. This reception we shall apply in a final part of this paper.

2. Basic result

In I-DE (1) the we write differential equation in the integral form

$$x(t) = x_0(\bar{\alpha}, t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s), y(s), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t^1. \quad (4)$$

We use notations

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t_0, t) = \begin{pmatrix} x_0(\bar{\alpha}, t_0) \\ r(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t_0, t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_0(\bar{\alpha}, t_0) \\ r(t) \end{pmatrix} \equiv \tilde{r}(t), \\ \tilde{K}(t, \tilde{y}(s), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s) &= \begin{pmatrix} f(x(s), y(s), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s) \\ K(t, x(s), y(s), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f(s) \\ K(t, s) \end{pmatrix} \equiv \tilde{K}(t, s), \end{aligned} \quad (5)$$

and obtain IE

$$\tilde{y}(t) = \tilde{r}(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t_0, t) + \int_{t_0}^t \tilde{K}(t, \tilde{y}(s), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t^1. \quad (6)$$

In further also a notation

$$\eta(t) \equiv \eta(\tilde{y}(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t) \quad (7)$$

is used for a model of a measuring device.

We apply results of paper [9] for models (4), (6) and functional (3) with variables and constant parameters $\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}$. The conjugate equations for Lagrange's multipliers $\gamma(t)$ have a form:

$$\gamma^T(t) = \Phi(t^1) \frac{\partial \tilde{K}(t^1, t)}{\partial \tilde{y}(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{y}(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial \tilde{K}(s, t)}{\partial \tilde{y}(t)} ds, \quad t_0 \leq t \leq t^1. \quad (8)$$

Here: $\gamma(t)$ is column vector; $\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \tilde{y}(t^1)} \equiv \Phi(t^1)$. These conjugate equations are decided in the opposite direction of time (from t^1).

The form of the conjugate equations doesn't change, but they contain variables and constant parameters $\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}$.

SF for an integral model (6) has the form [9]:

$$\delta I = \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I + \delta_{\tilde{\alpha}(t^1)} I + \delta_{\bar{\alpha}} I,$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\tilde{\alpha}(t)} I &= \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \gamma^T(t) \frac{\partial \tilde{r}(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \Phi(t^1) \frac{\partial \tilde{K}(t^1, t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial \tilde{K}(s, t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} ds \right] \delta \tilde{\alpha}(t) dt; \\
\delta_{\tilde{\alpha}(t^1)} I &= \left[\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} + \Phi(t^1) \frac{\partial \tilde{r}(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} \right] \delta \tilde{\alpha}(t^1); \\
\delta_{\tilde{\alpha}} I &= \left\{ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}} + \Phi(t^1) \left[\frac{\partial \tilde{r}(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}} + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial \tilde{K}(t^1, s)}{\partial \tilde{\alpha}} ds \right] + \right. \\
&\quad + \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}} + \gamma^T(t) \frac{\partial \tilde{r}(t)}{\partial \tilde{\alpha}} + \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial \tilde{K}(s, t)}{\partial \tilde{\alpha}} ds \right] dt + \\
&\quad + \left[\Phi(t^1) \left[\frac{\partial \tilde{r}(t^1)}{\partial t_0} - \tilde{K}(t^1, t_0) \right] - f_0(t_0) + \int_{t_0}^{t^1} \gamma^T(t) \left(\frac{\partial \tilde{r}(t)}{\partial t_0} - \tilde{K}(t, t_0) \right) dt \right] \frac{dt_0}{d\tilde{\alpha}} + \\
&\quad \left. + \left[\Phi(t^1) \left[\frac{\partial \tilde{r}(t^1)}{\partial t^1} + \tilde{K}(t^1, t^1) + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial \tilde{K}(t^1, s)}{\partial t^1} ds \right] + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial t^1} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1) \right] \frac{dt^1}{d\tilde{\alpha}} \right\} d\tilde{\alpha}. \quad (9)
\end{aligned}$$

It is necessary in (8), (9) to fulfil matrix transformations with the registration earlier entered notations (6), and also

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \begin{pmatrix} \gamma_x(t) \\ \gamma_y(t) \end{pmatrix}, \quad \gamma^T(t) = \begin{pmatrix} \gamma_x^T(t) & \gamma_y^T(t) \end{pmatrix}, \\
\text{i.e. } \Phi(t^1) &\equiv \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \tilde{y}(t^1)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial x(t^1)} & \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial y(t^1)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Phi_x(t^1) & \Phi_y(t^1) \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial \tilde{K}(t^1, t)}{\partial \tilde{y}(t)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} & \frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} \\ \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial x(t)} & \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t)} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial r(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_0(\tilde{\alpha}, t_0)}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \frac{\partial r(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}} \end{pmatrix}, \\
\Phi(t^1) \frac{\partial \tilde{K}(t^1, t)}{\partial \tilde{y}(t)} &= \begin{pmatrix} \Phi_x(t^1) \frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} + \Phi_y(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial x(t)} & \Phi_x(t^1) \frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} + \Phi_y(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t)} \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{y}(t)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial x(t)} & \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} \end{pmatrix}, \\
\gamma^T(s) \frac{\partial \tilde{K}(s, t)}{\partial \tilde{y}(t)} &= \begin{pmatrix} \gamma_x^T(s) \frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} + \gamma_y^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial x(t)} & \gamma_x^T(s) \frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} + \gamma_y^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t)} \end{pmatrix}, \\
\Phi(t^1) \frac{\partial \tilde{r}(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}} &= \Phi_x(t^1) \frac{\partial x_0(\tilde{\alpha}, t_0)}{\partial \tilde{\alpha}} + \Phi_y(t^1) \frac{\partial r(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}}, \quad \gamma^T(t) \frac{\partial \tilde{r}(t)}{\partial \tilde{\alpha}} = \gamma_x^T(t) \frac{\partial x_0(\tilde{\alpha}, t_0)}{\partial \tilde{\alpha}} + \gamma_y^T(t) \frac{\partial r(t)}{\partial \tilde{\alpha}}, \quad (10) \\
\Phi(t^1) \frac{\partial \tilde{K}(t^1, t)}{\partial \tilde{\alpha}} &= \Phi_x(t^1) \frac{\partial f(t)}{\partial \tilde{\alpha}} + \Phi_y(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial \tilde{\alpha}}, \quad \int_t^{t^1} \gamma^T(s) \frac{\partial \tilde{K}(s, t)}{\partial \tilde{\alpha}} ds = \int_t^{t^1} [\gamma_x^T(s) \frac{\partial f(t)}{\partial \tilde{\alpha}} + \gamma_y^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial \tilde{\alpha}}] ds, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

In the total we obtain the conjugate equations for Lagrange's multipliers

$$\begin{aligned}
\gamma_x^T(t) &= \Phi_x(t^1) \frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} + \Phi_y(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial x(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial x(t)} + \int_t^{t^1} [\gamma_x^T(s) \frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} + \gamma_y^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial x(t)}] ds, \quad (11) \\
\gamma_y^T(t) &= \Phi_x(t^1) \frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} + \Phi_y(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1} [\gamma_x^T(s) \frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} + \gamma_y^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t)}] ds, \quad t_0 \leq t \leq t^1.
\end{aligned}$$

The first variation of a functional I in relation to variable $\tilde{\alpha}(t)$ and constant $\bar{\alpha}$ parameters has three components:

$$\delta I = \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I + \delta_{\tilde{\alpha}(t^1)} I + \delta_{\bar{\alpha}} I ; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I = & \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \gamma_y^T(t) \frac{\partial r(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \Phi_x(t^1) \frac{\partial f(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \Phi_y(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \right. \\ & \left. + \int_t^{t^1} [\gamma_x^T(s) \frac{\partial f(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \gamma_y^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)}] ds \right] \delta \tilde{\alpha}(t) dt ; \\ \delta_{\tilde{\alpha}(t^1)} I = & \left[\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} + \Phi_y(t^1) \frac{\partial r(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} \right] \delta \tilde{\alpha}(t^1) ; \quad \delta_{\bar{\alpha}} I = \left\{ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \right. \\ & + \Phi_x(t^1) \left[\frac{\partial x_0(\bar{\alpha}, t_0)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial f(s)}{\partial \bar{\alpha}} ds \right] + \Phi_y(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial \bar{\alpha}} ds \right] + \\ & + \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \gamma_x^T(t) \frac{\partial x_0(\bar{\alpha}, t_0)}{\partial \bar{\alpha}} + \gamma_y^T(t) \frac{\partial r(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \right. \\ & \left. + \int_t^{t^1} [\gamma_x^T(s) \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \gamma_y^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial \bar{\alpha}}] ds \right] dt + \left[\Phi_x(t^1) \left[\frac{\partial x_0(\bar{\alpha}, t_0)}{\partial t_0} - f(t_0) \right] + \right. \\ & + \Phi_y(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t_0} - K(t^1, t_0) \right] - f_0(t_0) + \int_{t_0}^{t^1} \gamma_x^T(t) dt \left(\frac{\partial x_0(\bar{\alpha}, t_0)}{\partial t_0} - f(t_0) \right) + \int_{t_0}^{t^1} \gamma_y^T(t) \left(\frac{\partial r(t)}{\partial t_0} - K(t, t_0) \right) dt \left. \right] \frac{dt_0}{d\bar{\alpha}} + \\ & + \left[\Phi_x(t^1) f(t^1) + \Phi_y(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t^1} + K(t^1, t^1) + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial t^1} ds \right] + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial t^1} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1) \right] \frac{dt^1}{d\bar{\alpha}} \Bigg\} d\bar{\alpha} . \end{aligned}$$

It is expedient to add the conjugate equations for Lagrange's multipliers (11) too form of the integro-differential equations.

We enter new variable $\Phi_x(t^1) + \int_t^{t^1} \gamma_x^T(s) ds = \lambda_x^T(t)$, either $\gamma_x^T(t) = -\dot{\lambda}_x^T(t)$, $\lambda_x^T(t^1) = \Phi_x(t^1)$, and change

an order of integrating in double integral inside of triangular area [9]: $\int_{t_0}^{t^1} \int_{t_0}^t A(t, s) ds dt = \int_{t_0}^{t^1} \int_t^{t^1} A(s, t) ds dt$. Then

conjugate equations (11) are noted as (13) and SF (see (12)) are calculated under the formula (14).

Conjugate equations have the form

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}_x^T(t) = \lambda_x^T(t) \frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} + \Phi_y(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial x(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial x(t)} + \int_t^{t^1} \gamma_y^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial x(t)} ds, \quad t \in [t_0, t^1], \quad \lambda_x^T(t^1) = \Phi_x(t^1), \\ \gamma_y^T(t) = \lambda_x^T(t) \frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} + \Phi_y(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} + \int_t^{t^1} \gamma_y^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t)} ds, \quad t_0 \leq t \leq t^1. \end{aligned} \quad (13)$$

Here $\Phi_x(t^1) \equiv \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial x(t^1)}$, $\Phi_y(t^1) \equiv \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial y(t^1)}$.

SF are calculated under the formula:

$$\begin{aligned}
\delta I = \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I + \delta_{\tilde{\alpha}(t^1)} I + \delta_{\bar{\alpha}} I; \quad \delta_{\tilde{\alpha}(t)} I = \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \gamma_y^T(t) \frac{\partial r(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \lambda_x^T(t) \frac{\partial f(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \right. \\
\left. + \Phi_y(t^1) \frac{\partial K(t^1, t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \int_t^{t^1} \gamma_y^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} ds \right] \delta \tilde{\alpha}(t) dt; \quad \delta_{\tilde{\alpha}(t^1)} I = \left[\frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} + \Phi_y(t^1) \frac{\partial r(t^1)}{\partial \tilde{\alpha}(t^1)} \right] \delta \tilde{\alpha}(t^1); \\
\delta_{\bar{\alpha}} I = \left\{ \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \lambda_x^T(t_0) \frac{\partial x_0(\bar{\alpha}, t_0)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_{t_0}^{t^1} \lambda_x^T(t) \frac{\partial f(t)}{\partial \bar{\alpha}} dt + \Phi_y(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial \bar{\alpha}} ds \right] + \right. \\
\left. + \int_{t_0}^{t^1} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \gamma_y^T(t) \frac{\partial r(t)}{\partial \bar{\alpha}} + \int_t^{t^1} \gamma_y^T(s) \frac{\partial K(s, t)}{\partial \bar{\alpha}} ds \right] dt + \left[\lambda_x^T(t_0) \left(\frac{\partial x_0(\bar{\alpha}, t_0)}{\partial t_0} - f(t_0) \right) + \right. \right. \\
\left. \left. + \Phi_y(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t_0} - K(t^1, t_0) \right] - f_0(t_0) + \int_{t_0}^{t^1} \gamma_y^T(t) \left(\frac{\partial r(t)}{\partial t_0} - K(t, t_0) \right) dt \right] \frac{dt_0}{d\bar{\alpha}} + \right. \\
\left. + \left[\Phi_x(t^1) f(t^1) + \Phi_y(t^1) \left[\frac{\partial r(t^1)}{\partial t^1} + K(t^1, t^1) + \int_{t_0}^{t^1} \frac{\partial K(t^1, s)}{\partial t^1} ds \right] + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial \eta(t^1)} \frac{\partial \eta(t^1)}{\partial t^1} + \frac{\partial I_1(t^1)}{\partial t^1} + f_0(t^1) \right] \frac{dt^1}{d\bar{\alpha}} \right\} \delta \bar{\alpha}.
\end{aligned} \tag{14}$$

The obtained form of representation of the conjugate equations and SF allows easily to write out outcomes with reviewing separately of differential and integrated models or their various combinations.

3. SF with use of variants of an integro-differential models

Variant 3.1. In initial statement of the task (1)–(2) the equations of a model of object and measuring device vary:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = f(x(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t_0 < t \leq t^1, \quad x(t_0) = x_0(\bar{\alpha}, t_0), \quad t_0 = t_0(\bar{\alpha}), \quad t^1 = t^1(\bar{\alpha}), \\
y(t) = r(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t_0, t) + \int_{t_0}^t K(t, x(s), y(s), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t^1; \\
\eta(t) = \eta(y(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t \in [t_0, t^1].
\end{aligned} \tag{15}$$

The scheme of interaction between variables of a object model, measuring device and quality functional is shown in fig. 2.

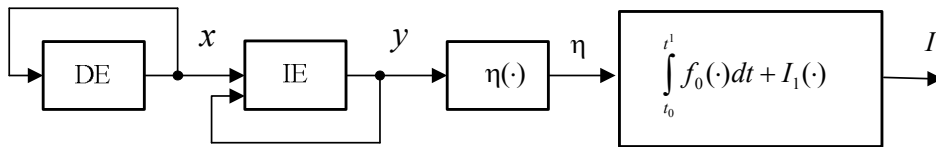


Fig. 2. The scheme of interaction between variables in (15), (3)

In total results (13), (14) it is necessary to take into account that $\partial \eta / \partial x = 0$, $\Phi_x(t^1) = 0$, $\partial f(t) / \partial y(t) = 0$.

Variant 3.2. The equations of a object model and measuring device look like:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = f(y(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t_0 < t \leq t^1, \quad x(t_0) = x_0(\bar{\alpha}, t_0), \\
y(t) = r(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t_0, t) + \int_{t_0}^t K(t, x(s), y(s), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t^1, \quad t_0 = t_0(\bar{\alpha}), \quad t^1 = t^1(\bar{\alpha}), \\
\eta(t) = \eta(y(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t \in [t_0, t^1].
\end{aligned} \tag{16}$$

The scheme of interaction between variables of a object model, measuring device and quality functional is represented in fig. 3.

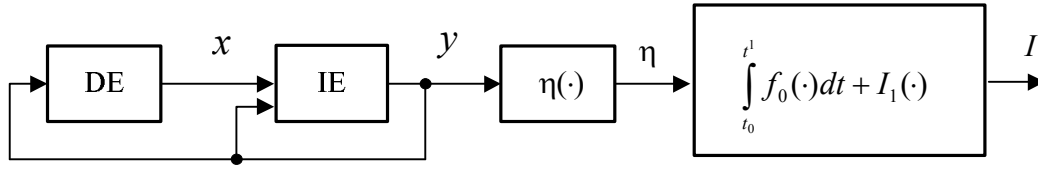


Fig. 3. The scheme of interaction between variables in (16), (3)

In total results (13), (14) it is necessary to take into account that $\partial\eta/\partial x = 0$, $\Phi_x(t^1) = 0$, $\partial f(t)/\partial x(t) = 0$.

Variante 3.3. The equations of a object model and measuring device look like:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), y(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t_0 < t \leq t^1, \quad x(t_0) = x_0(\bar{\alpha}, t_0), \\ y(t) &= r(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t_0, t) + \int_{t_0}^t K(t, s, y(s), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}) ds, \quad t_0 \leq t \leq t^1, \quad t_0 = t_0(\bar{\alpha}), \quad t^1 = t^1(\bar{\alpha}), \\ \eta(t) &= \eta(x(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t \in [t_0, t^1]. \end{aligned} \quad (17)$$

x is a basic variable. It satisfies to the differential equation. The variable y represents itself as input for a basic differential model and y satisfies to an independent integral equation. The scheme of interaction between variables is shown in fig. 4.

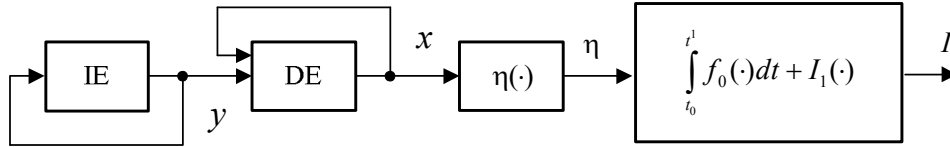


Fig. 4. The scheme of interaction between variables in (17), (3)

In total results (13), (14) it is necessary to take into account that $\partial\eta/\partial y = 0$, $\Phi_y(t^1) = 0$, $\partial K(s, t)/\partial x(t) = 0$.

Variante 3.4. The equations of a object model have the form:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), y(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t_0 < t \leq t^1, \quad x(t_0) = x_0(\bar{\alpha}, t_0), \\ y(t) &= r(\tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t_0, t) + \int_{t_0}^t K(t, x(s), \tilde{\alpha}(s), \bar{\alpha}, s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t^1, \quad t_0 = t_0(\bar{\alpha}), \quad t^1 = t^1(\bar{\alpha}), \\ \eta(t) &= \eta(x(t), \tilde{\alpha}(t), \bar{\alpha}, t), \quad t \in [t_0, t^1]. \end{aligned} \quad (18)$$

The variable y is auxiliary. It reflects rather simple integrated connection from a basic variable x . The exit of a measuring device also depends only on a basic variable.

The scheme of interaction between variables is represented in fig. 5.

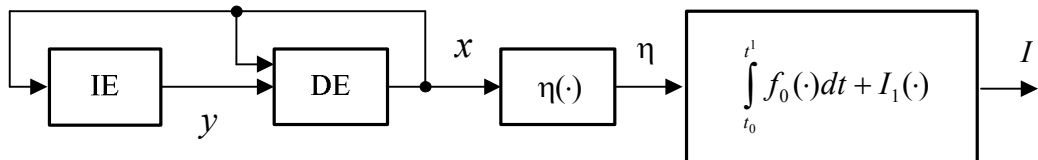


Fig. 5. The scheme of interaction between variables in (18), (3)

In total results for conjugate equations (13) and SC (14) it is necessary to take into account that $\partial\eta/\partial y = 0$, $\Phi_y(t^1) = 0$, $\partial K(s, t)/\partial y(t) = 0$.

This article continues research in [7–9].

Conclusion

In this paper the variational method of calculation SF and SC for the multivariate nonlinear dynamic systems described by general continuous vectorial Volterra's of the second-kind integro-differential equations is developed.

Novelty and generality of results consists in a generality of dynamic object model, of the measuring device model and of quality functional (in the Bolts problem). In models both variables and constant parameters are present. In a basis of calculation of sensitivity indexes the decision of the integro-differential equations of object model in a forward direction of time and obtained integro-differential equations for Lagrange's multipliers in the opposite direction of time lays.

Received in paper SF are more general in comparison with known in the scientific literature.

It is shown, that by consideration of more simple dynamic systems it is enough to put in the received results to zero corresponding additives – look section 3.

Examples of reception from final result sensitivity functionals for the objects described by ordinary integral equations, by ordinary differential equations and by 4-th variants of an integro-differential models are resulted.

Variational method of calculation of SC and SF allows to do a generalization on more complex dynamic system classes, described by: integral and integro-differential equations with additional some time lag and different classes of discontinuous dynamic equations.

Results are applicable at the decision of problems of identification, adaptive optimal control and optimization of dynamic systems, i.e. they allow to create precision systems and devices.

REFERENCES

1. Ostrovskiy, G.M. & Volin, Yu.M. (1967) *Metody optimizatsii khimicheskikh reaktorov* [Methods of optimization of chemical reactors]. Moscow: Khimiya.
2. Speedy, C.B., Brown, R.F. & Goodwin, G.C. (1973) *Teoriya upravleniya. Identifikatsiya i optimal'noe upravlenie* [Control theory: identification and optimal control]. Translated from English by Yu.F. Kichatov. Moscow: Mir. (Edinburg, Oliverand Boyd, 1970).
3. Rosenwasser, E.N. & Yusupov, R.M. (eds) (1971) *Metody teorii chuvstvitel'nosti v avtomaticheskoy upravlenii* [Methods of sensitivity theory in automatic control]. Leningrad: Energiya.
4. Bryson, A.E. & Ho, Ju-Chi. (1972) *Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya* [Applied optimal control]. Moscow: Mir.
5. Ruban, A.I. (1975) *Identifikatsiya nelineynykh dinamicheskikh ob"ektov na osnove algoritma chuvstvitel'nosti* [Nonlinear dynamic object identification on the base of sensitivity algorithm]. Tomsk: Tomsk State University.
6. Rosenwasser, E.N. & Yusupov, R.M. (1981) *Chuvstvitel'nost' sistem upravleniya* [Sensitivity of control systems]. Moscow: Nauka.
7. Ruban, A.I. (1982) *Identifikatsiya i chuvstvitel'nost' slozhnykh sistem upravleniya* [Identification and sensitivity of complex systems]. Tomsk: Tomsk State University.
8. Rouban, A.I. (1999) Coefficients and functionals of sensitivity for multivariate systems described by integral and integro-differential equations. *AMSE Journals, Series Advances A*. 35(1). pp. 25–34.
9. Rouban, A.I. (2017) The Sensitivity Functionals in the Bolts's Problem for Multivariate Dynamic Systems described by Ordinary Integral Equations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 38. pp. 30–36. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/38/5

Rouban Anatoly Ivanovich, Dr. Science, prof. E-mail: ai-rouban@mail.ru
Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation

Поступила в редакцию 2 ноября 2016 г.

Рубан Анатолий Иванович (Сибирский Федеральный университет, г. Красноярск, Российская Федерация).

Функционалы чувствительности в задаче Больца для многомерных динамических систем, описываемых обыкновенными интегро-дифференциальными уравнениями.

Ключевые слова: вариационный метод; функционал чувствительности; обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение; функционал качества работы системы; задача Больца; сопряженное уравнение.

DOI: 10.17223/19988605/39/8

Вариационный метод применен для расчета функционалов чувствительности, которые связывают первую вариацию функционалов качества работы систем с вариациями переменных и постоянных параметров для многомерных нелинейных динамических систем, описываемых обобщенными обыкновенными интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра второго рода.

А.Н. Тырсин, А.А. Сурина**МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСКА В МНОГОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ***Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-06-00048).*

Описан подход к моделированию и исследованию риска многомерных стохастических систем. Он основан на гипотезе, которая состоит в том, что риском можно управлять за счет изменения вероятностных свойств компонент системы. При этом систему моделируют в виде случайного вектора. Показано, что данный подход позволяет формулировать оптимизационные задачи минимизации риска. Приведены примеры управления риском для модельных гауссовских случайных векторов.

Ключевые слова: риск; стохастическая система; случайный вектор; модель; нормальное распределение.

В последние годы резко возросли масштабы и частота природных катаклизмов, техногенных катастроф, террористических актов и экономических потрясений. Но создание систем, обладающих устойчивостью по отношению к природным, техногенным и преднамеренным катастрофам, невозможно без разработки соответствующего теоретического аппарата в области анализа риска, а также практических методов и средств. Поэтому проблематика исследований в области анализа риска в настоящее время становится одной из актуальных.

В широком смысле под риском понимают возможную опасность какого-либо неблагоприятного исхода. Обычно моделирование риска сводится к выделению опасных исходов, количественному заданию последствий от их наступления и оцениванию вероятностей этих исходов [1. С. 37–43]. При этом вклад компонент многомерной системы объединяют и рассматривают уже одномерную систему как случайную величину [1. С. 148–156; 2. С. 82–87]. Но вопрос взаимного влияния опасных ситуаций, вызванных разными элементами многомерной системы, малоисследован, обычно им пренебрегают, считая разные опасные исходы взаимно независимыми, и также пренебрегают вероятностью их одновременного наступления. Для относительно простых объектов, когда можно априори указать все опасные исходы, при наличии статистической информации или экспертных оценок о шансах их появления в целом данный подход дает приемлемые на практике результаты. Во многих случаях здесь удастся накопить статистический материал для оценивания вероятностей наступления опасных исходов, а форму взаимосвязи между элементами системы считают достаточно простой и описываемой, например, с помощью логико-вероятностных моделей риска [3, 4].

Однако у сложных систем структура взаимодействия между элементами значительно усложняется и часто не может быть описана с помощью логико-вероятностных моделей. Понятия опасных исходов также могут размыться, делая невозможным их конкретное выделение.

Таким образом, несмотря на большое количество исследований в области риска, взаимному влиянию на безопасность сложных многомерных систем ее элементов и различных факторов уделяется недостаточно внимания. Во многих случаях, когда нет возможности явно связать разные факторы риска в виде логико-вероятностной модели, их корреляция при расчете риска не учитывается. Поэтому представляется актуальной научная проблема построения моделей, позволяющих оценивать риск многомерных стохастических систем, элементы которых коррелированы между собой.

1. Модель риска в многомерных стохастических системах

Рассмотрим один возможный подход к моделированию риска в многомерных стохастических системах [5]. Имеем некоторую многомерную стохастическую систему S . Будем считать адекватной ма-

тематической моделью представление этой системы в виде непрерывного случайного вектора [6]. Каждая компонента случайного вектора описывает поведение элемента системы. Взаимосвязанность элементов учтем с помощью коррелированности компонент случайного вектора. Если имеем слишком большую размерность системы, то ее можно сократить. Это можно выполнить, например, с помощью факторного анализа [7. С. 178–237]. В результате имеем модель системы S в виде случайного вектора $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ с плотностью вероятности $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$.

В отличие от известного подхода, основанного на выделении конкретных опасных ситуаций [1], будем задавать геометрические области неблагоприятных исходов. Формально эти области могут выглядеть произвольным образом в зависимости от конкретной задачи и определяются на основе имеющейся априорной информации.

Опишем предлагаемый подход, используя распространенную концепцию нежелательных событий как больших и маловероятных отклонений случайной величины относительно математического ожидания. Тогда опасными ситуациями будем считать большие и маловероятные отклонения выборочных значений x_{ij} любой из компонент X_j относительно математических ожиданий $\mu_j = E[X_j]$, $j = 1, 2, \dots, m$. Вероятность неблагоприятного исхода для каждой из компонент X_j без учета влияния других компонент зададим как

$$P(D_j) = P(X_j \in D_j), \quad D_j = \{x : |x - \mu_j| > A_j \sigma_j\},$$

где σ_j – среднее квадратическое отклонение случайной величины X_j , A_j – заданный пороговый уровень.

Учтем взаимное влияние компонент на появление неблагоприятных исходов в виде величины расстояния исхода относительно точки математических ожиданий всех компонент $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$. Тогда для случайного вектора $\mathbf{X}$ вероятность неблагоприятного исхода будет равна

$$P(D) = P(\mathbf{X} \in D), \quad D = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) : \sum_{j=1}^m \frac{(x_j - \mu_j)^2}{A_j^2 \sigma_j^2} > 1 \right\}. \quad (1)$$

Заметим, что в (1) область D неблагоприятных исходов представляет собой внешнюю область m -осного эллипсоида, у которого полуоси по каждой из координат равны $A_j \sigma_j$ соответственно, т.е. по каждой j -й оси эта область соответствует одномерному случаю D_j . Очевидно, когда исход не лежит на одной из осей, то событие D может реализоваться и при отсутствии рискованных отклонений по всем компонентам (возможны ситуации $\mathbf{X} \in D$ и $\forall j X_j \notin D_j$).

Задав функцию последствий от опасных ситуаций в виде $g(\mathbf{x})$, получим модель для количественной оценки риска

$$r(\mathbf{X}) = \int \int \dots \int_{R^m} g(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

причем для определенности можно считать, что $\forall \mathbf{x} \notin D \quad g(\mathbf{x}) = 0$.

Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда вектор $\mathbf{X}$ имеет совместное нормальное распределение с плотностью вероятности

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right\}, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\Sigma}$ – ковариационная матрица, $\mathbf{a}$ – вектор математических ожиданий.

Зададим размерность вектора $\mathbf{X}$ от 1 до 5. В [8] введен коэффициент тесноты совместной линейной корреляционной связи компонент случайного вектора $\mathbf{X}$, равный

$$D_e(\mathbf{X}) = 1 - |\mathbf{R}_{\mathbf{X}}|^{1/m},$$

где $|\mathbf{R}_{\mathbf{X}}|$ – определитель корреляционной матрицы случайного вектора $\mathbf{X}$. Очевидно, что коэффициент $0 \leq D_e(\mathbf{X}) \leq 1$. Рассмотрим предельные случаи: $D_e(\mathbf{X}) = 0$ (независимость компонент X_j), $D_e(\mathbf{X}) = 1$ (линейная зависимость компонент). Результаты расчета вероятности неблагоприятного исхода (1) приведены на рис. 1. Для наглядности примем $A_1 = A_2 = \dots = A_m = A$.

Анализ графиков на рис. 1 говорит о следующем. Увеличение размерности m и тесноты корреляционной связи между компонентами случайного вектора $\mathbf{X}$ приводит к резкому росту вероятности неблагоприятного исхода. Причем на рост вероятности неблагоприятного исхода увеличение размерности влияет значительно сильнее, чем увеличение тесноты корреляционной связи.

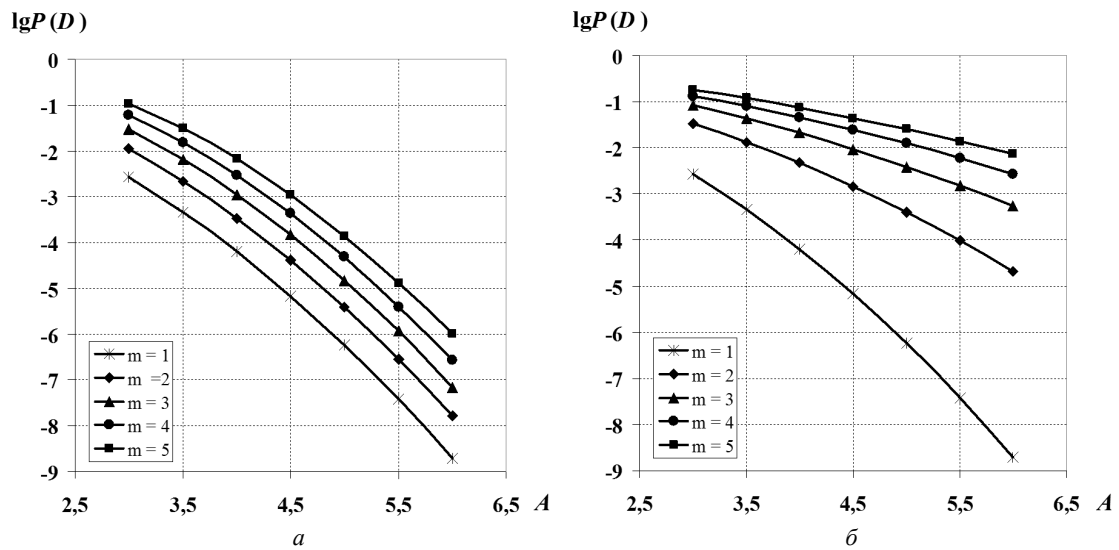


Рис. 1. Зависимости $\lg P(D)$ от порогового уровня A : $a - D_e(\mathbf{X}) = 0$; $b - D_e(\mathbf{X}) = 1$

В качестве иллюстрации на рис. 2 покажем, как меняется с ростом значений A , отношение вероятности $P(D)$ при коррелированности и некоррелированности компонент случайного вектора $\mathbf{X}$ размерности $m = 5$.

Из этого рисунка видим, что с ростом A вероятность неблагоприятного исхода у коррелированных систем ($D_e(\mathbf{X}) \rightarrow 1$), по сравнению с некоррелированными ($D_e(\mathbf{X}) \rightarrow 0$), резко возрастает. В частности при $A = 6$ вероятность, а значит, и риск неблагоприятного исхода более чем в 7 000 раз выше у коррелированной системы по сравнению с некоррелированной.

Таким образом, при моделировании риска в стохастических системах нужно учитывать как фактор многомерности, так и тесноту корреляционных связей.

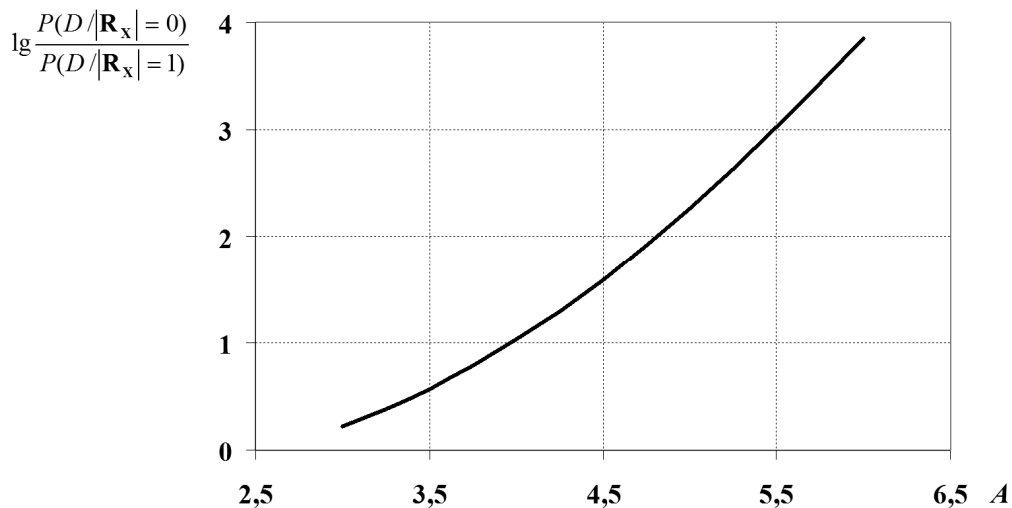


Рис. 2. Отношение вероятности $P(D)$ при коррелированности и некоррелированности компонент случайного вектора $\mathbf{X}$ размерности $m = 5$

Данный подход к моделированию риска позволяет на практике осуществлять управление стохастической системой с целью снижения рисков. Суть такого управления состоит в следующем.

Рассмотрим некоторую m -мерную гауссовскую стохастическую систему S . Используем в качестве математической модели этой системы случайный вектор $\mathbf{X}$ с плотностью вероятности (2).

Задав функцию последствий от опасных ситуаций $g(\mathbf{x})$ и введя ограничения $G(\Sigma)$ и $H(\mathbf{a})$ на допустимые значения параметров плотности $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, сформулируем задачу минимизации риска

$$\begin{cases} r(\mathbf{X}) = \int \int \dots \int_{R^m} g(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \rightarrow \min_{\Sigma, \mathbf{a}}, \\ \Sigma \in G(\Sigma), \mathbf{a} \in H(\mathbf{a}). \end{cases} \quad (3)$$

Варьируя элементы ковариационной матрицы и вектора математических ожиданий случайного вектора $\mathbf{X}$, решив задачу (3), получим минимально возможный риск функционирования системы.

2. Модельные примеры управления риском для гауссовских случайных векторов

Рассмотрим примеры управления риском для гауссовских случайных векторов.

Пример 1. С целью наглядности рассмотрим двумерный гауссовский случайный вектор с плотностью вероятности

$$p_{X_1, X_2}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1-a_1, x_2-a_2)},$$

где $Q(y_1, y_2) = \frac{1}{1-\rho^2} \left(\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \right)$, $y_i = x_i - a_i$, $i = 1, 2$, ρ – коэффициент корреляции между случайными величинами X_1 и X_2 . Зададим для определенности нулевые математические ожидания и единичные дисперсии. Очевидно, что оси симметрии эллипса рассеяния имеют углы 45° и 135° .

Зададим область неблагоприятных исходов, например, в виде круга единичного радиуса с центром в точке $(A \cos \theta, A \sin \theta)$:

$$D = \{(x_1, x_2) : (x_1 - A \cos \theta)^2 + (x_2 - A \sin \theta)^2 \leq 1\}, \quad A = 4.$$

Отметим, что это не противоречит введенной в (1) области неблагоприятных исходов, а лишь является некоторым частным случаем, показывающим на модельном примере, как можно снижать риск для ситуаций, когда неблагоприятные исходы могут находиться также и в относительной близости от области средних значений переменных.

Смоделируем управление риском за счет поворота оси симметрии эллипса рассеяния, который достигается при изменении отношения дисперсий σ_1^2 / σ_2^2 . Пусть для определенности $\rho = 0,9$. Для упрощения моделирования вместо изменения дисперсий будем менять угол поворота θ в диапазоне от 0° до 90° . Очевидно, что максимальная вероятность $P(D) = P(\mathbf{X} \in D)$ будет, если $\theta = 45^\circ$. Результаты расчета приведены на рис. 3.

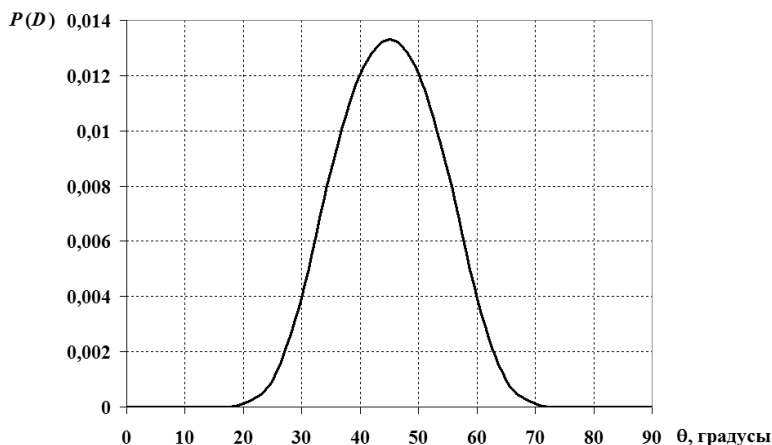


Рис. 3. Расчет вероятности неблагоприятного исхода $P(D)$ в зависимости от угла поворота θ при $\rho = 0,9$

Далее зафиксируем угол поворота $\theta = 45^\circ$, но будем изменять коэффициент корреляции ρ . Результаты расчета приведены на рис. 4.

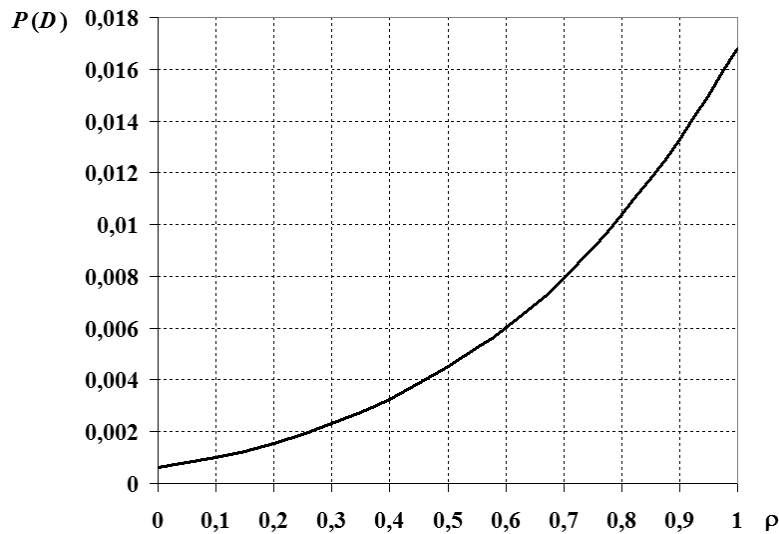


Рис. 4. Расчет вероятности неблагоприятного исхода $P(D)$ в зависимости от коэффициента корреляции ρ при $\theta = 45^\circ$

Смоделируем теперь случай изменения среднего значения одной из случайных величин, например X_1 . Для удобства будем смещать по оси абсцисс центр области D на величину Δa_1 . Результаты расчета представлены на рис. 5.

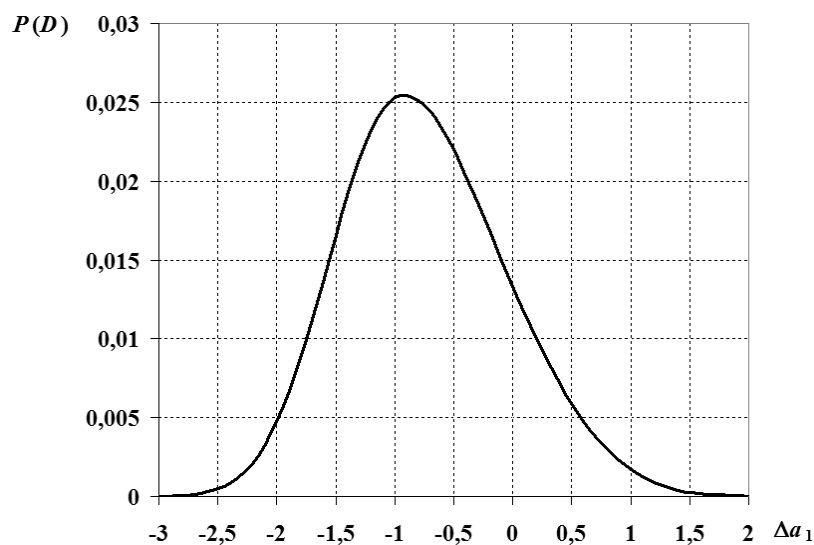


Рис. 5. Расчет вероятности неблагоприятного исхода $P(D)$ в зависимости от смещения первой координаты центра круга D при $\rho = 0,9$ и $\theta = 45^\circ$

Из графиков на рис. 3–5 видим, что управление на основе задачи (3) позволяет значительно уменьшить вероятность неблагоприятного исхода, а значит, сократить риск функционирования многомерной системы.

В общем случае произвольного распределения компонент случайного вектора $\mathbf{X}$ достаточно точно оценить совместную плотность вероятности по малой выборке данных затруднительно. Поэтому вместо задачи (3) минимизации риска здесь нужно использовать приближенные методы. Они могут быть по-

строены по следующей схеме. Во-первых, задаем область неблагоприятных исходов $D = \bigcup_{k=1}^K D_k$ и функцию последствий от опасных ситуаций $g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$. Затем вместо плотности вероятности $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ строим некоторую оценочную функцию и на ее основе минимизируем риск по аналогии с задачей (3).

Это можно сделать по-разному. Один из подходов основан на использовании кластерного анализа для выявления наиболее вероятных областей значений случайного вектора $\mathbf{X}$. Далее приближенно описывается случайный вектор $\mathbf{X}$ как дискретная случайная величина в виде набора областей G_l и соответствующих им вероятностей $P(G_l)$, $l = 1, \dots, L$. Затем оценивается риск как

$$r(D) = \sum_{i=1}^L P(G_i) \int_{G_i \cap D} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Другой приближенный метод основан на построении уравнения регрессии

$$\phi(x_1, \dots, x_{m-1}) = E[X_m / X_1 = x_1, \dots, X_{m-1} = x_{m-1}].$$

В частном линейном случае имеем: прямую $x_2 = b_0 + b_1 x_1$ (для $m = 2$); плоскость $x_3 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$ (для $m = 3$); гиперплоскость $x_m = b_0 + \sum_{i=1}^{m-1} b_i x_i$ (для $m > 3$).

Тогда задача (3) минимизации риска может быть представлена как задача построения поверхности $\phi(x_1, \dots, x_{m-1})$, наиболее удаленной от области D для допустимых значений случайного вектора $\mathbf{X}$. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 2. Пусть $m = 2$ и область $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ (рис. 6). Считаем, что линия регрессии имеет вид прямой $x_2 = b_0 + b_1 x_1$. Эта линия пересекает область D_2 . Минимизацию риска можно в данном случае осуществить по-разному: 1) изменить угол наклона (коэффициент b_1) за счет изменения отношения дисперсий σ_1^2 / σ_2^2 (прямая $x_2 = b_0 + b_1(\alpha x_1)$); 2) выполнить параллельный сдвиг линии регрессии с помощью изменения средних значений случайных величин (прямая $x_2 = b_0 + b_1(x_1 - \gamma)$); 3) уменьшить коэффициент корреляции (пересечение прямой с областью D_2 будет вне допустимых значений случайного вектора $\mathbf{X}$).

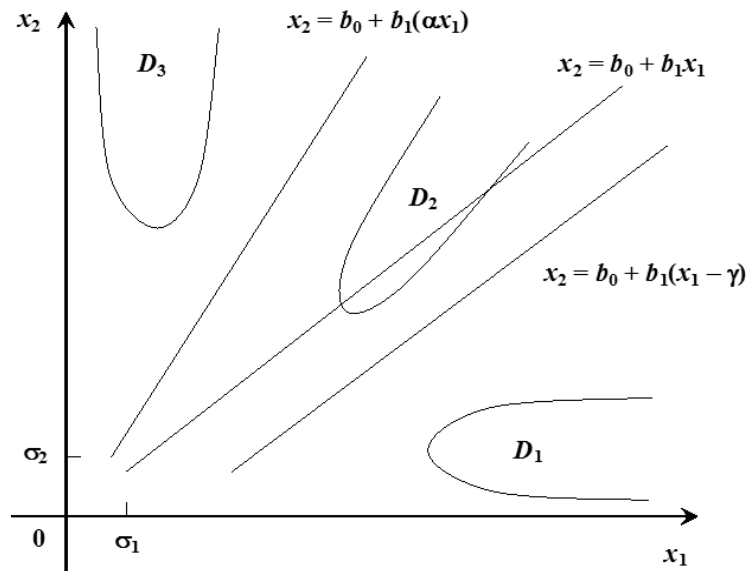


Рис. 6. Пример снижения риска для двумерной стохастической системы

Заключение

Предложен новый подход к исследованию риска многомерных стохастических систем различной природы. В его основе лежит:

– моделирование стохастической системы в виде многомерной случайной величины;
– управление риском на основе его минимизации, используя в качестве управляющих переменных числовые характеристики случайного вектора.

Для корректного применения описанной модели риска для сложных систем необходимо в качестве ее компонент использовать существенные факторы, которые объективно отражают причинно-следственные закономерности, протекающие в этих системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишняков Я.Д., Радаев Н.Н. Общая теория рисков. 2-е изд., испр. М. : Академия, 2008. 368 с.
2. Акимов В.А., Лесных В.В., Радаев Н.Н. Риски в природе, техносфере, обществе и экономике. М. : Деловой экспресс, 2004. 352 с.
3. Рябинин И.А., Черкесов Г.Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. М. : Радио и связь, 1981. 264 с.
4. Соложенцев Е.Д. Сценарное логико-вероятностное управление риском в бизнесе и технике. 2-е изд. СПб. : Бизнес-пресса, 2004. 432 с.
5. Тырсин А.Н. О моделировании риска в многомерных стохастических системах // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2015. Т. 22, вып. 1. С. 89–90.
6. Тырсин А.Н., Соколова И.С. Энтропийно-вероятностное моделирование гауссовских стохастических систем // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 1. С. 88–102.
7. Дубров А.М., Мхитарян В.С., Трошин Л.И. Многомерные статистические методы. М. : Финансы и статистика, 2003. 352 с.
8. Pena D., Rodriguez J. Descriptive Measures of Multivariate Scatter and Linear Dependence // Journal of Multivariate Analysis. 2003. V. 85. P. 361–374.

Тырсин Александр Николаевич, д-р техн. наук. E-mail: at2001@yandex.ru

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (г. Екатеринбург)

Сурина Альфия Адгамовна. E-mail: dallila87@mail.ru

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (г. Челябинск)

Поступила в редакцию 30 июня 2016 г.

Tyrsin Alexander N., Surina Alfiya A. (Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, South Ural State University (National Research University), Russian Federation).

Modeling of risk in multidimensional stochastic systems.

Keywords: risk; stochastic system; random vector; model; normal distribution.

DOI: 10.17223/19988605/39/9

In this paper a new approach to modeling and research of risk of multidimensional stochastic systems of various natures is offered. The hypothesis that the risk can be operated due to change of probabilistic properties a component of multidimensional stochastic system is the cornerstone of the offered risk model. At the same time the multidimensional stochastic system is modelled in the form of a random vector with components generally mutually correlated.

The problem of risk minimization for multidimensional stochastic system is formulated. The special case of risk minimization of Gaussian stochastic systems where the operating variables are numerical characteristics of a random vector (a covariance matrix and a vector of expectations) is considered. For arbitrary distributions of the random vector components the approximate algorithms of decrease the risk based on use of the multidimensional statistical analysis methods are proposed. The cluster analysis and the multidimensional regression analysis can be carried to these methods. For Gaussian random vectors calculations of risk for cases uncorrelated and correlated components are given.

Now at research of complex multidimensional systems risk, they do not allocate in an explicitly their components. As showed modeling, unaccounted in an explicit form multidimensionality of system and mutual correlation of its components can lead to significant underestimation of the actual risk.

The paper gives examples of calculations for multidimensional Gaussian random vectors. Dimensions were taken from 1 to 5. The results of calculation of probability of dangerous outcome depending on numerical characteristics of a multidimensional Gaussian random variable (a covariance matrix and a vector of expectations) are given. Different versions of areas of dangerous outcomes are considered.

For correct application of the described risk model for the composite stochastic systems, it is necessary to use as its components essential factors which objective reflect the cause and effect regularities proceeding in these systems.

REFERENCES

1. Vishnyakov, Ya.D. & Radaev, N.N. (2008) *Obshchaya teoriya riskov* [General theory of risks]. 2nd ed. Moscow: Akademiya.
2. Akimov, V.A., Lesnykh, V.V. & Radaev, N.N. (2004) *Riski v prirode, tekhnosfere, obshchestve i ekonomike* [Risks in the nature, technosphere, society and economics]. Moscow: Delovoy ekspres.

3. Ryabinin, I.A. & Cherkosov, G.N. (1981) *Logiko-veroyatnostnye metody issledovaniya nadezhnosti strukturno-slozhnykh sistem* [Logical-and-probabilistic methods of research of reliability of structurally complex systems]. Moscow: Radio i svyaz'.
4. Solozhentsev, E.D. (2004) *Stsenarnoe logiko-veroyatnostnoe upravlenie riskom v biznese i tekhnike* [Scenario logic and probabilistic management of risk in business and technology]. 2nd ed. St. Petersburg: Biznes-pressa.
5. Tyrsin, A.N. (2015) O modelirovanii riska v mnogomernykh stokhasticheskikh sistemakh [About the risk modeling in multidimensional stochastic systems]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*. 22(1). pp. 89–90. (In Russian).
6. Tyrsin, A.N. & Sokolova, I.S. (2012) Entropy-probabilistic modeling of Gaussian stochastic systems. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 24(1). pp. 88–102. (In Russian).
7. Dubrov, A.M., Mkhitarian, V.S. & Troshin, L.I. (2003) *Mnogomernye statisticheskie metody* [Multivariate statistical methods]. Moscow: Finansy i statistika.
8. Pena, D. & Rodriguez, J. (2003) Descriptive Measures of Multivariate Scatter and Linear Dependence. *Journal of Multivariate Analysis*. 85. pp. 361–374. DOI: 10.1016/S0047-259X(02)00061-1

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.272

DOI: 10.17223/19988605/39/10

А.Д. Аненков, А.А. Пазников

АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ МАСШТАБИРУЕМОГО ПОТОКОБЕЗОПАСНОГО ПУЛА НА ОСНОВЕ РАСПРЕДЕЛЯЮЩИХ ДЕРЕВЬЕВ ДЛЯ МНОГОЯДЕРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 15-07-02693, 15-37-20113, 15-07-00653, 16-07-00712, 15-07-00048).

Предложена реализация масштабируемого потокобезопасного пула на основе распределяющих деревьев (diffraction trees). Созданный пул обеспечивает локализацию обращений к разделяемым областям памяти с целью максимизации его пропускной способности. Выполнен анализ эффективности созданного потокобезопасного пула. Пул обеспечивает большую масштабируемость при выполнении многопоточных программ, по сравнению с аналогичными реализациями пула на основе распределяющих деревьев. В работе сформулированы рекомендации по использованию пула. Приведены результаты натурных экспериментов на многоядерной вычислительной системе.

Ключевые слова: многопоточное программирование; распределяющие деревья; неблокируемые структуры данных; масштабируемость; потокобезопасный пул.

Современные многоядерные вычислительные системы (ВС) [1] являются большемасштабными и мультиархитектурными. Эффективность использования таких систем существенно зависит от средств синхронизации потоков в параллельных программах. С увеличением количества процессорных ядер в современных ВС особенно остро ставится задача обеспечения масштабируемого доступа к разделяемым структурам данных.

Одной из наиболее используемых структур данных на сегодняшний день является потокобезопасный пул. Пул (pool) – это неупорядоченная коллекция объектов, реализующая операции добавления (push) и извлечения (pop) объектов [2]. Пулы широко применяются при реализации модели производитель – потребитель (producer – consumer) в многопоточных программах. В данной модели один или несколько потоков-производителей порождают объекты, которые используются потоками-потребителями.

Наиболее простым подходом к реализации пулов является использование потокобезопасных очередей. Существующие реализации пулов, основанные на блокируемых очередях [3, 4], обеспечивают высокую производительность при незначительной частоте выполнения операций, однако недостаточно масштабируются для большого количества потоков и высокой интенсивности обращений к пулу. Методы workpile и work-stealing [5, 6] характеризуются прогнозируемым временем выполнения операций, но неэффективны при низкой частоте обращений к пулу.

Для повышения масштабируемости широко применяются потокобезопасные пулы на основе линейных списков, свободных от блокировок (lockfree). Одним из наиболее распространенных способов снижения конкурентного доступа (access contention) параллельных потоков к разделяемым областям памяти является метод обработки комплементарных операций (elimination backoff) добавления и удаления элементов в отдельном массиве [7, 8]. В работе [9] предложена усовершенствованная версия данного метода, основанная на использовании циклического буфера. К альтернативным подходам для создания масштабируемых пулов можно отнести реализации на базе устраняющих деревья (elimination trees) [10]. Хотя использование неблокируемых потокобезопасных списков позволяет обеспечить прогнозируемое выполнение операций, однако при реализации неблокируемых пулов с помощью линей-

ных списков вершины этих списков становятся «узкими местами» (bottleneck), что приводит к увеличению конкурентности доступа и снижению эффективности использования кэш-памяти. Этим же недостатком обладает метод делегирования выполнения операций с пулом потокам-серверам, выполняющихся на выделенных процессорных ядрах [11, 12].

Одним из перспективных подходов для сокращения конкурентного доступа параллельных потоков является применение распределяющих деревьев (diffraction tree) [13]. В статье [14] предложена возможная реализация потокобезопасных пулов на основе распределяющих деревьев с использованием метода устранения комплементарных операций. К недостаткам реализации можно отнести дополнительные накладные расходы, связанные с активным ожиданием в массиве устранения комплементарных операций, а также синхронизацией атомарных переменных на каждом уровне распределяющего дерева в худшем случае, что существенно увеличивает трудоёмкость обхода дерева от корня к листьям. Эффективность распределяющего дерева значительно снижается с увеличением его размера. Кроме того, в работе [13] существенно нарушается FIFO/LIFO порядок выполнения операций, а также не учитывается возможность использования пула для добавления и удаления элементов одним потоком. Также к недостаткам относится необходимость подбора таких параметров, как время ожидания поступления комплементарных операций, допустимое количество коллизий и т.д.

В работах [15, 16] с целью снижения вышеописанных накладных расходов предлагается оптимизация в виде адаптивного распределяющего дерева (self-tuning reactive diffraction tree), размер которого определяется текущим уровнем конкурентного доступа потоков к его листьям. Тем не менее такие пулы характеризуются существенными накладными расходами вследствие синхронизации во вспомогательных массивах и в узлах дерева.

В данной статье предложен оригинальный подход к реализации потокобезопасного пула без использования блокировок на основе распределяющих деревьев и методы его оптимизации для постоянного числа активных потоков. Подход основан на локализации обращений к узлам дерева и использовании локальной памяти потоков. Предлагаемый подход позволяет повысить пропускную способность при высоких и низких нагрузках пула, обеспечивает приемлемый уровень FIFO/LIFO-порядка выполнения операций и характеризуется незначительной временной задержкой прохода от корня распределяющего дерева к его листьям.

1. Потокобезопасный пул на основе распределяющего дерева

Пусть имеется многоядерная ВС, состоящая из n процессорных ядер. Считаем, что система функционирует в монопрограммном режиме решения одной параллельной задачи [1], которая включает в себя p параллельных потоков. Привязка потоков к процессорным ядрам определяется функцией $a(i)$, ставящей в соответствие потоку i процессорное ядро $w \in \{1, 2, \dots, n\}$, к которому привязан поток.

Будем называть производителем (producer) поток, выполняющий операцию добавления (push) элементов в пул, и потребителем (consumer) – поток, выполняющий операцию удаления (pop) элементов из пула.

Распределяющее дерево (diffraction tree) [13–16] представляет собой бинарное дерево высотой h , в каждом узле которого находятся биты, определяющие направления обращений потоков (рис. 1). Узлы дерева (balancers) перенаправляют поступающие от потоков запросы на добавление (push) или удаление (pop) элементов поочередно на один из узлов-потомков: если значение бита равно 0, то поток обращается к узлу правого поддерева, если 1 – левого поддерева, и так далее до тех пор, пока потоки не дойдут до листьев дерева. После прохождения каждого узла потоки инвертируют в нём соответствующий бит.

Листьям распределяющего дерева соответствуют потокобезопасные очереди $q = \{1, 2, \dots, 2^h\}$ (рис. 2). При выполнении операций потоки проходят дерево от корня к листьям и помещают (извлекают) элемент в соответствующую очередь. В состоянии покоя (quiescent state), при котором дерево сбалансировано и не содержит поступающих от потоков запросов, выходящие из дерева элементы распределяются между очередями таким образом, что количество элементов в верхней очереди превышает количество элементов в нижних очередях не более, чем на один. Таким образом, распределяющее дерево позволяет сократить конкурентность доступа к структуре данных.

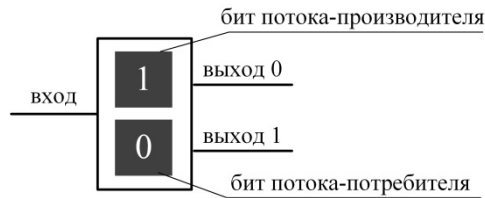


Рис. 1. Узел распределяющего дерева

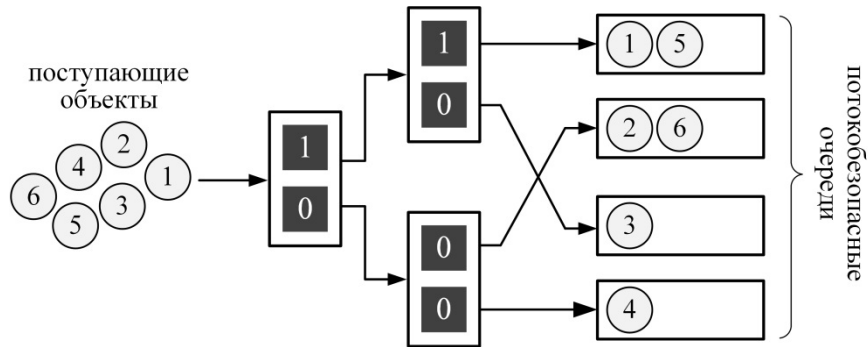


Рис. 2. Потокобезопасный пул на основе распределяющего дерева ($h = 2$)

Для практических целей последовательный порядок распределения потоков по листьям, как правило, не требуется [17, 18], и им можно пренебречь с целью повышения пропускной способности пула. На основе данного допущения авторами предложены алгоритмы реализации потокобезопасного пула на базе распределяющего дерева. В основе алгоритмов лежат идея локализации обращений к узлам дерева и использование локальной памяти потока (thread-local storage, TLS). TLS применяется с целью сокращения накладных расходов, связанных с доступом из разных потоков к разделяемым атомарным переменным и использованием массива устранения комплементарных операций в каждом узле дерева.

2. Оптимизированный пул на основе распределяющего дерева

Авторами был разработан пул LocOptDTPool, в котором каждый узел распределяющего дерева содержит два массива атомарных битов (для потоков-производителей и потоков-потребителей) размера $m \leq p$ вместо двух отдельных атомарных битов (рис. 3). Узлы каждого следующего уровня дерева содержат в два раза меньшие по размеру массивы по сравнению с предыдущим уровнем.

Каждый поток обращается к соответствующему ему биту в массиве, что обеспечивает локализацию обращений к атомарным битам в узлах дерева. Кроме того, по сравнению с использованием массива устранения комплементарных операций, данный подход позволяет сократить накладные расходы, связанные с обращением к ячейкам вспомогательного массива и активным ожиданием парного потока.

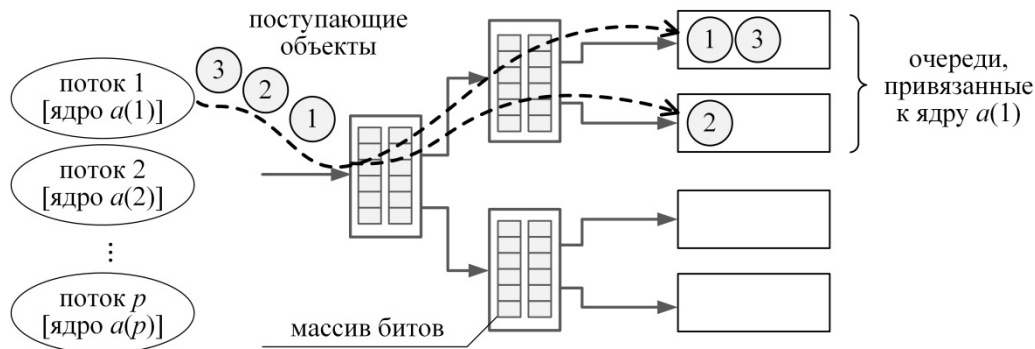


Рис. 3. Оптимизированный пул LocOptDTPool на основе распределяющего дерева

При каждом посещении потоком узла дерева в массиве атомарных битов выбирается ячейка по значению хеш-функции:

$$h(i) = i \bmod m, \quad (1)$$

где $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ – это порядковый номер текущего потока, выданный ему при первом посещении пула, m – размер массива атомарных битов.

Рассмотрим схему распределения потокобезопасных очередей в листьях дерева между процессорными ядрами. Каждому процессорному ядру $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ ставятся в соответствие очереди $q_j = \{j2^h / n, j2^h / n + 1, \dots, (j+1)2^h / n - 1\}$. Пусть имеется поток i , привязанный к ядру j ($a(i) = \{j\}$). Тогда все объекты, помещаемые (извлекаемые) в пул этим потоком, распределяются между очередями q_j , предназначенными для хранения объектов, поступающих от потоков, привязанных к ядру j . Данный подход позволяет сократить количество промахов по кэшу благодаря локализации обращений к разделяемым переменным.

При обращении к полям структур (см. раздел 3), которые включает в себя пул, необходимо учитывать проблему ложного разделения данных (false sharing), возникающую вследствие расположения переменных структур, к которым обращаются несколько потоков, в одной кэш-линии. Для решения проблемы ложного разделения данных выполняется выравнивание размера структур пула на величину кэш-линии.

Одним из основных недостатков существующей реализации пула на основе распределяющего дерева [14] является увеличение времени выполнения операций при незначительном количестве активных потоков (1–2 потока). Для решения данной проблемы в созданном пуле LocOptDTPool учитывается текущее количество активных потоков в пуле. Если текущая загрузка пула мала, то распределение объектов между очередями не приводит к существенному повышению пропускной способности пула. В этом случае для хранения объектов используется одна очередь. Подсчет количества активных потоков в пуле реализован в виде двух атомарных счетчиков для потоков-производителей и потоков-потребителей соответственно. Данная возможность позволяет повысить пропускную способность пула при низкой нагрузке.

Таким образом, описанный потокобезопасный пул LocOptDTPool (листинг 1) включает в себя распределяющее дерево *tree*, массивы атомарных битов *prod_bits* и *cons_bits*, массивы очередей *queues*, менеджер *af_mgr* управления привязкой потоков к процессорным ядрам, счетчики *prod_num* и *cons_num* числа потоков в пуле, а также методы *push* и *pop* для помещения и извлечения объектов из пула соответственно.

Л и с т и н г 1

Структура потокобезопасного пула LocOptDTPool

```

1  class LocOptDTPool {
2      Node tree
3      BitArray prod_bits[m], cons_bits[m]
4      ThreadSafeQueue queues[n]
5      AffinityManager af_mgr
6      AtomicInt prod_num, cons_num
7      push(data)
8      pop()
9  }
```

Потокобезопасные очереди *queues* могут быть реализованы различным образом; в данной работе применяется реализация очередей без использования блокировок из библиотеки boost [19]. Данный выбор объясняется приемлемой для практики пропускной способностью очереди. Атомарные переменные *prod_num* и *cons_num* используются для подсчета максимального количества уникальных потоков, обратившихся к пулу за время его использования. Каждый раз, когда потоки впервые обращаются к пулу для выполнения операций добавления или извлечения, соответствующий счетчик увеличивается на единицу. Счетчик *prod_num* отражает количество потоков-производителей, а *cons_num* – количество потоков-потребителей. Учет количества потоков в пуле необходим для присвоения потокам уникаль-

ных идентификаторов, которые в дальнейшем используются для расчета хеш-функции (1) при доступе к массивам битов в узлах распределяющего дерева.

При вызове метода `push` потоком j выполняются следующие шаги:

1. Увеличение счетчика `prod_num` на единицу.
2. Привязка текущего потока к процессорному ядру с помощью менеджера привязки `af_mgr`, если это не было сделано ранее.

3. Выбор очереди, в которую будет помещен объект `data` в соответствии с формулой

$$q_j = (p \times l \bmod (2^h / p) + a(j)), \quad (2)$$

где p – общее количество процессорных ядер; l – лист дерева, посещенный потоком; $a(j)$ – номер ядра, к которому привязан поток j ; 2^h – общее число очередей в пуле.

Метод `pop`, выполняемый потоком j , включает в себя следующие шаги:

1. Привязка потока с помощью менеджера привязки `af_mgr` и увеличение счетчика `cons_num`, если этого не было сделано ранее.

2. Выбор очереди для извлечения по формуле

$$q_j = (p\alpha + a(j)), \quad (3)$$

где α – коэффициент сдвига, возвращаемый методом `get_queue_offset` (листинг 2).

3. Если очередь, выбранная по формуле (3), пуста, то элемент извлекается из первой следующей за ней непустой очереди. Такой метод используется в других реализациях пулов [17, 20]. В случае успешного выполнения операции метод `pop` возвращает извлеченный объект, а в случае неудачи выполняется повторный вызов метода.

Менеджер `af_mgr` реализует последовательную привязку потоков к ядрам (листинг 2).

Л и с т и н г 2

Класс, реализующий привязку потоков к процессорным ядрам

```

1  class AffinityManager {
2      thread_local int core
3      thread_local int queue_offset
4      AtomicInt next_core
5      AtomicInt next_offset
6      set_core()
7      get_core()
8      get_queue_offset()
9  }
```

При вызове метода `set_core` выполняется привязка потока, вызвавшего данный метод, к процессорному ядру. Выбор номера ядра происходит при помощи счетчика `next_core`, который инкрементируется при каждом успешном вызове метода `set_core`. При достижении данным счетчиком значения, равного максимально возможному числу ядер в системе, он сбрасывается в 0, обеспечивая тем самым последовательную привязку потоков для равномерной загрузки процессорных ядер. Кроме того, при вызове метода `set_core` происходит определение коэффициента α для текущего потока. Его значение сохраняется в переменной `queue_offset` и затем используется в методе `push` пула (см. листинг 1) при выборе очереди, в которую помещается объект. Выбор сдвига основывается на значении переменной `next_offset`, которая инкрементируется на единицу каждый раз при достижении переменной `next_core` значения, равного максимально возможному числу ядер в системе. Таким образом, метод `get_core` возвращает номер процессорного ядра, к которому привязан текущий поток, а метод `get_queue_offset` – сдвиг при выборе очереди.

Каждый узел распределяющего дерева `tree` (листинг 3) состоит из константных переменных `index` и `level`, которые хранят, соответственно, порядковый номер текущего узла и номер уровня дерева, на котором данный узел находится. Метод `traverse` вызывается текущим потоком в каждом посещенном узле и используется для того, чтобы посетить следующий узел-потомок. При вызове данного метода происходит переключение бита `bits[level][index]` в массиве `bits`, который передается в эту функцию в качестве аргумента. При этом первоначальное значение бита указывает на выход узла, через который

впоследствии обращается текущий поток, для того чтобы попасть в следующий дочерний узел. Метод `traverse`, вызванный из корневого узла, таким образом, возвращает в качестве результата индекс того листа дерева (очереди), который был посещен текущим потоком.

Л и с т и н г 3

Узел распределяющего дерева

```
1 class Node {
2     int index, level
3     Node children[2]
4     int traverse(BitArray bits)
9 }
```

Структура `BitArray` (см. листинг 4) описывает массив атомарных битов `bits_array`, биты в котором переключаются (`flip`) потоками при посещении узлов распределяющего дерева.

Л и с т и н г 4

Массив атомарных битов

```
1 class BitArray {
2     Bit bits_array[n][m]
3     int flip(tree_level, node_index) {
4         return bits_array[tree_level][node_index].flip()
5     }
6 }
```

Реализация переключаемого атомарного бита представлена в листинге 5. Переключение бита (функция `flip`) основано на атомарной операции `atomic_xor`, которая заменяет текущее значение бита результатом логической операции XOR между значением этого бита и единицей.

Л и с т и н г 5

Переключаемый атомарный бит

```
1 class Bit {
2     AtomicInt bit
3     int flip() {
4         return bit.atomic_xor(1)
5     }
6 }
```

3. Оптимизированный пул с использованием локальных данных потока

Разработан масштабируемый пул `TLSDTPool`, в основе которого лежит идея размещения битов в узлах дерева в области локальной памяти потока (Thread-local storage, TLS). Данный подход позволяет сократить конкурентность доступа к разделяемым битам в узлах дерева [13–16].

Суть предлагаемого подхода заключается в том, что структура `BitArray` размещается в TLS потока. Это позволяет отказаться от использования дорогостоящих атомарных операций при выполнении обращений к массиву `bits` в структуре `BitArray`; в качестве `bits` используется обычный массив булевых переменных (листинг 6).

Л и с т и н г 6

Массив битов

```
1 class BitArray {
2     bool bits[n][m]
3     int flip(tree_level, node_index) {
4         bits[tree_level][node_index] = bits[tree_level][node_index] XOR 1
5         return bits[tree_level][node_index]
6     }
7 }
```

Поскольку потоки не имеют доступа к состояниям битов других потоков в узлах деревьев, распределяющее дерево может не обеспечивать равномерное распределение загрузки между очередями. В этом случае возможна ситуация, при которой в определённый момент времени большинство потоков в пуле одновременно обращаются к одной очереди. Таким образом, количество потоков, обращающихся к одному листу дерева, может превысить число потоков, добавляющих (удаляющих) элементы из очередей других узлов. Для решения данной проблемы предлагается следующий эвристический алгоритм инициализации элементов бинарных массивов в узлах дерева (см. листинг 7).

При первом посещении корневого узла потокам выдается целочисленный идентификатор (*id*). В соответствии с идентификатором потоки равномерно распределяются по узлам дерева. Принцип начального распределения основан на представлении идентификатора потока в двоичном виде (рис. 4). Каждый разряд в двоичном представлении идентификатора является соответствующим уровнем дерева, а значение данного разряда указывает на начальное состояние всех битов в узлах дерева на данном уровне.

Листинг 7

Алгоритм инициализации битов распределяющего дерева

```

1  for (level = 0; level < max_levels; ++level) {
2  int max_range = pow(2, level)
3  for (node = 0; node < max_range; ++node) {
4  if (level > 0) {
5  array[level][node] = (id >> (level - 1)) & 1
6  } else {
7  array[level][node] = id % 2
8  }
9  }
10 }
```

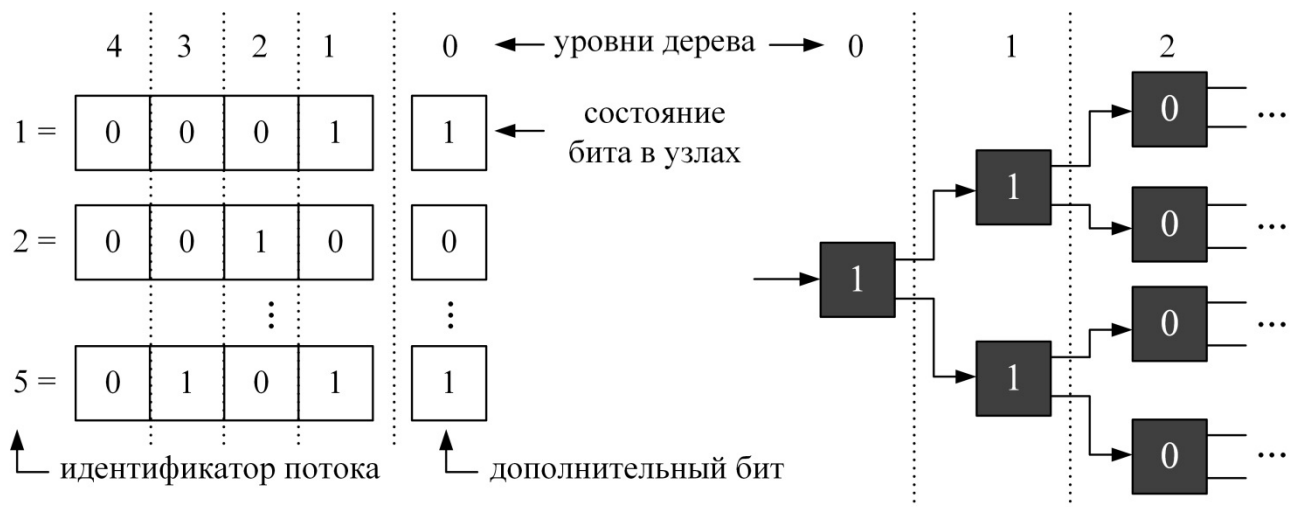


Рис. 4. Распределение потоков по узлам дерева в пуле TLSDTPool

Бит 0 или 1 в узлах дерева означает соответственно правый или левый узел-потомок, к которому обращается поток после прохождения данного узла. Проходя через каждый узел дерева, поток инвертирует соответствующий локальный бит в этом узле.

Для более равномерного распределения потоков по дереву вводится также дополнительный бит, (листинг 7, строка 7), который размещается в корне дерева. Аналогично другим битам с каждым увеличением идентификатора он переключается на противоположный (0, 1, 0, 1 и т.д.).

Описанный алгоритм в случае постоянно активных потоков позволяет равномерно распределить обращения потоков к узлам дерева для предотвращения дисбаланса загрузки очередей в листьях дерева.

4. Результаты экспериментов

Организация экспериментов

Моделирование пулов LocOptDTPool и TLSDTPool проводилось на узле вычислительного кластера Jet Центра параллельных вычислительных технологий Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики». Узел кластера укомплектован двумя 4-ядерными процессорами Intel Xeon E5420 (2,5 GHz; Intel-64). Тестовая программа была разработана на языке программирования C++ и скомпилирована с использованием компилятора GCC 4.8.2. В качестве элементов, помещаемых (извлекаемых) в пул, использовались переменные целочисленного типа.

Под количеством p потоков подразумевается число потоков, помещающих элементы и извлекающих объекты из пула. В качестве показателя эффективности пула использовалась пропускная способность $b = N / t$ пула, где N – суммарное число выполненных операций добавления (извлечения), а t – время моделирования. Пропускная способность показывает, сколько операций было выполнено за 1 с. Реализовано сравнение эффективности пула при использовании различных типов очередей (с блокировками и без блокировок) в листьях дерева. Сравнение используемых в пуле очередей объясняется тем, что от выбора очередей во многом зависит пропускная способность пула; такой подход к моделированию применялся в других работах [16]. Также для сравнения представлены результаты моделирования пула на основе одной неблокируемой очереди *Lockfree queue* из библиотеки boost [19]. Для каждого пула проводились две серии экспериментов: для числа потоков $p = 1, 2, \dots, 8$, не превышающего число процессорных ядер вычислительного узла, и для большого количества потоков $p = 10, 20, \dots, 200$.

Пул LocOptDTPool на основе массивов атомарных битов

Результаты тестирования пропускной способности реализованного пула с использованием массивов атомарных битов в узлах дерева показаны на рис. 5.

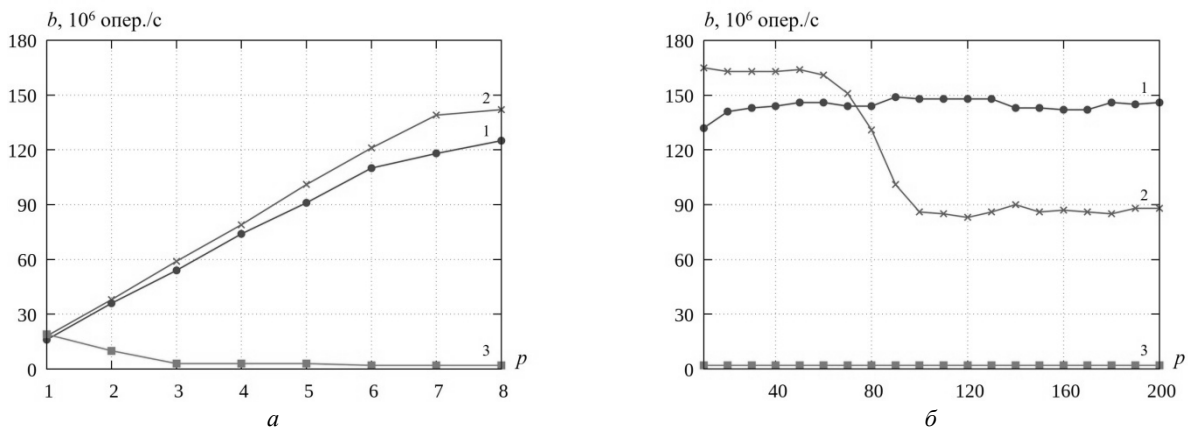


Рис. 5. Пропускная способность пула LocOptDTPool: a – число потоков не превышает количество процессорных ядер; b – число потоков превышает количество процессорных ядер.

1 – LocOptDTPool, неблокируемые очереди Lockfree queue из библиотеки boost; 2 – LocOptDTPool, блокируемые очереди на основе PThreads mutex; 3 – очередь Lockfree queue без использования блокировок из библиотеки boost

Реализованная структура данных хорошо масштабируется для большого количества потоков и демонстрирует рост пропускной способности по мере достижения числа потоков, равного количеству процессорных ядер. Максимальная пропускная способность, равная 170 млн опер./с, была получена при количестве потоков, равном количеству ядер процессора или незначительно его превышающем.

Пул TLSDTPool на основе Thread-local storage

На рис. 6 представлены результаты моделирования пропускной способности пула TLSDTPool с использованием локально-поточных битов.

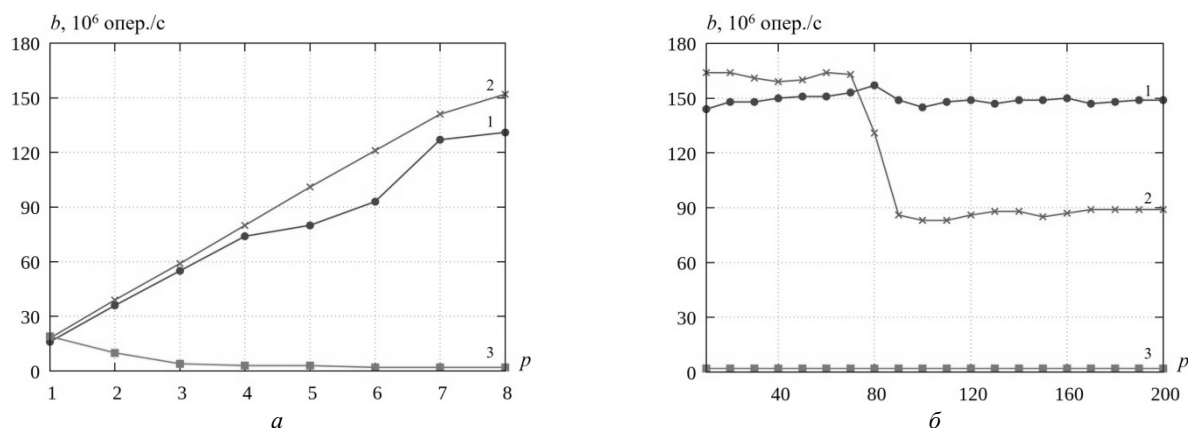


Рис. 6. Пропускная способность пула TLSDTPool: a – число потоков не превышает количество процессорных ядер; b – число потоков превышает количество процессорных ядер. 1 – TLSDTPool, неблокируемые очереди *Lockfree queue* из библиотеки boost; 2 – TLSDTPool, блокируемые очереди на основе PThreads mutex; 3 – очередь Lockfree queue без использования блокировок из библиотеки boost

Пропускная способность пула LocOptDTPool на всем диапазоне числа потоков соответствует пропускной способности пула TLSDTPool с применением локально-поточных битов. При этом также была достигнута максимальная пропускная способность, равная 170 млн опер./с, при количестве потоков, равном числу процессорных ядер или незначительно его превосходящем.

В разделе 3 была рассмотрена ситуация, когда при использовании поточно-локальных переменных число потоков, одновременно обращающихся к одному листу дерева, может значительно превосходить число потоков, выполняющих операции с другими листьями дерева. Однако в ходе выполнения экспериментов такой случай не был зафиксирован и снижения пропускной способности пула не наблюдалось. Тем не менее при построении пулов необходимо учитывать, что с увеличением количества уровней распределяющего дерева вероятность появления «худшего случая» уменьшается (при этом возрастают затраты по памяти).

При большом количестве потоков применение неблокируемых очередей Lockfree queue в пулах LocOptDTPool и TLSDTPool обеспечивает большую пропускную способность, по сравнению с блокируемыми потокобезопасными очередями (см. рис. 5, a ; 6, a). Во всех случаях эффективность отдельной потокобезопасной очереди Lockfree queue значительно уступает эффективности разработанных пулов (рис. 5, a).

Заключение

Разработаны алгоритмы реализации масштабируемых потокобезопасных пулов на основе распределяющих деревьев без использования блокировок. Суть оптимизаций заключается в локализации обращений потоков к разделяемым областям памяти с целью максимизации пропускной способности пула.

Разработанные пулы могут применяться при реализации модели производитель – потребитель в многопоточных программах с постоянным числом активных потоков, где требуются высокая пропускная способность и быстрый возврат потоков из структуры с целью минимизации времени выполнения операций. Пул обеспечивает большую масштабируемость при выполнении многопоточных программ по сравнению с аналогичными реализациями пула на основе распределяющих деревьев.

Наибольшая эффективность алгоритмов достигнута при числе активных потоков, равном количеству процессорных ядер в системе. Увеличение размеров дерева в пуле не снижает пропускную способ-

ность пула. В качестве структур данных в листьях дерева для хранения объектов пула рекомендуется использовать потокобезопасные очереди без использования блокировок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорошевский В.Г. Распределённые вычислительные системы с программируемой структурой // Вестник СибГУТИ. 2010. № 2 (10). С. 3–41.
2. Herlihy M., Shavit N. The Art of Multiprocessor Programming. Morgan Kaufmann, NY, USA, 2008. P. 529.
3. Anderson T.E. The performance of Spin Lock Alternatives of Shared-Memory Multiprocessors // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. 1990. P. 6–16.
4. Mellor-Crummey J.M., Scott M.L. Synchronization without Contention // Proceedings of the 4th International Conference on Architecture Support for Programming Languages and Operating Systems. 1991.
5. Rudolph L., Slivkin M., Upfal E. A Simple Load Balancing Scheme for Task Allocation in Parallel Machines // Proceeding of the 3rd ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures. 1991. P. 237–245.
6. Blumofe R.D., Leiserson C.E. Scheduling Multithreaded Computations by Work Stealing // Proceeding of the 35th Symposium on Foundations of Computer Science. 1994. P. 365–368.
7. Hendler D., Shavit N., Yerushalmi L. A scalable lock-free stack algorithm // Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Parallelism in algorithms and architectures. ACM, 2004. P. 206–215.
8. Moir M. et al. Using elimination to implement scalable and lock-free FIFO queues // Proceedings of the seventeenth annual ACM symposium on Parallelism in algorithms and architectures. ACM, 2005. P. 253–262.
9. Afek Y., Hakimi M., Morrison A. Fast and scalable rendezvousing // Distributed computing. 2013. V. 26, No. 4. P. 243–269.
10. Shavit N., Touitou D. Elimination trees and the construction of pools and stacks: preliminary version // Proceedings of the seventh annual ACM symposium on Parallel algorithms and architectures. ACM, 1995. P. 54–63.
11. Calciu I., Gottschlich J.E., Herlihy M. Using elimination and delegation to implement a scalable NUMA-friendly stack // Proc. Unix Workshop on Hot Topics in Parallelism (HotPar). 2013.
12. Lozi J.P. et al. Remote Core Locking: Migrating Critical-Section Execution to Improve the Performance of Multithreaded Applications // USENIX Annual Technical Conference. 2012. P. 65–76.
13. Shavit N., Zemach A. Diffracting trees // ACM Transactions on Computer Systems (TOCS). 1996. V. 14, No. 4. P. 385–428.
14. Afek Y., Korland G., Natanzon M., Shavit N. Scalable Producer-Consumer Pools based on Elimination-Diffraction Trees // European Conference on Parallel Processing. 2010. P. 151–162.
15. Della-Libera G., Shavit N. Reactive diffracting trees // Journal of Parallel and Distributed Computing. 2000. V. 60. P. 853–890.
16. Ha P.H., Papatriantafyllou M., Tsigas P. Self-tuning reactive distributed trees for counting and balancing // Principles of Distributed Systems: 8th International Conference, OPODIS. 2004. P. 213–228.
17. Shavit N. Data Structures in the Multicore Age // Communications of the ACM. 2011. V. 54, No. 3. P. 76–84.
18. Shavit N., Moir M. Concurrent Data Structures // Handbook of Data Structures and Applications. 2007. P. 47–14.
19. Blechmann T. Chapter 19. Boost.Lockfree. URL: http://www.boost.org/doc/libs/1_61_0/doc/html/lockfree.html (дата обращения: 14.09.2016).
20. Chase D., Lev Y. Dynamic circular work-stealing deque // Proceedings of the seventeenth annual ACM symposium on Parallelism in algorithms and architectures. 2005. P. 21–28.

Аненков Александр Дмитриевич. E-mail: alex.anenkov@outlook.com

Пазников Алексей Александрович, канд. техн. наук. E-mail: apaznikov@gmail.com

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики (г. Новосибирск)

Поступила в редакцию 31 октября 2016 г.

Anenkov Alexandr D., Paznikov Alexey A. (Siberian State University of Telecommunications and Information Sciences, Russian Federation).

Algorithms of optimization of scalable thread-safe pool based on diffracting trees for multicore computing systems.

Key words: multithreaded programming; diffracting trees; lock-free data structures; scalability; thread-safe pool.

DOI: 10.17223/19988605/39/10

Most of all modern multicore computer systems (CS) are large-scale, hierarchically organized and include multiple architectures. Program execution time on these systems strongly depends on the efficiency of parallel thread synchronization methods. With increasing number of CPU cores in computer systems the problem of scalable concurrent data structures development dramatically arises. Such data structures must ensure scalable access with increasing number of parallel threads and workload.

Thread-safe pool is one of the most widely used concurrent data structures. Pool is an unordered set of objects, which supports operations for insertion (push) and removal (pop) of the objects. Pools are widely used while producer-consumer model implementation in multithreaded programs. In this model some producer threads generate the objects followed by their utilization by consumer threads.

Simple concurrent pools implementations based on concurrent queues (both lockable and lock-free) poorly scale for large number of threads and high pool access rate. There are some methods of access contention reduction like elimination arrays or delegation of pool operation to the remote CPU cores. Nonetheless these methods lead to the bottlenecks on certain elements and severe throughput reduc-

tion in the case of large number of threads and high intensity of pool operations. Workpile and work-stealing methods ensure predictable operations time performance but they are not effective on low frequency of pool treatment.

Diffraction trees is one of the perspective approaches for access contention reduction in thread-safe data structures. There are some works which propose pool implementations based on diffraction trees with using of elimination arrays. The main drawback of these implementations are high overheads on active waiting and atomic variable states synchronization on each of the tree node. This fact severely increases the complexity of tree traversal from the root to the leaves. Thus the tree efficiency decreases with increasing of its size. Some pool implementations severely violate FIFO/LIFO order while operations performance. The other drawback is the optimization of variable parameters of these structures.

In this paper we propose the novel approach for scalable concurrent lock-free pool implementation on the basis of diffraction trees. The approach is based on localization of tree nodes access and Thread-local storage (TLS) utilization. This approach increases throughput at high and low pool load and minimizes the operation latency. The concurrent pools LocOptDTPool and TLSDTPool were developed by the authors on the basis of proposed approach. The pools contain the diffraction tree, atomic bool arrays, corresponding to the tree nodes, array of concurrent queues, corresponding to the tree leaves, the CPU core affinity manager, thread number counters and push (insert) and pop (remove) methods. The concurrent queues in the tree leaves may be implemented in different ways. In the current implementation of the pools we used lock-free concurrent queues from boost library.

In the LocOptDTPool each node of diffraction tree contains two bool atomic arrays which size is no more than thread number. Each thread accesses to the corresponding array's element in order to localize tree nodes' atomic bit access. Moreover, compared with the elimination array methods, new approach allows to reduce the overheads, arising from additional (elimination) array's elements and active waiting for the pair thread. For the minimization of operation latency in case of low workload LocOptDTPool implements the counting of the current number of active threads in the pool. If the current workload (thread number) is low, then objects distribution among the queues doesn't lead to the significant increase of pool throughput. In this case the only queue is used for element storage in the pool. This algorithm increases the pool throughput in case of low workload.

The main idea of TLSDTPool is the allocation of the arrays bits in the tree nodes in the Thread-local storage (TLS). The tree nodes contain ordinary bool arrays. This approach allows to avoid the expensive atomic operations and reduces access contention for the shared bits in the tree nodes. For the queues load uniformity in the TLSDTPool we proposed the algorithm of tree nodes initialization based on the binary representation of thread identifiers. This algorithm submits the initial state of the array's bits according to the thread identifier. That scheme minimizes the impact of the "worst case", rising from the imbalance of the queues workload.

The experiments for the developed pools on cluster computer systems has shown, that LocOptDTPool scales well for high number of threads and shows an increase of throughput until the number of threads is equal to the number of CPU cores. Throughput of LocOptDTPool for the entire range of thread number corresponds the results of TLSDTPool based on Thread-local storage. At the same time the maximum throughput was achieved for thread number equals to processors core number or slightly more. Thread-safe lock-free queues are recommended as the objects storage in tree leaves. Thanks to tree initialization algorithm the concurrent queues were balanced well and possible "worst case" didn't significantly effect on pool efficiency.

Designed pools can be used in the producer-consumer model in multithreading programs with constant number of active threads, where high throughput and low latency is highly desirable. The pools provides high scalability at multithreading programs execution, in compared with the similar pool implementations on the basis of diffraction trees. The maximum algorithm efficiency is achieved at the thread number, equals to total processor cores number. Tree size increasing doesn't lead to throughput reduction.

REFERENCES

1. Khoroshevsky, V.G. (2010) Raspredelemnnye vychislitel'nye sistemy s programmiruemyoy strukturoy [Distributed programmable structure computer systems]. *Vestnik SibGUTI*. 2(10). pp. 3–41. (In Russian).
2. Herlihy, M. & Shavit, N. (2008) *The Art of Multiprocessor Programming*. New York: Morgan Kaufmann.
3. Anderson, T.E. (1990) The performance of Spin Lock Alternatives of Shared-Memory Multiprocessors. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*. pp. 6–16. DOI: 10.1109/71.80120
4. Mellor-Crummey, J.M. & Scott, M.L. (1991) Synchronization without Contention. *Proc. of the 4th International Conference on Architecture Support for Programming Languages and Operating Systems*. DOI: 10.1145/106975.106999
5. Rudolph, L., Slivkin, M. & Upfal, E. (1991) A Simple Load Balancing Scheme for Task Allocation in Parallel Machines. *Proc. of the 3rd ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures*. pp. 237–245. DOI: 10.1145/113379.113401
6. Blumofe, R.D. & Leiserson, C.E. (1994) Scheduling Multithreaded Computations by Work Stealing. *Proc. of the 35th Symposium on Foundations of Computer Science*. pp. 365–368. DOI: 10.1145/324133.324234
7. Hendler, D., Shavit, N. & Yerushalmi, L. (2004) A scalable lock-free stack algorithm. *Proc. of the sixteenth annual ACM symposium on Parallelism in algorithms and architectures*. ACM. pp. 206–215. DOI: 10.1145/1007912.1007944
8. Moir, M. et al. (2005) Using elimination to implement scalable and lock-free FIFO queues. *Proc. of the seventeenth annual ACM symposium on Parallelism in algorithms and architectures*. ACM. pp. 253–262. DOI: 10.1145/1073970.1074013
9. Afek, Y., Hakimi, M. & Morrison, A. (2013) Fast and scalable rendezvousing. *Distributed computing*. 26(4). pp. 243–269. DOI: 10.1007/978-3-642-24100-0_2
10. Shavit, N. & Touitou, D. (1995) Elimination trees and the construction of pools and stacks: preliminary version. *Proc. of the seventh annual ACM symposium on Parallel algorithms and architectures*. ACM. pp. 54–63. DOI: 10.1145/215399.215419
11. Calciu, I., Gottschlich, J.E. & Herlihy, M. (2013) Using elimination and delegation to implement a scalable NUMA-friendly stack. *Proc. Usenix Workshop on Hot Topics in Parallelism (HotPar)*.
12. Lozi, J.P. et al. (2012) Remote Core Locking: Migrating Critical-Section Execution to Improve the Performance of Multithreaded Applications. *USENIX Annual Technical Conference*. pp. 65–76. DOI: 10.1006/jpdc.1994.1056
13. Shavit, N. & Zemach, A. (1996) Diffracting trees. *ACM Transactions on Computer Systems (TOCS)*. 14(4). pp. 385–428. DOI: 10.1145/181014.181326

14. Afek, Y., Korland, G., Natanzon, M. & Shavit, N. (2010) Scalable Producer-Consumer Pools based on Elimination-Diffraction Trees. *European Conference on Parallel Processing*, pp. 151-162. DOI: 10.1007/978-3-642-15291-7_16
15. Della-Libera, G. & Shavit, N. (2000) Reactive diffracting trees. *Journal of Parallel and Distributed Computing*. 60. pp. 853–890. DOI: 10.1145/258492.258495
16. Ha, P.H., Papatriantafilou, M. & Tsigas, P. (2004) Self-tuning reactive distributed trees for counting and balancing. *Principles of Distributed Systems*. 8th International Conference, OPODIS. pp. 213–228.
17. Shavit, N. (2011) Data Structures in the Multicore Age. *Communications of the ACM*. 54(3). pp. 76–84. DOI: 10.1145/1897852.1897873
18. Shavit, N. & Moir, M. (2007) Concurrent Data Structures. In: Mehta, D.P. & Sahni, S. (eds) *Handbook of Data Structures and Applications*. Boca Raton London New York Washington, D.C.: Chapman & Hall/CRC. pp. 47–14.
19. Blechmann, T. (2016) *Chapter 19. Boost.Lockfree*. [Online] Available from: http://www.boost.org/doc/libs/1_61_0/doc/html/lockfree.html. (Accessed: 14th September 2016).
20. Chase, D. & Lev, Y. (2005) Dynamic circular work-stealing deque. *Proceedings of the seventeenth annual ACM symposium on Parallelism in algorithms and architectures*. pp. 21–28. DOI: 10.1145/1073970.1073974

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 681.5.09

DOI: 10.17223/19988605/39/11

A. Matrosova, E. Mitrofanov, T. Shah

SIMPLIFICATION OF FULLY DELAY TESTABLE COMBINATIONAL CIRCUITS AND FINDING OF PDF TEST PAIRS

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-00218).

Fully delay testable circuits obtained by covering ROBDD nodes with Invert-AND-OR sub-circuits and Invert-AND-XOR sub-circuits implementing Shannon decomposition formula are considered. Algorithms of finding test pairs for robust testable PDFs and validatable non robust testable PDFs of resulted circuits have been developed. Experimental results demonstrate essential simplification of suggested circuits in contrast to fully delay testable circuits obtained by covering each ROBDD node with only Invert-AND-XOR sub-circuit.

Keywords: path delay fault (PDF); robust testable PDF; validatable non robust testable PDF; Binary Decision Diagram (BDD); design for testability.

Path delay fault (PDF) model is considered as more preferable at delay testing. In accordance with the conditions of fault manifestation, single PDFs are divided into robust testable faults and non robust testable faults. PDF is robust testable if there is a test pair fault manifestation of which does not depend on delays of other circuit paths. PDF is non robust testable if fault manifestation is possible only when all other paths of a circuit are fault-free.

PDF testing has become a very important problem along with development of nanometer technologies. It is very important to provide testability for robust PDF during circuit design. Circuits derived from ROBDDs are usually implemented using multiplexors (MUXs). Their testability is investigated under different fault models [1–4] but the approaches suggested do not provide 100% testability. In [5] simple transformation of a circuit is suggested that guarantees 100% testability for both single stuck-at fault (SAF) and PDF models. These circuits are derived from ROBDDs using multiplexors. A size of a circuit is proportional to the given ROBDD size. The major disadvantage of this approach is the use of additional input.

In [6] it is shown that a circuit constructed from BDD by covering CLBs guarantees 100% testability for robust PDFs without an additional input.

In [7] the combinational circuits constructed from ROBDDs by Invert-AND-XOR implementation of the formula $f_v = \overline{x_i} f_v^{x_i=0} \oplus x_i f_v^{x_i=1}$ corresponding to an internal node v are considered. In this formula, the operation " $\oplus$ " is implemented by XOR gate. It is revealed that each path delay fault of the resulted circuit manifests itself either as robust testable fault or as validatable non robust testable one. When applying the test pairs in the definite order, we may detect any PDF of the circuit. This means that the circuits considered guarantee 100% testability for PDFs without an additional input.

In this paper the combinational circuits constructed from ROBDDs by covering some internal nodes with Invert-AND-OR sub-circuits implementing the formula $f_v = \overline{x_i} f_v^{x_i=0} \vee x_i f_v^{x_i=1}$ and covering the rest internal nodes with Invert-AND-XOR sub-circuits implementing the formula $f_v = \overline{x_i} f_v^{x_i=0} \oplus x_i f_v^{x_i=1}$ are considered. When using this approach, it is possible to cut path lengths of the combinational circuits and cut the number of OR, AND, NOT gates if we implement XOR as a sub-circuit from these gates. It is revealed that PDFs in the resulted circuits (similar circuits are considered in [7]) manifest themselves either as robust testable or as validatable non

robust testable ones. When applying test pairs in the definite order, we may detect any PDF of the circuit. This means that the circuits suggested in this paper (as the circuits in [7]) guarantee 100% testability for PDFs without an additional input. The experimental results showed that the suggested circuits as a rule were simpler than the ones in [Ibid.].

In Section II the problem of deriving the proper combinational circuits is discussed. In Section III an algorithm of ROBDD internal node analysis is suggested. In Section IV the properties of the formula originated by the circuit are investigated. In Section V algorithms of finding test pairs on which PDF manifests itself either as robust testable or validatable non robust testable one are proposed. In Section VI the experimental results are given.

1. A combinational circuit design

It is well known that Binary Decision Diagram (BDD) is a directed acyclic graph based on Shannon decomposition in each non terminal node v :

$$\begin{aligned} f_v &= \overline{x_i} f_v^{x_i=0} \vee x_i f_v^{x_i=1}, \\ f_v^{x_i=0} &= f_v(x_1, \dots, x_i = 0, \dots, x_n), \\ f_v^{x_i=1} &= f_v(x_1, \dots, x_i = 1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Here f_v is the function corresponding to the node v , dashed edge points to $f_v^{x_i=0}$ and bold edge points to $f_v^{x_i=1}$ (Fig. 1). BDD is called ordered if variables are encountered in the same order on all paths connecting the BDD root with the terminal node. BDD is reduced if it does not contain either isomorphic sub-graphs or nodes such that $f_v^{x_i=0} = f_v^{x_i=1}$. Reduced and ordered BDD (ROBDD) is a canonical representation of Boolean function for the chosen order of variables [8].

Any path that connects the BDD root with the 1 terminal node creates the product of the Disjoint Sum of Products (DSoP) of a function f represented by this ROBDD. DSoP is a sum of products in which any two product cubes do not intersect.

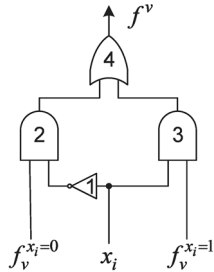


Fig. 1. Gate implementation of the formula

$$f_v = \overline{x_i} f_v^{x_i=0} \vee x_i f_v^{x_i=1}$$

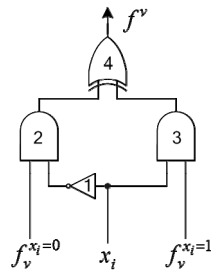


Fig. 2. Gate implementation of the formula

$$f_v = \overline{x_i} f_v^{x_i=0} \oplus x_i f_v^{x_i=1}$$

Let $F = \{f_1, \dots, f_m\}$, be a system of Boolean functions describing combinational circuit behavior. Derive ROBDD using the same order of variables for each Boolean function from F . Join isomorphic sub-graphs in the different ROBDDs. Combine the 1 terminal nodes of the different ROBDDs into one 1 terminal node and their 0 terminal nodes into one 0 terminal node. As a result, we obtain the graph with m roots and two terminal nodes. This graph represents the system of m Boolean functions. It is called Shared ROBDD. Without loss of generality, we further consider systems with one function.

The ROBDD for one output Boolean function is shown in Fig. 1. Find the product (cube) of the DSoP for each path connecting the ROBDD root with the 1 terminal node. The DSoP of the function f is as follows.

$$\begin{aligned} f &= x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_4} x_5 \vee \\ &\vee x_1 x_2 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \\ &\vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_5}. \end{aligned}$$

Eliminate from the ROBDD all edges connected with the 0 terminal node and obtain the ROBDD representing combinational circuit behavior. Call this ROBDD as a Circuit ROBDD.

Cover each node of the Circuit ROBDD with either Invert-AND-OR sub-circuit implementing the formula $f_v = \overline{x_i} f_v^{x_i=0} \vee x_i f_v^{x_i=1}$ or Invert-AND-XOR sub-circuit implementing the formula $f_v = \overline{x_i} f_v^{x_i=0} \oplus x_i f_v^{x_i=1}$. Note that both these formulae represent the same Boolean function.

The condition $f_v^{x_i=0} \neq f_v^{x_i=1}$ is satisfied for each internal node v of the ROBDD. This means that there exists the Boolean vector γ on which either $f_v^{x_i=1}(\gamma)=1$ and $f_v^{x_i=0}(\gamma)=0$ or $f_v^{x_i=1}(\gamma)=0$ and $f_v^{x_i=0}(\gamma)=1$.

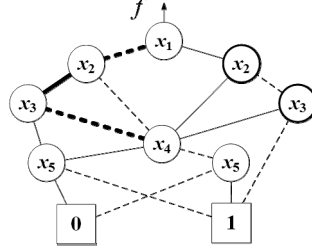


Fig. 3. ROBDD for f

If for the internal node v there exists the Boolean vector γ on which $f_v^{x_i=1}(\gamma)=1$ and $f_v^{x_i=0}(\gamma)=0$ and the Boolean vector δ on which $f_v^{x_i=1}(\delta)=0$ and $f_v^{x_i=0}(\delta)=1$ we cover this node with Invert-AND-OR sub-circuit (Fig. 2). Unfortunately sometimes only one condition pointed above is satisfied. The latter is possible when one of the functions $f_v^{x_i=0}$, $f_v^{x_i=1}$ is implicant of another one: either $f_v^{x_i=0} \leq f_v^{x_i=1}$ or $f_v^{x_i=1} \leq f_v^{x_i=0}$. In that case, we cover the corresponding internal node with Invert-AND-XOR sub-circuit (Fig. 3).

2. Internal node analysis

Verify one of conditions $f_v^{x_i=1}(\gamma)=1$, $f_v^{x_i=0}(\gamma)=0$ and $f_v^{x_i=1}(\delta)=0$, $f_v^{x_i=0}(\delta)=1$. Let us verify the first condition. For that we execute the following steps.

Algorithm

1. Form the ROBDD implementing the function $f_v^{x_i=1}$ for the given internal node v . Call it as a ROBDD $(f_v^{x_i=1})$. Its root is the internal node in which the bold edge from v runs. The terminal nodes of the ROBDD $(f_v^{x_i=1})$ coincide with the terminal nodes of the ROBDD of f . When forming the ROBDD $(f_v^{x_i=0})$, we do the same. Its root is the internal node in which the dashed edge from v runs.

2. To get the ROBDD $(\overline{f_v^{x_i=0}})$ we rearrange the terminal nodes of the ROBDD $(f_v^{x_i=0})$.

3. Multiply the ROBDD $(f_v^{x_i=1})$ and the ROBDD $(\overline{f_v^{x_i=0}})$. Denote the result as a ROBDD R^* .

4. If the ROBDD R^* is not empty, we consider any path from the R^* root till its 1 terminal node. Note the corresponding product as k . The Boolean vector that turns k into 1 call the vector γ .

Note that the vector δ may be found in the similar way, that is, by multiplication of the ROBDD $(f_v^{x_i=0})$ and the ROBDD $(\overline{f_v^{x_i=1}})$. If the results of both multiplications are not empty we cover the internal node v with Invert-AND-OR sub-circuit.

Otherwise, one of the functions $f_v^{x_i=1}$, $f_v^{x_i=0}$ is implicant of another one. In that case, we cover the internal node v with Invert-AND-XOR sub-circuit.

Apply the suggested procedure for the ROBDD in Fig. 1. For right internal node marked x_2 we have:

$$f_v^{x_2=0} = x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_3}, \quad f_v^{x_2=1} = x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_4} x_5.$$

This means that $f_v^{x_2=1}$ is implicant of $f_v^{x_2=0}$. Consequently, we must cover the corresponding node with Invert-AND-XOR sub-circuit. For right internal node marked x_3 we have:

$$f_v^{x_3=0} = 1, \quad f_v^{x_3=1} = x_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4 x_5.$$

This means that $f_v^{x_3=1}$ is implicant of $f_v^{x_3=0}$. Consequently, we must cover the corresponding node with Invert-AND-XOR sub-circuit.

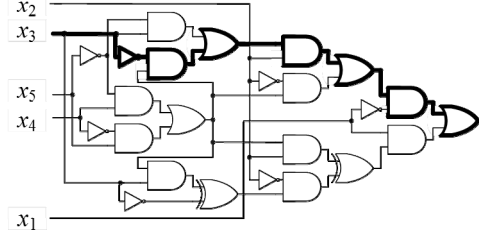


Fig. 4. Circuit C

For the rest internal nodes the results of both above mentioned multiplications are not empty. It means that the corresponding nodes may be covered with Invert-AND-OR sub-circuit. As a result of covering the circuit ROBDD we have combinational circuit C (Fig. 4).

Derive the formula from circuit C substituting the proper gate functions for circuit internal variables and eliminating brackets. Literal permutations and any simplifications are forbidden. In obtained formula some products are connected each other with operation OR ($\vee$) others – with operation XOR ($\oplus$). (As the products obtained in the course of substitutions are pairwise orthogonal, then the expressions like $(a \oplus b) \vee c$ is similar to the expression $a \oplus (b \vee c)$ and, consequently, brackets in both of them may be deleted). Call this formula as mixed SoP (MSoP). The formula is as follows:

$$\begin{aligned} MSoP(f) = & x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \oplus x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \oplus x_1 x_2 \bar{x}_4 x_5 \vee \\ & \vee x_1 x_2 x_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \\ & \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_5. \end{aligned}$$

3. MSoP properties

For any circuit obtained by the method discussed in Sections II, III we derive the system of MSoPs. Each literal of MSoP is connected with the path that begins at the circuit input marked by the input variable and terminates at the circuit output.

Consider the sub-circuit of Fig. 2 in detail. Call the sequence of gates with numbers 1, 2 and 4 as an inverse branch of the sub-circuit and the sequence of gates with numbers 3 and 4 as a direct branch of the sub-circuit. Each branch represents two paths of the sub-circuit. Examine two paths that begin at the input marked with the variable x_i and belong to the different branches. Call these paths as opposite ones. The path corresponding to the inverse branch is represented as literal $\bar{x}_i$ in the proper product of the MSoP and the path corresponding to the direct branch – as literal x_i . At the same time these paths correspond to dashed and bold edges of the ROBDD running from the node x_i that is covered by the sub-circuit when deriving circuit C. If the output of the sub-circuit is not output of circuit C, then the path of circuit C beginning at the input marked with the literal x_i ($\bar{x}_i$) is represented by the sequence of literals corresponding to the sub-circuits that are traversed by this path. This sequence is contained at least in one of the products of the MSoP. Moreover, this sequence is represented by the ROBDD path connecting the ROBDD root and the node x_i . The ROBDD path and the corresponding circuit C path are shown in Fig. 1 and Fig. 4.

For example, the path of circuit C marked with the bold line (Fig. 4) is represented as $\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1$. This sequence of literals is contained in the 8-th and 9-th products of the MSoP. Thus the literal position explicitly

determines the corresponding path in circuit C . Moreover, the sequence of literals is also represented by the ROBDD path (Fig. 1).

In [9] path delay faults are considered as temporary stuck-at faults of the corresponding ENF literals. This means that all literals satisfying to the same path are changed for the same constant. Instead of ENF of circuit C we may consider the MSoP created by circuit C . Note that for each literal of a MSoP product the brief information about the sequence is represented by the literals of this product forgoing to the considered literal.

In order to find all MSoP products that contain the literal x_i corresponding to the certain path α we need the following.

Find ROBDD path ε running from ROBDD root to node v marked with the literal x_i . The bold edge corresponding to the beginning of the path α runs from the node v . Call the corresponding to the path ε product as k_ε . Continue the ROBDD path ε through the bold edge to the 1 terminal node of the ROBDD. Find all prolongations and consequently all products containing the literal x_i corresponding to the beginning of the path α . These products comprise a set K_α [9]. Note that the products of the MSoP that contain the literal $\bar{x}_i$ corresponding to the path opposite to α have the same sub-product k_ε .

Let the literal x_i be equal to the constant 0 in each product of K_α .

Theorem 1. The Boolean vector β is a test pattern for the fault $x_i = 0$ in each product of K_α if it turns the certain product K from K_α into 1.

Proof. As all products of the MSoP are pairwise orthogonal then K is the only product of the fault-free MSoP that is turned into 1 on the vector β . When x_i is equal to 0 the fault MSoP is turned into 0 on the vector β . The theorem is proved.

Let the literal x_i be equal to the constant 1 in each product of K_α .

Theorem 2. For the fault $x_i = 1$ in each product of K_α there exists the test pattern β .

Proof. Consider two cases.

The first case. The literal x_i corresponds to the input of Invert-AND-OR sub-circuit covering the internal node v marked with the variable x_i . In that case, there exists the test pattern γ that turns $f_v^{x_i=1}$ into 1 and $f_v^{x_i=0}$ into 0. Represent this test pattern with the product k_γ . Form the product $k_\varepsilon k_\gamma$. Let the product obtained from $k_\varepsilon k_\gamma$ by adding arbitrary $(n-1)$ literals except x_i , $\bar{x}_i$ be k^* (γ originates k^*). Here n is a number of input variables of circuit C .

Let vector β be represented by the product $k^* \bar{x}_i$. This vector turns all products of K_α into 0. The rest of the products of fault-free MSoP are also turned into 0. When the MSoP is fault, that is, from each product of K_α the literal x_i is excluded, one of such product is turned into 1 on β . This is the product K of the MSoP corresponding to the function $f_v^{x_i=1}$ (the product K is originated by the product k of $f_v^{x_i=1}$ MSoP, which is turned into 1 on γ). $f_v^{x_i=1}$ MSoP is formed by the ROBDD whose root is the node in which a bold edge runs from v . The product K is the only one product as all products of the MSoP are pairwise orthogonal.

The second case. The literal x_i corresponds the input of Invert-AND-XOR sub-circuit covering the internal node v marked with the variable x_i . Consider the situation when there is no the test pattern γ that turns $f_v^{x_i=1}$ into 1 and $f_v^{x_i=0}$ into 0. Then there exists the test pattern γ that turns $f_v^{x_i=1}$ into 1 and $f_v^{x_i=0}$ into 1.

Form the vector β in the above mentioned way. It turns into 1 the certain product from the MSoP namely the product K originated by the $f_v^{x_i=0}$ MSoP (we take in mind the product k from the $f_v^{x_i=0}$ MSoP which is turned into 1 on γ). The vector β turns into 0 the rest products of the fault-free MSoP. Thus the vector β turns into 1 the fault-free MSoP.

When the MSoP is fault, that is, from each product of K_α the literal x_i is excluded, one of K_α products is turned into 1 on β (we take in mind the product K originated by the k from $f_v^{x_i=1}$ MSoP which is turned into 1 on γ). At the same time the vector β turns into 1 the product originated by $f_v^{x_i=0}$ MSoP (we refer to the product from the $f_v^{x_i=0}$ MSoP which is turned into 1 on γ). The vector γ turns into 1 only one product from $f_v^{x_i=1}$ MSoP and only one product from $f_v^{x_i=0}$ MSoP as all products of $f_v^{x_i=0}$ MSoP and $f_v^{x_i=1}$ MSoP are pairwise orthogonal.

Thus, two products are turned into 1 in the fault MSoP. The rest of the products are turned into 0 on the vector β . As we use Invert-AND-XOR sub-circuit for covering the internal node v marked with x_i , then for the node v and the fault considered we have the expression: $k_e (f_v^{x_i=1} \oplus \bar{x}_i f_v^{x_i=0})$. After substitution of the vector β we get $1 \oplus 1$. This means that the vector β turns the fault MSoP into 0. Consequently, the vector β is a test pattern. The theorem is proved.

Thus, both faults of the *MSoP*: $x_i = 0$ in all products of K_α and $x_i = 1$ in all products of K_α are detectable.

4. Finding test pairs for robust testable and validatable non robust testable faults

Finding test pairs for robust testable and validatable non robust testable faults is based on the approach suggested in [7]. It is necessary to justify its application for the circuits that originate MSoPs instead of Reed-Muller expressions in [7]. In [9] the conditions of robust path delay fault manifestation for test pairs extracted from an ENF are formulated. The first condition is existence of a test pattern for the corresponding constant fault of the ENF literal. This test pattern is a vector v_2 of a test pair. The next condition is: the variable x_i that marks the node v takes the opposite values for v_1, v_2 vectors. Evidently, (Section 3) both conditions are feasible for the considered faults of MSoP.

Let $k(u)$ be minimal cube covering vectors v_1, v_2 of a test pair. Note as $\underline{K}$ the product that differs from the product K only by inversion of the variable x_i .

Remind that as we consider ROBDD, then for each node v the condition $f_v^{x_i=0} \neq f_v^{x_i=1}$ is executed. Let γ be a test pattern on which these functions are different and $f_v^{x_i=1}(\gamma) = 1, f_v^{x_i=0}(\gamma) = 0$. Represent this test pattern as we have done before with the product k_γ . Form the product $k_e k_\gamma$ and k^* in the above mentioned way.

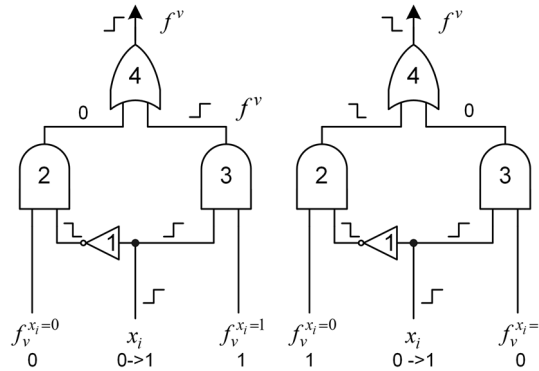


Fig. 5. Illustration of the corollary

Theorem 3. The product k^* represents the test pair of robust testable fault for the path α and its rising and falling transitions if the beginning of the path is marked with the literal x_i and the condition $f_v^{x_i=1}(\gamma) = 1, f_v^{x_i=0}(\gamma) = 0$ is executed.

Proof. The product $x_i k^*$ represents the Boolean vector v_2 that turns the product K from K_α into 1. This means v_2 is a test pattern for the fault $x_i = 0$ in all products of K_α . Actually this vector turns $f_v^{x_i=0}$ MSoP into 0 and turns $f_v^{x_i=1}$ MSoP into 1. Moreover, this vector turns into 1 the only product K from K_α originated by $f_v^{x_i=1}$ MSoP. Consequently, this vector turns the fault-free MSoP into 1 on the same product K and only on this product. As well this vector turns the fault MSoP into 0.

The product $x_i k^*$ represents the vector v_1 of the proper test pair. This vector is a test pattern for the fault $x_i = 1$ in all products of K_α . Actually the vector v_1 turns $f_v^{x_i=0}$ MSoP into 0 and turns $f_v^{x_i=1}$ MSoP into 0. Consequently, the vector turns the fault-free MSoP into 0. At the same time this vector turns into 1 the fault MSoP because it turns into 1 the product $\underline{K}$ and the product K^* obtained from K (K from K_α) when the considered fault occurs. The fault MSoP turns into 1 on the only product K^* . Thus the vector represented by product $x_i k^*$ is the

vector v_2 for rising transition of the path α and the vector represented by product $\bar{x}_i k^*$ is the vector v_2 for the falling transition of the path α . Note that $k(u)$ is orthogonal to all products of the MSOP except products of K_α . Actually $k(u)$ is orthogonal to the products of the MSOP that does not contain sub-product k_e . The product $k(u)$ is also orthogonal to the products of the MSOP containing sub-product $k_e \bar{x}_i$ as k_γ is orthogonal to $f_v^{x_i=0}$. Moreover, any product of the fault free MSOP does not contain repeated literals. Thus all conditions [9] of robust testable manifestation for rising and falling transition of the path α are fulfilled. The theorem is proved.

Corollary. If there exist a vector γ for which $f_v^{x_i=1}(\gamma)=1$, $f_v^{x_i=0}(\gamma)=0$ and a vector δ for which $f_v^{x_i=1}(\delta)=0$, $f_v^{x_i=0}(\delta)=1$, then for both paths that begin at the same input and marked with the literals x_i and $\bar{x}_i$ PDFs manifest themselves as robust testable for rising and falling transitions.

Fig. 5 is an illustration of the above mentioned corollary.

Note that sometimes only one condition pointed in the corollary is executed. Then the corresponding path has a test pair on which PDF manifests itself as robust testable one in both directions. This path must be tested first and then we proceed to test opposite path. Let opposite path be α . Let γ be a Boolean vector on which the condition $f_v^{x_i=1}(\gamma)=1$, $f_v^{x_i=0}(\gamma)=1$ is executed. The product k^* is formed in the above mentioned way.

Theorem 4. The product k^* represents the test pair of non robust testable PDF for the path α and its rising and falling transitions if the beginning of the path is marked with the literal x_i and the condition $f_v^{x_i=1}(\gamma)=1$, $f_v^{x_i=0}(\gamma)=1$ is executed.

Proof. The product $x_i k^*$ represents the Boolean vector v_2 that turns the product K from K_α into 1. This means v_2 is a test pattern for constant fault $x_i = 0$ in all products of K_α . The product $\bar{x}_i k^*$ represents vector v_1 of this test pair. The test pair detects rising transition of the path α . Theorem 2 should be taken to conclude that v_1 is a test pattern for the fault $x_i = 1$ in all products of K_α . The latter means that v_1 is as well as v_2 for the fault $x_i = 1$ in all products of K_α , that is, $\bar{x}_i k^*$ is a test pattern for falling transition. Note that $k(u)$ is orthogonal to all products of MSOP that does not contain sub-product k_e . The product $k(u)$ is not orthogonal to some product K' containing k_e and $\bar{x}_i$ as k_γ is not orthogonal to $f_v^{x_i=0}$. The theorem is proved.

Thus when the conditions of the above mentioned corollary is not executed we have robust testable PDF for the path that begins at the input marked with the variable x_i and validatable non robust testable PDF for the opposite path. Fig. 6 is illustration of robust testable PDF and validatable non robust testable PDF for paths that begin at the input marked with the variable x_i .

Remind that the product obtained from $k_e k_\gamma$ by adding arbitrary $(n-1)$ literals except x_i , $\bar{x}_i$, represents the test pair either for robust testable PDF or for validatable non robust testable PDF. In the first case, the vector γ , for which $f_v^{x_i=1}(\gamma)=1$, $f_v^{x_i=0}(\gamma)=0$, is represented by any path from ROBDD R^* obtained with the algorithm of Section III. In the second case, the vector γ , for which $f_v^{x_i=1}(\gamma)=1$, $f_v^{x_i=0}(\gamma)=1$, is represented by any path of the ROBDD $(f_v^{x_i=1})$ (ROBDD $(f_v^{x_i=0})$) that is an implicant of the ROBDD $(f_v^{x_i=0})(\text{ROBDD}(f_v^{x_i=1}))$. The relation of implication is determined by the same algorithm. Note that the algorithm implementation has a polynomial complexity as the algorithm is based on multiplication of two ROBDDs extracted from the circuit ROBDD. Finding the vector γ was out of consideration in the paper [7].

As for k_e it is originated by the path α connecting the circuit ROBDD root corresponding to the path output and the internal node v corresponding to the path input. It means that algorithm of finding test pairs has a polynomial complexity.

In order to detect validatable non robust PDF of the path and its rising and falling transitions, we must first deliver the test pair to detect robust testable PDF for the opposite path. If the opposite path is fault-free, we may detect validatable non robust PDF of rising and falling transitions of the considered path.

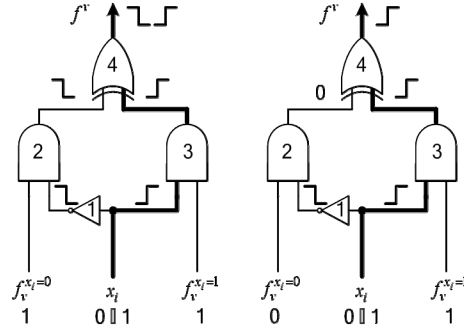


Fig. 6. An illustration of robust testable PDF (left) and validatable non robust testable PDF (right)

5. Experimental results

In Table 1 the information about combinational circuits investigated (MCNC) is given. We have got representation of each combinational circuit by the Shared ROBDD using BuDDy system. For the Shared ROBDD the number of internal nodes are counted (second column of Table 2).

Table 1

Benchmark description

benchmark	inputs	outputs
C3540	49	22
C1908	33	25
C1355	41	32
C880	62	26
pair	173	137
frg2	143	139
k2	45	45
x3	135	99

Table 2

Benchmark results

benchmark	node count	or nodes	percentage	old area	new area	area reduction
C3540	672 435	513528	76,4%	5379480	3 325 368	39,2%
C1908	49 323	39238	79,6%	394584	237 632	39,8%
C1355	50 682	45393	89,6%	405456	223 884	44,8%
C880	346 688	225196	67%	2773504	1 872 720	32,5%
pair	51 414	790	1,5%	411312	408 152	0,8%
frg2	1542	79	5,1%	12336	12 020	2,6%
k2	698	341	48,9%	5584	4 220	24,4%
x3	543	38	7%	4344	4 192	3,5%

Then we found the nodes that may be covered by sub-circuit of Fig. 3 (third column of Table 2). The percentage of such sub-circuits among all ones was calculated (forth column of Table 2). We appreciated the complexity of the circuits obtained from the Shared ROBDD [9] by covering internal nodes with sub-circuit of Fig. 3 and the circuits obtained by the method suggested here. For that the numbers of two inputs and one input gates of the circuits are computed. The results are given in the sixth and seventh columns, correspondingly.

The last column of Table 2 describes the simplification of circuits on account of using the suggested method (in percentage terms). We see that always more simple circuits are derived and often essential simplification is possible.

Conclusion

New synthesis method of fully delay testable circuits is suggested that as a rule derives more simple circuits of this kind than in [9]. The simplification is based on multiplications of sub-circuit ROBDDs (these operations have the polynomial complexity). The circuits obtained originate new type of formulae called MSOPs in which products are separated either by symbol " $\oplus$ " or " $\vee$ ". The investigation of the formulae properties insured formulating the algorithms of finding PDF test pairs that also have a polynomial complexity.

REFERENCES

1. Ashar, P., Devadas, S. & Keutzer, K. (1991) Gate-delay-fault testability properties of multiplexor-based networks. *Proc. Int. Test Conf.* pp. 887-896. DOI: 10.1007/BF01383945
2. Ashar, P., Devadas, S. & Keutzer, K. (1991) Testability properties of multilevel logic networks derived from binary decision diagrams. *Proc. Adv. Res. VLSI*. Univ. California, Santa Cruz. pp. 33-54.
3. Ashar, P., Devadas, S. & Keutzer, K. (1993) Path-delay-fault testability properties of multiplexor-based networks. *Integration, VLSI J.* 15(1). pp. 1-23. DOI: 10.1016/0167-9260(93)90002-T
4. Becker, B. (1998) Testing with decision diagrams. *Integration, VLSI J.* 26. pp. 5-20.
5. Drechsler, R., Shi, J. & Fey, G. (2004) Synthesis of fully testable circuits from BDDs. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems.* 23(3). pp. 1-4. DOI: 10.1109/TCAD.2004.823342
6. Matrosova, A. & Nikolaeva, E. (2010) PDFs testing of combinational circuits based on coverly ROBDDs. *Proceedings of EWDTS Symposium.* pp. 160-163. DOI: 10.1109/EWDTS.2010.5742045
7. Matrosova, A., Nikolaeva, E., Kudin, D. & Singh, F. (2012) PDF testability of the circuits derived by special covering ROBDDs with gates. *Proceedings of EWDTS Symposium.* Kharkov: IEEE.
8. Bryant, R.E. (1986) Graph-based algorithms for Boolean function manipulation. *IEEE Trans. on Computers.* pp. 677-691. DOI: 10.1109/TC.1986.1676819
9. Matrosova, A., Lipsky, V., Melnikov, A. & Singh, V. (2010) Path delay faults and ENF. *Proceedings of EWDTS Symposium.* pp. 164-167.

Matrosova Anjela Yurievna, Dr. Science, prof. E-mail: mau11@yandex.ru

Mitrofanov Evgenii Vladimirovich. E-mail: qvaz@yandex.ru

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Toral Shah. Shah@yandex.ru

Indian Institute of Technology (Bombay)

Поступила в редакцию 3 сентября 2016 г.

Матросова А.Ю., Митрофанов Е.В. (Томский государственный университет), *Шах Т.* (Индийский институт технологий Бомбей).

Упрощение контролепригодных комбинационных схем и поиск тестовых пар для неисправностей задержек путей.

Ключевые слова: робастно и не робастно тестируемые неисправности задержек путей; ROBDD-графы; контролепригодный синтез.

DOI: 10.17223/19988605/39/11

Разработан новый подход к синтезу тестопригодных комбинационных схем, в которых задержка каждого пути обнаруживаема, позволяющий по сравнению с известными ранее методами упростить структуры синтезируемых схем и сократить длины путей в них. Комбинационные схемы конструируются покрытием некоторого определенного подмножества вершин ROBDD графа Invert-AND-OR (НЕ, И, ИЛИ) подсхемами, реализующими формулу $f_v = \overline{x_i} f_v^{x_i=0} \vee x_i f_v^{x_i=1}$, и покрытием остальных вершин графа подсхемами Invert-AND-XOR (НЕ, И, И-ИЛИ), реализующими формулу $f_v = \overline{x_i} f_v^{x_i=0} \oplus x_i f_v^{x_i=1}$. Использование данного подхода позволяет сократить длины путей комбинационной схемы и уменьшить число OR, AND, NOT вентилей при условии реализации элемента XOR в базе этих вентилей. Показано, что неисправности задержек путей в получаемых схемах проявляют себя либо как робастно тестируемые, либо как обнаружимые не робастно тестируемые. Доставляя тестовые наборы в определенном порядке, возможно обнаружить все неисправности задержек путей в схеме. Таким образом, предлагаемые в работе схемы являются стопроцентно тестируемыми относительно неисправностей задержек путей и не требуют введения дополнительного входа в схему. Экспериментальные данные показали, что данный метод позволяет существенно сократить сложность синтезируемых схем.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АГАМАЛЫЕВА Айгюн Исфоган кызы – докторант Бакинского государственного университета. E-mail: agamaliyeva88@gmail.com

АНЕНКОВ Александр Дмитриевич – аспирант кафедры вычислительных систем факультета информатики и вычислительной техники Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики (г. Новосибирск). E-mail: alex.anenkov@outlook.com

БУРАКОВ Дмитрий Петрович – кандидат технических наук, доцент кафедры математики и моделирования факультета промышленного и гражданского строительства Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I. E-mail: bds@yandex.ru

ГАРИНА Марина Игоревна – кандидат технических наук, доцент кафедры математики и моделирования факультета промышленного и гражданского строительства Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I. E-mail: migarina@gmail.com

ДОМБРОВСКИЙ Владимир Валентинович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой информационных технологий и бизнес-аналитики Института экономики и менеджмента Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

ЛИВШИЦ Климентий Исаакович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: kim47@mail.ru

ЛИСОВСКАЯ Екатерина Юрьевна – аспирантка кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ekaterina_lisovs@mail.ru

МАНСИМОВ Камил Байрамали оглы – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики Бакинского государственного университета, руководитель лабораторией «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку, Азербайджан). E-mail: kmansimov@mail.ru

МАТРОСОВА Анжела Юрьевна – профессор, доктор технических наук, заведующая кафедрой программирования факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: mau11@yandex.ru

МЕДВЕДЕВ Геннадий Алексеевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета (г. Минск, Беларусь). E-mail: MedvedevGA@bsu.by

МИКШИНА Виктория Степановна – профессор, кандидат технических наук, заведующая кафедрой информатики и вычислительной техники Сургутского государственного университета. E-mail: mikshinavs@gmail.co

МИТРОФАНОВ Евгений Владимирович – аспирант факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: qvaz@yandex.ru

МОИСЕЕВА Светлана Петровна – доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: smoiseeva@mail.ru

НАЗАРОВ Анатолий Андреевич – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

ОБЪЕДКО Татьяна Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий и бизнес-аналитики Института экономики и менеджмента Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: tatyana.obedko@mail.ru

ПАВЛОВ Сергей Игоревич – аспирант кафедры информатики и вычислительной техники Сургутского государственного университета. E-mail: sergey8991@mail.ru

ПАЗНИКОВ Алексей Александрович – кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительных систем факультета информатики и вычислительной техники Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики (г. Новосибирск). E-mail: apaznikov@gmail.com

РУБАН Анатолий Иванович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информатики Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета (г. Красноярск). E-mail: ai-rouban@mail.ru

САМОРОДОВА Мария Владимировна – аспирантка кафедры прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: samorodova21@gmail.com

СУРИНА Альфия Адгамовна – аспирантка кафедры прикладной математики факультета математики, механики и компьютерных наук Южно-Уральского государственного университета (национального исследовательского университета) (г. Челябинск). E-mail: dallila87@mail.ru

ТЫРСИН Александр Николаевич – доцент, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики Уральского энергетического института Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (г. Екатеринбург). E-mail: at2001@yandex.ru

ШАХ Торал – PhD студент Индийского института технологий (г. Бомбей, Индия). E-mail: Shah@yandex.ru

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2017. № 39

Редактор Н.А. Афанасьева
Корректор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 06.06.2017 г. Формат 60x84¹/₈.
Гарнитура Times. Печ. л. 11,8; усл. печ. л. 11.
Тираж 250 экз. Заказ № 2588. Цена свободная.

Дата выхода в свет 30.06.2017 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–53-15-28; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru