УДК 537.8:517.968.73
DOI 10.17223/19988621/47/3

С.В. Марвин

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СЛУЧАЕ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ПРОВОДЯЩИМИ ФЕРРОМАГНИТНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассматривается начально-краевая задача электродинамики для магнитодиэлектрического тела, которое содержит инородные проводящие ферромагнитные включения и находится в поле мгновенно выключенного стороннего тока. Для обобщенной постановки задачи выбран определенный функциональный класс, и с помощью теоремы Хилле – Иосиды показано, что у исследуемой начально-краевой задачи в выбранном функциональном классе существует единственное решение, непрерывно зависящее от начальных условий.

Ключевые слова: *начально-краевая задача, уравнения Максвелла, интегро-дифференциальные уравнения, замкнутый оператор, теорема Хилле – Иосиды.*

Начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла, то есть задачи электродинамики, не предполагающие сокращающуюся гармоническую зависимость поля от времени, необходимы для описания нестационарных волновых процессов. Нестационарные электромагнитные поля находят широкое применение в электротехнике, радиотехнике и неразрушающем контроле [1], поэтому начально-краевые задачи электродинамики не только представляют немалый теоретический интерес, но и имеют существенный прикладной смысл. В частности, теоретическую и практическую ценность имеет доказательство общих теорем для таких задач.

Ранее широко исследовались внутренние начально-краевые задачи электродинамики для ограниченных областей; наиболее существенные результаты были получены для областей с границами класса $C^{(2)}$ [2, 3]. Однако для электротехники, радиотехники и неразрушающего электромагнитного контроля интерес представляют не только внутренние задачи для ограниченных или неограниченных областей, но и задачи сопряжения, при постановке которых граничные условия связывают поле внутри области с полем снаружи области.

Начально-краевые задачи сопряжения исследовались, в частности, для ограниченного немагнитного проводящего тела в предположении, что граница тела должна быть поверхностью Ляпунова, электропроводность тела должна быть бесконечно гладкой функцией пространственных координат, а сторонний ток должен включаться достаточно медленно [4, 5]. При таких условиях было доказано существование классического решения начально-краевой задачи электродинамики (то есть решения, непрерывно дифференцируемого в обычном смысле). Однако наиболее общие модели рассеивающих тел должны допускать не только гладкие, но и кусочно-гладкие границы, и нарушения внутренней структуры, в общем случае, не могут быть описаны только гладкими функциями.

Также исследовались начально-краевые задачи в обобщенной постановке применительно к рассеивающим телам, ограниченным кусочно-гладкими поверхностями: для проводящего неферромагнитного и ферромагнитного тела с дефектами [6, 7]; для проводящего неферромагнитного тела с инородными диэлектрическими включениями [8]. В этих задачах нестационарное поле создавалось мгновенно выключенным сторонним током. Был найден функциональный класс, в котором рассмотренные начально-краевые задачи имели единственное решение, непрерывно зависящее от начальных данных.

Не менее актуально исследование начально-краевой задачи сопряжения применительно к магнитодиэлектрику, так как магнитодиэлектрические материалы нередко используются в дросселях и иных стабилизирующих устройствах, в связи с чем подвергаются воздействию нестационарных полей (в частности, при резком прерывании тока). Кроме того, с использованием нестационарных методов неразрушающего электромагнитного контроля (например, с помощью резко выключаемого тока) возможно целенаправленное выявление структурных нарушений магнитодиэлектриков [1].

Постановка задачи

Для построения математической модели взаимодействия нестационарного электромагнитного поля и магнитодиэлектрика, имеющего структурные нарушения, представляется необходимым хотя бы краткое описание, что представляют собой магнитодиэлектрические материалы и какими могут быть недочеты при их изготовлении. Магнитодиэлектрики – это смесь затвердевшей диэлектрической массы и перемешанного с ней ферромагнитного порошка (измельченного ферромагнитного проводника). При качественном изготовлении магнитодиэлектрика перемешивание происходит равномерно и частицы ферромагнитого порошка имеют пренебрежимо малый объем, поэтому всю смесь с высокой степенью точности можно считать однородной и непроводящей (в частности, можно пренебречь тепловыми потерями, связанными с токами проводимости, которые вызывает электрическое поле в частицах ферромагнетика). Однако магнитная проницаемость частиц ферромагнитного порошка настолько высока, что смесь имеет магнитную проницаемость, существенно превосходящую 1.

Нарушения внутренней структуры магнитодиэлектрика могут быть вызваны нетщательным перемешиванием диэлектрической массы и порошка; по этой причине магнитодиэлектрик становится неоднородным по своим диэлектрическим и магнитным свойствам. Кроме того, магнитодиэлектрик может оказаться некачественным из-за недостаточного измельчения ферромагнитного металла; тогда в магнитодиэлектрике появляются большие по размерам проводящие ферромагнитные включения. Области, занятые такими включениями, уже не имеют пренебрежимо малый объем и не допускают описание нулевой электропроводностью.

Множество вещественных чисел будем обозначать, как обычно, $\mathbf{R}$. Предположим, что в трехмерном геометрическом пространстве фиксирована прямоугольная система координат. Будем обозначать как $\boldsymbol{r}$ упорядоченный набор координат точки пространства (x, y, z) соответственно множество всех точек пространства – $\mathbf{R}^3$ (здесь и далее под степенью множества подразумевается соответствующее декартово произведение). Предположим, что магнитодиэлектрическое тело занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbf{R}^3$; граница области Ω – кусочногладкая поверхность. Крупные ферромагнитные включения занимают области Ω_1, $\Omega_2, \ldots$, Ω_k с кусочно-гладкими границами. Замыкания этих областей попарно не имеют общих точек и включаются в Ω: $\overline{\Omega}_i \subset \Omega$; $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Электропроводность σ не зависит от времени, равна 0 в точках пространства, внешних по отношению ко всем областям Ω_i. В каждой из областей Ω_i функция $\sigma(\boldsymbol{r}) > 0$ непрерывна и может быть по непрерывности продолжена на границы Ω_i изнутри, оставаясь при таком продолжении положительной. Диэлектрическая проницаемость ε равна 1 во внутренних точках Ω_i и точках, внешних по отношении к Ω. В области $\Omega \backslash \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \overline{\Omega}_i \right)$ функция $\varepsilon(\boldsymbol{r}) > 1$ – непрерывна и может быть по непрерывности продолжена на границы Ω_i снаружи и на границу Ω изнутри, оставаясь при таких продолжениях больше 1. Магнитная проницаемость μ равна 1 в точках, внешних по отношению к Ω. В областях Ω_i и $\Omega \backslash \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \overline{\Omega}_i \right)$ функция $\mu(\boldsymbol{r}) > 1$ непрерывна и может быть по непрерывности продолжена на границы Ω_i изнутри и снаружи, а также на границу Ω изнутри, оставаясь при таких продолжениях больше 1.

После выключения стороннего тока электромагнитное поле в магнитодиэлектрике и внешней среде удовлетворяет однородной системе уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon(\boldsymbol{r})} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \dfrac{\sigma(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0 \varepsilon(\boldsymbol{r})} \boldsymbol{E}, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu_0 \mu(\boldsymbol{r})} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей соответственно; ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная постоянные; t – время.

В точках гладкости границ Ω и Ω_i выполняются условия непрерывности касательных компонент напряженностей:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{\tau,\mathrm{int}} = \boldsymbol{E}_{\tau,\mathrm{ext}}, \\ \boldsymbol{H}_{\tau,\mathrm{int}} = \boldsymbol{H}_{\tau,\mathrm{ext}}, \end{cases} \tag{2}$$

где τ – обозначение касательной составляющей вектора; int – обозначение предела изнутри области; ext – обозначение предела снаружи области.

Электромагнитное поле в момент выключения стороннего тока $t = 0$ определяет начальные условия задачи:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, 0) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}), \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, 0) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}). \end{cases} \tag{3}$$

Необходимо определить функциональный класс, в котором будет поставлена начально-краевая задача (1) – (3). Пусть $\mathbf{L}_{\mathrm{loc}}$ – множество векторных полей, локально суммируемых в $\mathbf{R}^3$; $\mathbf{D}$ – множество финитных, бесконечно дифференцируемых векторных полей; элемент объема $dx\,dy\,dz$ в трехмерном интеграле будем обозначать кратко dV.

Определение 1. *Поле* $\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}_{\mathrm{loc}}$ *называется обобщенным ротором поля* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}_{\mathrm{loc}}$, *если для любого поля* $\boldsymbol{q} \in \mathbf{D}$ *выполняется равенство*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^3} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{rot}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})\,dV = \int\limits_{\mathbf{R}^3} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})\,dV .$$

Доказан ряд свойств обобщенного ротора [3, 6, 8]. Обобщенный ротор определен однозначно с точностью до замены компонент на эквивалентные функции. Если у компонент векторного поля есть частные обобщенные производные по Соболеву первого порядка, то обобщенный ротор можно вычислить по обычной для ротора формуле. Однако существование обобщенных производных по Соболеву не является необходимым условием существования обобщенного ротора: например, если у функции $\psi(\boldsymbol{r})$ есть обобщенные производные по Соболеву первого порядка, но нет обобщенных производных по Соболеву второго порядка, то у компонент $\mathrm{grad}\psi(\boldsymbol{r})$ нет обобщенных производных по Соболеву, но обобщенный $\mathrm{rotgrad}\psi(\boldsymbol{r})$ определен и равен нулевому вектору.

Пространство квадратично суммируемых в $\mathbf{R}^3$ векторных полей, имеющих квадратично суммируемые в $\mathbf{R}^3$ обобщенные роторы, обозначается как $\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)$. Этим пространством наиболее естественно воспользоваться при постановке задачи. Также для постановки задачи и исследования свойств решения потребуются определения непрерывности и дифференцируемости функций одной переменной со значениями в произвольном банаховом пространстве.

Определение 2. *Функция* $\boldsymbol{w}(t)$ *со значениями в банаховом пространстве* $\mathbf{B}$ *называется непрерывной при* $t = a$ *по норме* $\mathbf{B}$, *если* $\lim\limits_{t \to a} \left\| \boldsymbol{w}(t) - \boldsymbol{w}(a) \right\| = 0$.

Определение 3. *Функция* $\boldsymbol{w}(t)$ *со значениями в банаховом пространстве* $\mathbf{B}$ *называется дифференцируемой при* $t = a$ *по норме* $\mathbf{B}$, *если существует такой элемент пространства* $\boldsymbol{w}'(a) \in \mathbf{B}$, *что* $\lim\limits_{t \to a} \left\| \dfrac{\boldsymbol{w}(t) - \boldsymbol{w}(a)}{t - a} - \boldsymbol{w}'(a) \right\| = 0$. *В этом случае* $\boldsymbol{w}'(a)$ *называется производной функции* $\boldsymbol{w}(t)$ *в точке* $t = a$.

Многие определения, касающиеся непрерывности и дифференцируемости обычных вещественнозначных функций одной переменной, переносятся на случай непрерывности и дифференцируемости по норме $\mathbf{B}$ [8, 9]. Непрерывность и дифференцируемость $\boldsymbol{w}(t)$ на интервале определяется соответственно как непрерывность и дифференцируемость в каждой точке интервала. Через односторонний предел в определениях 2 и 3 можно определить одностороннюю непрерывность и одностороннюю производную функции и, как следствие, – непрерывность и дифференцируемость функции $\boldsymbol{w}(t)$ на полуинтервале и отрезке. Из определения 3 индуктивным путем выводится понятие дифференцируемости и производной любого конечного порядка, следовательно, можно определить и бесконечно дифференцируемую функцию. Путем комбинированного использования определений 2 и 3 можно определить непрерывную дифференцируемость любого конечного порядка. Как и в случае вещественнозначных функций одной переменной, из дифференцируемости $\boldsymbol{w}(t)$ следует непрерывность $\boldsymbol{w}(t)$.

Будем предполагать, что в начальных условиях (3) $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{H}_0 \in \mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)$. Также предположим, что в начальный момент времени индукция магнитного поля $\mu \boldsymbol{H}_0$ удовлетворяет условию соленоидальности: $\mathrm{div}\left(\mu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\right) \equiv 0$ (производные в дивергенции, в общем случае, следует понимать как производные в классе обобщенных функций-распределений). Как и для ранее рассматривавшихся начально-краевых задач [5–7], можно доказать, что из соленоидальности индукции магнитного поля в начальный момент времени вытекает ее соленоидальность во все последующие моменты времени.

От решения задачи (1) – (3) потребуем, чтобы в любой момент времени $t > 0$ поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ как функции пространственных координат принадлежали $\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)$. Кроме того, потребуем, чтобы $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ были дифференцируемы по времени на полуинтервале $t \geq 0$ по норме $\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$ ($\mathbf{L_2}$ – обозначение пространства векторных полей, квадратично суммируемых на множестве, указанном в скобках после $\mathbf{L_2}$; норма любого поля $\boldsymbol{w} \in \mathbf{L_2}$, то есть, среднеквадратичная норма – $\|\boldsymbol{w}\|_2 = \sqrt{\int |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})|^2 \, dV}$, где интеграл берется по множеству, указанному в скобках после $\mathbf{L_2}$). Покажем, что решение в выбранном функциональном классе (то есть удовлетворяющее поставленным условиям) существует, определяется однозначно и зависит от начальных данных непрерывно по среднеквадратичной норме.

Существование и единственность решения

Исследование начально-краевой задачи (1) – (3) сопряжено с исследованием свойств линейного дифференциального оператора, определяющего правую часть системы (1). Этот дифференциальный оператор, который мы обозначим как $\hat{A}$, действует на упорядоченную пару векторных полей $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)\right)^2$ по следующей формуле:

$$\hat{A}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) = \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon(\boldsymbol{r})}\mathrm{rot}\boldsymbol{v} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{u}; -\frac{1}{\mu_0 \mu(\boldsymbol{r})}\mathrm{rot}\boldsymbol{u}\right). \quad (4)$$

Из определения обобщенного ротора, свойств кусочной непрерывности функций $\sigma(\boldsymbol{r})$, $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ и $\mu(\boldsymbol{r})$, а также из неравенств $\varepsilon(\boldsymbol{r}) > 1$ и $\mu(\boldsymbol{r}) > 1$ следует, что область значений $\hat{A}$ включается в $\left(\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)\right)^2$.

Обозначим через $\mathbf{H}'$ пространство векторных полей, непрерывно дифференцируемых и квадратично суммируемых в $\mathbf{R}^3$ вместе со своими роторами. Обозначим как $\mathbf{K}$ пространство векторных полей, обладающих следующими свойствами. Эти векторные поля непрерывно дифференцируемы в областях Ω_i, в области

$\Omega\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{k}\bar{\Omega}_i\right)$ и в области $\mathbf{R}^3\setminus\bar{\Omega}$, а также допускают непрерывные продолжения вместе со своими производными первого порядка на границы Ω_i и на границу Ω изнутри и снаружи областей. Кроме того, поля $\mathbf{K}$ удовлетворяют граничным условиям вида (2) на границах Ω_i и Ω, а также квадратично суммируемы вместе со своими роторами в $\mathbf{R}^3$. Ранее был доказан ряд свойств $\mathbf{H}\left(\mathrm{rot},\mathbf{R}^3\right)$, $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{K}$ [6, 8].

Теорема 1. $\mathbf{H}'\subset\mathbf{K}\subset\mathbf{H}\left(\mathrm{rot},\mathbf{R}^3\right)\subset\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$, *причем* $\mathbf{H}'$ *– плотное подпространство* $\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$.

Теорема 2. *Если последовательность* $\boldsymbol{u}_n\in\mathbf{H}\left(\mathrm{rot},\mathbf{R}^3\right)$ *сходится по норме* $\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$ *к* $\boldsymbol{u}\in\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$ *и при этом* $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_n$ *сходится по норме* $\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$ *к* $\boldsymbol{v}\in\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$, *то* $\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}\left(\mathrm{rot},\mathbf{R}^3\right)$ *и* $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$.

Теорема 3. *Для любого векторного поля* $\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}\left(\mathrm{rot},\mathbf{R}^3\right)$ *существует такая последовательность* $\boldsymbol{u}_n\in\boldsymbol{H}'$, *что* $\boldsymbol{u}_n$ *сходится к* $\boldsymbol{u}$ *и* $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_n$ *сходится к* $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ *по норме* $\boldsymbol{L_2}\left(\mathrm{R}^3\right)$.

Из теоремы 1 вытекает, что область определения оператора $\hat{A}$ – плотная в $\left(\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)\right)^2$. Обозначим как $\hat{A}'$ линейный оператор, действующий подобно оператору $\hat{A}$ по формуле (4), но на меньшем пространстве $\mathbf{K}^2$.

Теорема 4. *Оператор* $\hat{A}$ *является минимальным замкнутым расширением оператора* $\hat{A}'$.

Доказательство. Предположим, что последовательность $(\boldsymbol{u}_n;\boldsymbol{v}_n)\in\left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot},\mathbf{R}^3\right)\right)^2$ при $n\to+\infty$ сходится по среднеквадратичной норме к паре $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})$ и при этом $\hat{A}(\boldsymbol{u}_n;\boldsymbol{v}_n)=(\boldsymbol{f}_n;\boldsymbol{g}_n)$ сходится к некоторой паре $(\boldsymbol{f};\boldsymbol{g})$. Тогда, в силу кусочной непрерывности и ограниченности $\sigma(\boldsymbol{r})$, $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ и $\mu(\boldsymbol{r})$, последовательность $(\mathrm{rot}\boldsymbol{u}_n;\mathrm{rot}\boldsymbol{v}_n)=(-\mu_0\mu\boldsymbol{g}_n;\varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{f}_n+\sigma\boldsymbol{u}_n)$ сходится по среднеквадратичной норме к $(-\mu_0\mu\boldsymbol{g};\varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{f}+\sigma\boldsymbol{u})$. Следовательно, по теореме 2, $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\in\left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot},\mathbf{R}^3\right)\right)^2$ (то есть, $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})$ входит в область определения $\hat{A}$), причем $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=-\mu_0\mu\boldsymbol{g}$ и $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{f}+\sigma\boldsymbol{u}$. Кроме того,

$$\hat{A}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})=\left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathrm{rot}\boldsymbol{v}-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\boldsymbol{u};-\frac{1}{\mu_0\mu}\mathrm{rot}\boldsymbol{u}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}(\varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{f}+\sigma\boldsymbol{u})-\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\boldsymbol{u};-\frac{1}{\mu_0\mu}(-\mu_0\mu\boldsymbol{g})\right)=(\boldsymbol{f};\boldsymbol{g}).$$

Следовательно, $\hat{A}$ замкнут.

В силу теорем 1 и 3, для любой пары $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) \in \left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)\right)^2$ существует такая последовательность $(\boldsymbol{u}_n;\boldsymbol{v}_n) \in \mathbf{K}^2$, что $(\boldsymbol{u}_n;\boldsymbol{v}_n)$ сходится по среднеквадратичной норме к $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})$ и при этом последовательность $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_n; \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}_n)$ сходится по среднеквадратичной норме к $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}; \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})$. Тогда последовательность $\hat{A}'(\boldsymbol{u}_n;\boldsymbol{v}_n) = \left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathrm{rot}\boldsymbol{v}_n - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\boldsymbol{u}_n; -\frac{1}{\mu_0\mu}\mathrm{rot}\boldsymbol{u}_n\right)$, в силу кусочной непрерывности и ограниченности $\sigma(\boldsymbol{r})$, $1/\varepsilon(\boldsymbol{r})$ и $1/\mu(\boldsymbol{r})$, сходится к $\left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\boldsymbol{u}; -\frac{1}{\mu_0\mu}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}\right)$, то есть к $\hat{A}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})$. Следовательно, $\hat{A}'$ для замкнутости следует доопределить, как минимум, до оператора $\hat{A}$. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 4 обосновывают выбор функционального пространства для задачи (1) – (3): в определении пространства $\mathbf{K}$ учтены граничные условия (2), а теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве доказаны исключительно для замкнутых операторов [9, 10].

Теорема 5. *Для любой упорядоченной пары* $(\boldsymbol{f};\boldsymbol{g}) \in \left(\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)\right)^2$ *и для любого* $p > 0$ *уравнение* $\hat{A}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) - p(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f};\boldsymbol{g})$ *имеет в пространстве* $\left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)\right)^2$ *единственное решение, причем это решение удовлетворяет неравенству*

$$\sqrt{\varepsilon_0 \left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2 + \mu_0 \left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2} \le \frac{1}{p}\cdot\sqrt{\varepsilon_0 \left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{f}\right\|_2^2 + \mu_0 \left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{g}\right\|_2^2}\,. \tag{5}$$

Доказательство. Рассматриваемое уравнение с параметром $p > 0$ в подробной покомпонентной форме имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_0\varepsilon(\boldsymbol{r})}\mathrm{rot}\boldsymbol{v} - \dfrac{\sigma(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0\varepsilon(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{u} - p\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}), \\ -\dfrac{1}{\mu_0\mu(\boldsymbol{r})}\mathrm{rot}\boldsymbol{u} - p\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}). \end{cases} \tag{6}$$

Умножим первое уравнение системы (6) на $\varepsilon_0\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{u}$, второе уравнение на $\mu_0\mu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}$, затем уравнения сложим и проинтегрируем сумму по $\mathbf{R}^3$:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^3} \left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\mathrm{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\mathrm{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\right)dV - \varepsilon_0 p\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2 - \mu_0 p\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2 - \sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\Omega_i}\sigma(\boldsymbol{r})\left|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\right|^2 dV =$$

$$= \varepsilon_0 \int\limits_{\mathbf{R}^3} \varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})dV + \mu_0 \int\limits_{\mathbf{R}^3} \mu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})dV\,. \tag{7}$$

Для $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) \in \left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot}, \mathbf{R}^3\right)\right)^2$ $\int\limits_{\mathbf{R}^3}\left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\mathrm{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\mathrm{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\right)dV = 0$ [5, 7]. Тогда, в силу неположительности левой части (7), а также в силу неравенства Коши – Буняковского для сумм и интегралов

$$\varepsilon_0 p\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2+\mu_0 p\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2+\sum_{i=1}^{k}\int_{\Omega_i}\sigma(\boldsymbol{r})\left|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\right|^2 dV=$$

$$=\left|\varepsilon_0\int_{\mathbf{R}^3}\varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})dV+\mu_0\int_{\mathbf{R}^3}\mu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})dV\right|\le$$

$$\le\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{f}\right\|_2+\mu_0\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{g}\right\|_2=$$

$$=\sqrt{\varepsilon_0}\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2\cdot\sqrt{\varepsilon_0}\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{f}\right\|_2+\sqrt{\mu_0}\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2\cdot\sqrt{\mu_0}\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{g}\right\|_2\le$$

$$\le\sqrt{\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2+\mu_0\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2}\cdot\sqrt{\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{f}\right\|_2^2+\mu_0\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{g}\right\|_2^2}.$$

Следовательно, в силу положительности $\sigma(\boldsymbol{r})$,

$$\varepsilon_0 p\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2+\mu_0 p\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2\le\sqrt{\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2+\mu_0\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2}\cdot\sqrt{\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{f}\right\|_2^2+\mu_0\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{g}\right\|_2^2}. \quad (8)$$

Тогда неравенство (5) вытекает из неравенства (8) делением на $p\sqrt{\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2+\mu_0\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2}$. Таким образом, доказано выполнение неравенства (5) для любого решения $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\in\left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot},\mathbf{R}^3\right)\right)^2$ системы (6). Заметим, что из неравенства (5) вытекает единственность решения системы (6): при $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})\equiv\mathbf{0}$ и $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})\equiv\mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ – обозначение нулевого вектора) из неравенства (5) следует, что поля $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ могут быть только нулевыми; а существование не более, чем тривиального, решения однородной системы означает единственность решения системы (6) при любой правой части.

Теперь докажем существование решения системы (6) в пространстве $\left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot},\mathbf{R}^3\right)\right)^2$. Для этого воспользуемся следующей системой интегродифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=-\mu_0\mathrm{rot}\left(\int\limits_{\mathbf{R}^3}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mu(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}')dV'+p\int\limits_{\Omega}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')(\mu(\boldsymbol{r}')-1)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')dV'\right)+\\+\dfrac{\mathrm{graddiv}-p^2\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon_0 p}\varepsilon_0\left(\int\limits_{\mathbf{R}^3}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\varepsilon(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}')dV'+\right.\\\left.+\int\limits_{\Omega}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')(\sigma(\boldsymbol{r}')+p\varepsilon_0(\varepsilon(\boldsymbol{r}')-1))\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}')dV'\right),\\\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})=\mathrm{rot}\left(\varepsilon_0\int\limits_{\mathbf{R}^3}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\varepsilon(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}')dV'+\int\limits_{\Omega}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')(\sigma(\boldsymbol{r}')+p\varepsilon_0(\varepsilon(\boldsymbol{r}')-1))\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}')dV'\right)+\\+\dfrac{\mathrm{graddiv}-p^2\varepsilon_0\mu_0}{p}\int\limits_{\mathbf{R}^3}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mu(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}')dV'+\\+\left(\mathrm{graddiv}-p^2\varepsilon_0\mu_0\right)\int\limits_{\Omega}G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')(\mu(\boldsymbol{r})-1)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}')dV',\end{cases} \quad (9)$$

где $G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\exp\left(-p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|\right)/4\pi\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|$.

Для исследования системы (9) оказываются полезными свойства объемного потенциала $\hat{P}[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\Xi} G(p,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}')dV'$ (в качестве Ξ можно принять любую область; $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}_2(\Xi)$). $\hat{P}[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{r})$ непрерывен и квадратично суммируем во всем пространстве $\mathbf{R}^3$, имеет квадратично суммируемые в $\mathbf{R}^3$ обобщенные производные по Соболеву первого и второго порядка, а также удовлетворяет уравнению Гельмгольца (неоднородному – в области Ξ; однородному – снаружи Ξ) [1]:

$$\left(\mu_0\varepsilon_0 p^2 - \Delta\right)\hat{P}[\boldsymbol{w}] = \begin{cases} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in \Omega, \\ \mathbf{0},\ \boldsymbol{r} \in \mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{10}$$

где равенство следует понимать как эквивалентность функций.

Из указанных свойств объемного потенциала следует, в частности, что все интегродифференциальные операции в (9) с $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})$ определены в $\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)$.

Заметим, что систему (9) достаточно решить в области Ω: снаружи Ω поля $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ получаются непосредственным интегрированием по области Ω. Для решения системы (9) в области Ω произведем следующую подстановку:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \dfrac{p\sqrt{\varepsilon_0}\boldsymbol{U}}{\sigma(\boldsymbol{r}) + p\varepsilon_0(\varepsilon(\boldsymbol{r})-1)}, \\ \boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{V}}{\sqrt{\mu_0}(\mu(\boldsymbol{r})-1)}. \end{cases} \tag{11}$$

Заметим, что в областях Ω_i $\boldsymbol{u} = p\sqrt{\varepsilon_0}\boldsymbol{U}/\sigma(\boldsymbol{r})$. В силу оговоренных при постановке задачи свойств функции $\sigma(\boldsymbol{r})$ функция $1/\sigma(\boldsymbol{r})$ положительна и непрерывна в каждой области Ω_i, причем допускает непрерывные продолжения на границы Ω_i изнутри, оставаясь при таких продолжениях положительной. В области $\Omega\setminus\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}\bar{\Omega}_i\right)$ $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}/\sqrt{\varepsilon_0}(\varepsilon(\boldsymbol{r})-1)$. В силу свойств функции $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ функция $1/\sqrt{\varepsilon_0}(\varepsilon(\boldsymbol{r})-1)$ положительна и непрерывна в области $\Omega\setminus\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}\bar{\Omega}_i\right)$, причем допускает непрерывные продолжения на границы Ω_i снаружи и на границу Ω изнутри, оставаясь при таких продолжениях положительной. То есть функция $p\sqrt{\varepsilon_0}/(\sigma(\boldsymbol{r}) + p\varepsilon_0(\varepsilon(\boldsymbol{r})-1))$ непрерывна и положительна в Ω_i, в $\Omega\setminus\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}\bar{\Omega}_i\right)$ и допускает непрерывные продолжения на границы Ω_i изнутри и снаружи, а также на границу Ω изнутри, оставаясь при таких продолжениях положительной. В силу свойств $\mu(\boldsymbol{r})$, аналогичными свойствами положительности и кусочной непрерывности обладает функция $1/\sqrt{\mu_0}(\mu(\boldsymbol{r})-1)$. Следовательно, замена (11) $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})$ на $(\boldsymbol{U};\boldsymbol{V})$ является взаимно-однозначным отображением $(\mathbf{L_2}(\Omega))^2$ на $(\mathbf{L_2}(\Omega))^2$.

Определим операторы $\hat{B}$ и $\hat{C}$ следующим образом: $\hat{B}[\boldsymbol{w}] = \mathrm{rot}\hat{P}[\boldsymbol{w}]$, $\hat{C}[\boldsymbol{w}] = \left(p^2\varepsilon_0\mu_0 - \mathrm{graddiv}\right)\hat{P}[\boldsymbol{w}]$, где $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Также примем обозначения

$\boldsymbol{U}_0 = -\mu_0 \hat{B}[\mu \boldsymbol{g}] - \frac{1}{p}\hat{C}[\varepsilon \boldsymbol{f}]$, $\boldsymbol{V}_0 = \varepsilon_0 \hat{B}[\varepsilon \boldsymbol{f}] - \frac{1}{p}\hat{C}[\mu \boldsymbol{g}]$. С учетом введенных обозначений после подстановки (11), умножения первого уравнения на $\sqrt{\varepsilon_0}$ и второго уравнения на $\sqrt{\mu_0}$ система (9) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{p\varepsilon_0}{\sigma(\boldsymbol{r}) + p\varepsilon_0(\varepsilon(\boldsymbol{r})-1)}\boldsymbol{U} + p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\hat{B}[\boldsymbol{V}] + \hat{C}[\boldsymbol{U}] = \sqrt{\varepsilon_0}\boldsymbol{U}_0, \\ \dfrac{1}{(\mu(\boldsymbol{r})-1)}\boldsymbol{V} - p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\hat{B}[\boldsymbol{U}] + \hat{C}[\boldsymbol{V}] = \sqrt{\mu_0}\boldsymbol{V}_0. \end{cases} \tag{12}$$

Левую часть системы (12) можно представить как действие некоторого оператора $\hat{T}$ на упорядоченную пару векторных полей $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{U};\boldsymbol{V})$: левая часть первого уравнения является первой компонентой $\hat{T}\boldsymbol{W}$, левая часть второго уравнения – соответственно второй компонентой $\hat{T}\boldsymbol{W}$. Рассмотрим скалярное произведение $\left(\hat{T}\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}\right)$ в пространстве $(\boldsymbol{L}_2(\Omega))^2$, индуцированное обычным способом из $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$, то есть путем покомпонентного скалярного умножения пар векторных полей. При этом для каждой компоненты скалярное произведение определим, как обычно в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$: оно будет равно интегралу от произведения умножаемых функций. Чтобы отличать обозначения скалярного произведения и упорядоченной пары, в скалярном произведении сомножители будем разделять запятой, а не точкой с запятой:

$$\left(\hat{T}\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}\right) = \left(\frac{p\varepsilon_0}{\sigma + p\varepsilon_0(\varepsilon-1)}\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\right) + p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\left(\hat{B}[\boldsymbol{V}],\boldsymbol{U}\right) + \left(\hat{C}[\boldsymbol{U}],\boldsymbol{U}\right) +$$
$$+\left(\frac{1}{\mu-1}\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}\right) - p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\left(\hat{B}[\boldsymbol{U}],\boldsymbol{V}\right) + \left(\hat{C}[\boldsymbol{V}],\boldsymbol{V}\right). \tag{13}$$

Для вещественных значений p и вещественных векторных полей $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ оператор $\hat{B}$ симметричен: $\left(\hat{B}[\boldsymbol{V}],\boldsymbol{U}\right) = \left(\hat{B}[\boldsymbol{U}],\boldsymbol{V}\right)$ [1, 7]. Оператор $\hat{C}$ диссипативен: $\left(\hat{C}[\boldsymbol{U}];\boldsymbol{U}\right) \geq 0$, $\left(\hat{C}[\boldsymbol{V}];\boldsymbol{V}\right) \geq 0$ [1]. Следовательно, в выражении (13) слагаемые с оператором $\hat{B}$ взаимно уничтожаются, и скалярное произведение $\left(\hat{T}\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}\right)$ допускает следующую оценку снизу:

$$\left(\hat{T}\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}\right) = \left(\frac{p\varepsilon_0}{\sigma + p\varepsilon_0(\varepsilon-1)}\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\right) + \left(\hat{C}[\boldsymbol{U}],\boldsymbol{U}\right) + \left(\frac{1}{\mu-1}\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}\right) + \left(\hat{C}[\boldsymbol{V}],\boldsymbol{V}\right) \geq$$
$$\geq \left(\frac{p\varepsilon_0}{\sigma + p\varepsilon_0(\varepsilon-1)}\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\right) + \left(\frac{1}{\mu-1}\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}\right) \geq$$
$$\geq \min\left\{\frac{p\varepsilon_0}{\sigma_{\sup}},\frac{1}{\varepsilon_{\sup}-1}\right\}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) + \frac{1}{\mu_{\sup}-1}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}) \geq$$
$$\geq \min\left\{\frac{p\varepsilon_0}{\sigma_{\sup}},\frac{1}{\varepsilon_{\sup}-1},\frac{1}{\mu_{\sup}-1}\right\}((\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) + (\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})) =$$
$$= \min\left\{\frac{p\varepsilon_0}{\sigma_{\sup}},\frac{1}{\varepsilon_{\sup}-1},\frac{1}{\mu_{\sup}-1}\right\}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}), \tag{14}$$

где $\sigma_{\sup}$ – точная верхняя грань $\sigma(\boldsymbol{r})$ в объединении областей $\bigcup_{i=1}^{k}\Omega_i$; $\varepsilon_{\sup}$ – точная верхняя грань $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ в области $\Omega\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{k}\overline{\Omega}_i\right)$, $\mu_{\sup}$ – точная верхняя грань $\mu(\boldsymbol{r})$ на множестве точек $\Omega\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{k}\mathrm{Fr}(\Omega_i)\right)$, где Fr – обозначение границы множества. Точные верхние грани $\sigma(\boldsymbol{r})$, $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ и $\mu(\boldsymbol{r})$ на указанных множествах, очевидно, являются максимальными значениями этих функций с учетом их возможных непрерывных продолжений на границы множеств.

В силу оценочного неравенства (14), система уравнений (12) имеет единственное решение в пространстве $(\mathbf{L_2}(\Omega))^2$ [1]. Следовательно, система уравнений (9) имеет единственное решение $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\in(\mathbf{L_2}(\Omega))^2$. Тогда, в силу свойств оператора $\hat{P}$, у системы уравнений (9) существует решение в пространстве $\left(\mathbf{L_2}\left(\mathbf{R}^3\right)\right)^2$ (получающееся из решения в $(\mathbf{L_2}(\Omega))^2$ прямым интегрированием).

Кроме того, в силу свойств оператора $\hat{P}$ и свойств обобщенного ротора, к правым частям системы (9) можно применить операцию rot в обобщенном смысле определения 1: несмотря на то, что у объемного потенциала гарантировано существование только первых и вторых обобщенных производных по Соболеву, а операция $\mathrm{rotgraddiv}$ является дифференциальной операцией третьего порядка, все слагаемые с $\mathrm{rotgraddiv}$ тем не менее определены и равны нулевому вектору. Также, в силу свойств оператора $\hat{P}$, обобщенные роторы от правых частей системы (9) квадратично суммируемы в $\mathbf{R}^3$; то есть решение системы (9) $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})\in\left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot},\mathbf{R}^3\right)\right)^2$.

Найдем результат применения операции rot к первому уравнению системы (9), воспользовавшись соотношением (10) и вторым уравнением (9):

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\boldsymbol{u}&=-\mu_0\mathrm{rotrot}\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]-\mu_0 p\mathrm{rotrot}\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]-p\varepsilon_0\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[\varepsilon\boldsymbol{f}]-p\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}]=\\
&=-\mu_0\mathrm{graddiv}\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]+\mu_0\Delta\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]-\mu_0 p\mathrm{graddiv}\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]+\mu_0 p\Delta\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]-\\
&-p\varepsilon_0\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[\varepsilon\boldsymbol{f}]-p\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}]=-\mu_0\mathrm{graddiv}\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]+\mu_0^2\varepsilon_0 p^2\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]-\\
&-\mu_0\mu\boldsymbol{g}-\mu_0 p\mathrm{graddiv}\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]+\mu_0^2\varepsilon_0 p^3\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]-\mu_0 p(\mu-1)\boldsymbol{v}-p\varepsilon_0\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[\varepsilon\boldsymbol{f}]-\\
&-p\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}]=-p\mu_0\left(\frac{\mathrm{graddiv}-p^2\varepsilon_0\mu_0}{p}\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]+\right.\\
&\left.+\left(\mathrm{graddiv}-p^2\varepsilon_0\mu_0\right)\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]+\mathrm{rot}\left(\varepsilon_0\hat{P}[\varepsilon\boldsymbol{f}]+\hat{P}[(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}]\right)\right)-\\
&-\mu_0\mu\boldsymbol{g}-\mu_0 p(\mu-1)\boldsymbol{v}=-p\mu_0\boldsymbol{v}-\mu_0\mu\boldsymbol{g}-p\mu_0\mu\boldsymbol{v}+p\mu_0\boldsymbol{v}=-\mu_0\mu\boldsymbol{g}-p\mu_0\mu\boldsymbol{v}.
\end{aligned}$$

Следовательно, решение системы (9) удовлетворяет второму уравнению системы (6). Теперь, воспользовавшись (10) и первым уравнением (9), найдем результат применения операции rot ко второму уравнению системы (9):

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\varepsilon_0\mathrm{rotrot}\hat{P}[\varepsilon\boldsymbol{f}]+\mathrm{rotrot}\hat{P}[(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}]-p\varepsilon_0\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]-p^2\varepsilon_0\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]=$$
$$=\varepsilon_0\mathrm{graddiv}\hat{P}[\varepsilon\boldsymbol{f}]-\varepsilon_0\Delta\hat{P}[\varepsilon\boldsymbol{f}]+\mathrm{graddiv}\hat{P}[(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}]-\Delta\hat{P}[(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}]-$$
$$-p\varepsilon_0\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]-p^2\varepsilon_0\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]=\varepsilon_0\mathrm{graddiv}\hat{P}[\varepsilon\boldsymbol{f}]-\mu_0\varepsilon_0^2p^2\hat{P}[\varepsilon\boldsymbol{f}]+\varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{f}+$$
$$+\mathrm{graddiv}\hat{P}[(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}]-\mu_0\varepsilon_0p^2\hat{P}[(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}]+(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}-$$
$$=p\varepsilon_0\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]-p^2\varepsilon_0\mu_0\mathrm{rot}\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]=p\varepsilon_0\left(\frac{\mathrm{graddiv}-p^2\varepsilon_0\mu_0}{p}\hat{P}[\varepsilon\boldsymbol{f}]+\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{graddiv}-p^2\varepsilon_0\mu_0}{p\varepsilon_0}\hat{P}[(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}]-\mu_0\,\mathrm{rot}\left(\hat{P}[\mu\boldsymbol{g}]+p\hat{P}[(\mu-1)\boldsymbol{v}]\right)\right)+$$
$$+\varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{f}+(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\boldsymbol{u}=p\varepsilon_0\boldsymbol{u}+\varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{f}+\sigma\boldsymbol{u}+p\varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{u}-p\varepsilon_0\boldsymbol{u}=\varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{f}+\sigma\boldsymbol{u}+p\varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{u}.$$

То есть решение системы (9) удовлетворяет первому уравнению системы (6). Следовательно, решение системы (9) является решением системы (6), что означает существование решения у системы (6) в пространстве $\left(\mathbf{H}\left(\mathrm{rot},\mathbf{R}^3\right)\right)^2$ при любом $p>0$ и любых правых частях $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^3)$. Теорема доказана.

Обозначим как $\hat{I}$ тождественный оператор. Из доказанной теоремы непосредственно следует, что $\left(\hat{A}-p\hat{I}\right)^{-1}$ определен на всем пространстве $(\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^3))^2$.

Заметим, что, в силу неравенств $1<\varepsilon\le\varepsilon_{\sup}$ и $1<\mu\le\mu_{\sup}$, для норм справедливы следующие оценки:

$$\|\boldsymbol{u}\|_2\le\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2\le\sqrt{\varepsilon_{\sup}}\,\|\boldsymbol{u}\|_2\ ,$$
$$\|\boldsymbol{v}\|_2\le\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2\le\sqrt{\mu_{\sup}}\,\|\boldsymbol{v}\|_2\ .$$

То есть выражения $\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2$ и $\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2$ определяют нормы, эквивалентные обычной среднеквадратичной норме в пространстве $\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^3)$. Следовательно, выражение $\sqrt{\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{u}\right\|_2^2+\mu_0\left\|\sqrt{\mu}\boldsymbol{v}\right\|_2^2}$ определяет одну из эквивалентных среднеквадратичных норм пары $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v})$ в пространстве $(\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^3))^2$. И относительно этой нормы, в силу неравенства (5), $\left\|\left(\hat{A}-p\cdot\hat{I}\right)^{-1}\right\|\le 1/p$.

Таким образом, доказаны следующие свойства оператора $\hat{A}$: оператор $\hat{A}$ замкнут и имеет плотную в $(\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^3))^2$ область определения; для любого $p>0$ оператор $\left(\hat{A}-p\hat{I}\right)^{-1}$ определен на всем пространстве $(\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^3))^2$, и относительно одной из эквивалентных среднеквадратичных норм значение $\left\|\left(\hat{A}-p\hat{I}\right)^{-1}\right\|$ ограничено сверху величиной $1/p$. Следовательно, по теореме Хилле – Иосиды [9, 10], начально-краевая задача (1) – (3) в рассматриваемой постановке имеет единственное решение, зависящее от начальных данных непрерывно по норме $(\mathbf{L_2}(\mathbf{R}^3))^2$.

Заключение

Полученные результаты, касающиеся существования и единственности решения начально-краевой задачи для однородной системы уравнений Максвелла, допускают известное обобщение и на неоднородную систему уравнений электродинамики [7, 8, 10]. При всех доказанных свойствах оператора $\hat{A}$ начально-краевая задача для неоднородной системы уравнений Максвелла имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных условий, если, в частности, плотность стороннего тока в начальный момент времени как функция пространственных координат входит в область определения оператора $\hat{A}$ (например, является тождественно-нулевой векторной функцией) и, кроме того, представляет собой дважды непрерывно дифференцируемую функцию времени на полуинтервале $t \geq 0$. Заметим, что математические модели не скачкообразного, а непрерывного включения стороннего тока этим условиям, как правило, удовлетворяют.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дякин В.В., Сандовский В.А.* Задачи электродинамики в неразрушающем контроле. Екатеринбург: Институт физики металлов, 2008. 390 с.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
3. *Калинин А.В.* Математические задачи физической диагностики. Корректность задач электромагнитной теории в стационарном и квазистационарном приближении. Нижний Новгород: ННГУ, 2007. 121 с.
4. *Дякин В.В., Марвин С.В.* Начально-краевая задача и интегродифференциальные уравнения электродинамики для неоднородного проводящего тела // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 2. С. 288–296.
5. *Марвин С.В., Дякин В.В.* Нестационарная краевая задача электродинамики для немагнитного проводящего образца // Электричество. 2008. № 12. С. 30–36.
6. *Марвин С.В.* Существование и единственность решения начально-краевой задачи для однородной системы уравнений Максвелла в случае неферромагнитного дефектного металлического тела // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2016. № 1. С. 105–117.
7. *Марвин С.В.* Начально-краевая задача электромагнитного контроля дефектного ферромагнитного проводника остаточным полем мгновенно выключенного стороннего тока // Дефектоскопия. 2016. № 11. С. 27–38.
8. *Марвин С.В.* Начально-краевая задача структуроскопии неферромагнитного металлического тела с инородными диэлектрическими включениями остаточным полем мгновенно выключенного стороннего тока // Дефектоскопия. 2016. № 2. С. 42–54.
9. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. 394 с.
10. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

Статья поступила 07.04.2017 г.

Marvin S.V. (2017) AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE UNIFORM SYSTEM OF MAXWELL'S EQUATIONS IN THE CASE OF A MAGNETODIELECTRIC BODY WITH CONDUCTIVE FERROMAGNETIC INCLUSIONS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics* (47) pp. 22–36

DOI 10.17223/19988621/47/3

The uniform system of electrodynamics equations solved for strength derivatives with respect to time is considered as applied to the case of a heterogeneous magnetodielectric with foreign metallic ferromagnetic inclusions. It is assumed that the magnetodielectric and ferromagnetic inclusions have a piecewise smooth boundaries, and the closed domains occupied by the ferromagnetics do not intersect and are included in the domain occupied by the magnetodielectric. The electromagnetic characteristics of individual media satisfy the natural requirements of continuity. Under these assumptions, the differential operator $\hat{A}$ defining the right part of the system of Maxwell's equations, is explored. For the operator $\hat{A}$ we selected the most natural definition domain: the space of ordered pairs of vector fields square summable together with their generalized curls. It is shown that such a choice of the definition domain of operator $\hat{A}$ takes into account the boundary conditions of continuity of tangent components of the intensities. It is proved that the operator $\hat{A}$ is closed and has an important spectral property: operator $\left(\hat{A}-p\hat{I}\right)^{-1}$ ($\hat{I}$ is the identity operator) is defined on the space of ordered pairs of square summable vector fields and his norm is smaller or equal to $1/p$. Based on the Hille–Yosida theorem, we conclude that the studied initial-boundary value problem has a unique solution if differentiability with respect to time is meant as differentiability with respect to the mean-square norm.

Keywords: initial-boundary value problem, Maxwell's equations, integro-differential equations, closed operator, Hille–Yosida theorem

MARVIN Sergey Vladimirovich (Candidate of physics and mathematics, doctoral student; associate professor of department of information technologies and automation; Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin; Yekaterinburg, Russian Federation)

E-mail: s.v.marvin@yandex.ru

REFERENCES

1. Dyakin V.V., Sandovskiy V.A. (2008) *Zadachi elektrodinamiki v nerazrushaiuschem kontrole* [Electrodynamics problems in nondestructive testing]. Yekaterinburg: Institute of Metal Physics.
2. Duvaut R., Lions J.-L. (1976) *Inequalities in mechanics and physics.* New York: Springer-Verlag.
3. Kalinin A.V. (2007) *Matematicheskie zadachi fizicheskoy diagnostiki. Korrektnost' zadach v statzionarnom i kvazistatzionarnom priblizhenii* [Mathematical problems of physical diagnostics. Correctness of problems of the electromagnetic theory in the stationary and quasi-stationary approximation]. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University.
4. Dyakin V.V., Marvin S.V. (2008) Initial-boundary value problem and integrodifferincial equations electrodynamics for an inhomogeneous conductive body. *Computational mathematics and mathematical physics*, 48 (2). pp. 275–283. DOI: 10.1134/S0965542508020103.
5. Marvin S.V., Dyakin V.V (2008) Nestatsionarnaya kraevaya zadacha electrodinamiki dlya nemagnitnogo provodyaschego obraztsa [Initial-boundary value problem for a nonmagnetic conductive body]. *Elektrichestvo – Electricity*, 12. pp. 30–36.
6. Marvin S.V. (2016) Suschestovanie i edinstvennost' resheniya nachal'no-kraevoy zadachi dlya odnorodnoy sistemy uravneniy Maksvella v sluchae neferromagnitnogo defektnogo metallicheskogo tela [Existence and uniqueness of the solution of initial-boundary problem for

the uniform system of Maxwell's equations in the case of a nonferromagnetic defective metallic body]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 1. pp. 105–117.

7. Marvin S.V. (2016) Initial-boundary value problem of electromagnetic testing of a flawed ferromagnetic conductor by the residual field of an instantaneously cut-off current. *Russian journal of nondestructive testing*, 52 (11). pp. 638–646. DOI: 10.1134/S106183091611005X.
8. Marvin S.V. (2016) An initial-boundary value problem of structurescopy of a nonferromagnetic metal solid with foreign dielectric inclusions using the residual field of an instantaneously cut-off extraneous current. *Russian journal of nondestructive testing*, 52 (2). pp. 85–94. DOI: 10.1134/S1061830916020054.
9. Reed M., Simon B. (1975) *Methods of Modern Mathematical Physics. 2. Fourier Analysis, Self-Adjointness*. New York; London: Academic press.
10. Kreyn S.G. (1967) *Lineinye differentsial'nie uravneniya v banahovom prostranstve* [Linear differential equations in the Banach space]. Moscow: Nauka.