ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 512.53

СЛУЧАЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ НАД СВОБОДНЫМИ ПОЛУРЕШЁТКАМИ

М. А. Вахрамеев

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Омск, Россия

Исследуются уравнения от одной переменной над свободными полурешётками. Установлено, что среднее число решений уравнения над свободной полурешёткой ранга n равно $\dfrac{3^n + 2 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^n}$. Доказано, что среднее число неприводимых компонент алгебраических множеств, определяемых уравнениями над свободной полурешёткой счётного ранга, равно 1.

Ключевые слова: *свободная полурешётка, уравнение, неприводимые компоненты.*

DOI 10.17223/20710410/36/1

RANDOM EQUATIONS OVER FREE SEMILATTICES

M. A. Vakhrameev

Sobolev Institute of Mathematics, Omsk, Russia

E-mail: vahrmih@yandex.ru

In the paper, we study equations in one variable over free semilattices. We show that the average number of solutions of a random equation over a free semilattice of a rank n is equal to $\dfrac{3^n + 2 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^n}$. It is proved that the average number of irreducible components of algebraic sets defined by equations over a free semilattice of a countable rank is equal to 1.

Keywords: *free semilattice, equation, irreducible components.*

Введение

В современной математике генерация и изучение свойств случайных алгебраических объектов является одним из важных и интересных направлений. Порождение случайных групповых уравнений рассматривалось в работах [1, 2], относительно разрешимости случайных уравнений в группах см. также [3]. С помощью работ [4, 5] понятие уравнения можно определить для произвольной алгебраической системы функционального языка. Таким образом, можно рассматривать и изучать характеристики уравнений над многими классами алгебраических систем, в частности над полурешётками [6].

В данной работе исследуются вероятностные характеристики множества решений уравнений над свободными полурешётками. Вычисляется среднее число решений случайно сгенерированного уравнения (теорема 3), а также среднее число неприводимых компонент алгебраического множества, определённого уравнением над свободной полурешёткой (теорема 4). Каждая теорема иллюстрируется примером для свободной полурешётки ранга 2.

1. Основные определения

Полурешёткой называется полугруппа, удовлетворяющая тождествам $xy = yx$ (коммутативности) и $xx = x$ (идемпотентности). В работе рассматривается свободная полурешётка F_n ранга n с множеством свободных порождающих $a_1, \ldots, a_n$ и с присоединённой единицей ε ($\forall x \in F_n$ $(x\varepsilon = \varepsilon x = x)$).

Произвольный неединичный элемент a из F_n допускает единственное представление в виде произведения $a = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $k \leqslant n$. Число k будем называть *длиной* элемента a и обозначать $|a|$. Длину элемента ε полагаем равной 0.

Пусть $X = \{x_1, \ \ldots, \ x_m\}$ — множество переменных; F_n-термом $\tau(X)$ будем называть одно из следующих выражений: $w(X)c$, $w(X)$, c, где $w(X)$ — произведение переменных $x_i \in X$; c — элемент полурешётки F_n. *Уравнением* над F_n называется равенство двух F_n-термов: $s(X) = t(X)$, хотя бы один из которых содержит переменные. Элементы полурешётки F_n, входящие в запись уравнения, будем называть *константами.*

Решением уравнения $s(X) = t(X)$ называется набор значений переменных x_i, подстановка которых в уравнение $s(X) = t(X)$ обращает его в верное равенство. Уравнение, имеющее хотя бы одно решение, называется *совместным.* Уравнение, не имеющее решений, называется *несовместным.* Множество всех решений уравнения $s(X) = t(X)$ будем обозначать $V_{F_n}(s(X) = t(X))$.

Пример 1. Уравнение $a_1a_2x_1 = a_3a_4x_2$ является совместным. Одним из его решений является набор $x_1 = a_3a_4$, $x_2 = a_1a_2$. Уравнение $a_1a_2x_1 = a_3a_4$ является несовместным, поскольку при любом значении переменной x_1 в левой части уравнения будет присутствовать элемент a_2, который не содержится в правой части.

Все уравнения над полурешёткой F_n можно разделить на два типа:

1) уравнения, в которых переменные присутствуют только в одной части; будем называть такие уравнения *уравнениями* I *типа*;
2) уравнения, обе части которых содержат переменные — *уравнения* II *типа.*

Заметим, что любое уравнение II типа имеет решение над F_n. В самом деле, выбирая каждую из переменных x_k, входящих в уравнение, равной произведению констант левой и правой частей, получим верное равенство.

В работе рассматриваются уравнения над полурешёткой F_n от одной переменной. Множество всех таких уравнений обозначим через Eq_n. Будем обозначать: Eq_n^1 — множество всех уравнений I типа из Eq_n, Eq_n^2 — множество всех уравнений II типа из Eq_n. Уравнения из Eq_n^1 представимы либо в виде $c_1x = c_2$, $c_1, c_2 \in F_n$, либо в виде $c_3 = c_4x$, $c_3, c_4 \in F_n$, а уравнения из Eq_n^2 имеют вид $c_5x = c_6x$, $c_5, c_6 \in F_n$. Поскольку $|F_n| = 2^n$, легко видеть, что $|Eq_n^1| = 2 \cdot 2^n \cdot 2^n = 2 \cdot 4^n$, а $|Eq_n^2| = 2^n \cdot 2^n = 4^n$.

Все уравнения из множества Eq_n^2 совместны. Найдём количество совместных в Eq_n^1. Допустим, уравнение из Eq_n^1 имеет вид $c_1x = c_2$. Для того чтобы такое уравнение было совместным, необходимо, чтобы константа c_1 состояла только из букв, входящих в состав константы c_2, и никаких других. Таким образом, количество совместных уравнений данного вида равно

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sum_{s=0}^{k} C_k^s = 3^n.$$

Здесь C_n^k — количество вариантов выбрать константу c_2, состоящую из k букв, а C_k^s — количество допустимых констант c_1, состоящих из s букв, входящих в состав c_2. Аналогично рассуждая для уравнений вида $c_3 = c_4 x$, получим, что количество совместных уравнений из Eq_n^1 равно $2 \cdot 3^n$.

2. Математическое ожидание числа решений случайно выбранного уравнения

Так как множества Eq_n^1 и Eq_n^2 конечны, на них можно ввести равномерную вероятностную меру и определить следующие случайные величины. Пусть ξ_1 — случайная величина, равная количеству решений случайно выбранного уравнения из Eq_n^1, а ξ_2 — случайная величина, равная количеству решений случайно выбранного уравнения из Eq_n^2. Отметим, что случайные величины ξ_1 и ξ_2 могут принимать целые значения от 0 до 2^n.

Теорема 1. Математическое ожидание числа решений случайно выбранного уравнения из Eq_n^1 равно 1:

$$\mathbb{E}\xi_1 = 1.$$

Доказательство. В Eq_n^1 содержится $2 \cdot 4^n$ уравнений, при этом только $2 \cdot 3^n$ из них являются совместными. Учитывая, что все варианты выбора уравнения равновероятны, получаем $\mathsf{P}[\xi_1 = 0] = \dfrac{2 \cdot 4^n - 2 \cdot 3^n}{2 \cdot 4^n} = \dfrac{4^n - 3^n}{4^n}$.

Далее, предположим, что уравнение $xa = b$, $a, b \in F_n$, имеет хотя бы одно решение. Это означает, что a может содержать только буквы из b. Допустим, что $|b| = s$, $|a| = t$, где $t \leqslant s \leqslant n$. Любое решение такого уравнения обязано содержать все буквы из b, не входящие в состав a, и при этом может содержать любые буквы из a. Следовательно, количество решений такого уравнения равно 2^t, т. е. однозначно определяется длиной элемента a. Получаем, что число всех уравнений, имеющих ровно 2^t решений, равно $C_n^t \sum\limits_{k=0}^{n-t} C_{n-t}^k = C_n^t 2^{n-t}$ (здесь C_n^t — число слов длины t, т. е. число всех вариантов выбора константы a, а $\sum\limits_{k=0}^{n-t} C_{n-t}^k$ — количество вариантов выбрать константу b, содержащую все буквы из a). Аналогичные рассуждения верны и для уравнений вида $c = xd$, $c, d \in F_n$. Таким образом, имеем

$$\mathsf{P}[\xi_1 = l] = \begin{cases} \dfrac{4^n - 3^n}{4^n}, & \text{если } l = 0; \\ \dfrac{2 \cdot C_n^i 2^{n-i}}{2 \cdot 4^n} = \dfrac{C_n^i 2^{n-i}}{4^n}, & \text{если } l = 2^i, \text{ где } 0 \leqslant i \leqslant n; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

Математическое ожидание ξ_1 равно

$$\mathbb{E}\xi_1 = 0 \cdot \frac{4^n - 3^n}{4^n} + \sum_{i=0}^{n} 2^i \frac{C_n^i 2^{n-i}}{4^n} = \frac{2^n}{4^n} \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 1.$$

Теорема доказана. ■

Пример 2. Рассмотрим полурешётку F_2, порождённую множеством $\{a_1, a_2\}$, т. е. состоящую из элементов $\{\varepsilon, a_1, a_2, a_1a_2\}$. Выпишем все уравнения из множества Eq_2^1 (табл. 1).

Таблица 1

Уравнение	Количество решений	Уравнение	Количество решений
$x = \varepsilon$	1	$x = a_2$	1
$xa_1 = \varepsilon$	0	$xa_1 = a_2$	0
$xa_2 = \varepsilon$	0	$xa_2 = a_2$	2
$xa_1a_2 = \varepsilon$	0	$xa_1a_2 = a_2$	0
$x = a_1$	1	$x = a_1a_2$	1
$xa_1 = a_1$	2	$xa_1 = a_1a_2$	2
$xa_2 = a_1$	0	$xa_2 = a_1a_2$	2
$xa_1a_2 = a_1$	0	$xa_1a_2 = a_1a_2$	4
$\varepsilon = x$	1	$a_2 = x$	1
$\varepsilon = xa_1$	0	$a_2 = xa_1$	0
$\varepsilon = xa_2$	0	$a_2 = xa_2$	2
$\varepsilon = xa_1a_2$	0	$a_2 = xa_1a_2$	0
$a_1 = x$	1	$a_1a_2 = x$	1
$a_1 = xa_1$	2	$a_1a_2 = xa_1$	2
$a_1 = xa_2$	0	$a_1a_2 = xa_2$	2
$a_1 = xa_1a_2$	0	$a_1a_2 = xa_1a_2$	4

Составим ряд распределения случайной величины ξ_1:

ξ_1	0	1	2	3	4
P	14/32	8/32	8/32	0	2/32

Математическое ожидание $\mathbb{E}\xi_1 = 1 \cdot 8/32 + 2 \cdot 8/32 + 4 \cdot 2/32 = 1$ совпадает с результатом теоремы 1.

Теорема 2. Математическое ожидание числа решений случайно выбранного уравнения из Eq_n^2 равно
$$\mathbb{E}\xi_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Доказательство. Поскольку $|Eq_n^2| = 4^n$, получаем
$$\mathbb{E}\xi_2 = \sum_{t=0}^{2^n} t\,\mathsf{P}[\xi_2 = t] = \sum_{t=0}^{2^n} \frac{tEq_n^2(t)}{4^n} = \frac{1}{4^n}\sum_{t=0}^{2^n} tEq_n^2(t),$$
где $Eq_n^2(t)$ — количество уравнений из Eq_n^2, имеющих ровно t решений.

Поскольку каждое уравнение участвует в полученной сумме ровно один раз, то
$$\frac{1}{4^n}\sum_{t=0}^{2^n} tEq_n^2(t) = \frac{1}{4^n}\sum_{s(x)=f(x)\in Eq_n^2} |V_{F_n}(s(x) = f(x))|,$$
где $|V_{F_n}(s(x) = f(x))|$ — количество решений уравнения $s(x) = f(x) \in Eq_n^2$.

Обозначим через $r_n(a)$ количество уравнений, удовлетворяющих точке $a \in F_n$. Изменив порядок суммирования, получаем
$$\mathbb{E}\xi_2 = \frac{1}{4^n}\sum_{s(X)=f(X)\in Eq_n^2} |V_{F_n}(s(x) = f(x))| = \frac{1}{4^n}\sum_{a\in F_n} r_n(a).$$

Пусть $xb = xc$ — произвольное уравнение из Eq_n^2 (все уравнения этого типа совместны) и $a \in F^n$ — его решение. Представим константы b и c в виде $b = da'$, $c = da''$, где d не содержит букв из a, a' и a'' могут содержать только буквы из a. Предположим, что $|a| = l$. Тогда a' и a'' — подмножества некоторого слова из l букв, d — подмножество некоторого слова из $n-l$ букв. Количество уравнений, удовлятворяющих точке a, равно

$$r_n(a) = \sum_{i=0}^{n-l} C_{n-l}^i \sum_{j=0}^{l} C_l^j \sum_{j=0}^{l} C_l^j = 2^{n-l} \cdot 2^l \cdot 2^l = 2^{n+l}.$$

Подставляя этот результат в выражение для математического ожидания, получаем

$$\mathbb{E}\xi_2 = \frac{1}{4^n} \sum_{a\in F_n} r_n(a) = \frac{1}{4^n} \sum_{l=0}^{n} C_n^l 2^{n+l} = \frac{1}{4^n} \cdot 2^n \sum_{l=0}^{n} C_n^l 2^l = \frac{1}{2^n} \cdot 3^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Теорема доказана. ■

Пример 3. Вновь рассмотрим полурешётку F_2 и выпишем уравнения из Eq_n^2 (табл. 2).

Таблица 2

Уравнение	Количество решений	Уравнение	Количество решений
$x = x$	4	$x = xa_2$	2
$xa_1 = x$	2	$xa_1 = xa_2$	1
$xa_2 = x$	2	$xa_2 = xa_2$	4
$xa_1a_2 = x$	1	$xa_1a_2 = xa_2$	2
$x = xa_1$	2	$x = xa_1a_2$	1
$xa_1 = xa_1$	4	$xa_1 = xa_1a_2$	2
$xa_2 = xa_1$	1	$xa_2 = xa_1a_2$	2
$xa_1a_2 = xa_1$	2	$xa_1a_2 = xa_1a_2$	4

Составим ряд распределения случайной величины ξ_2:

ξ_2	0	1	2	3	4
P	0	4/16	8/16	0	4/16

Видим, что математическое ожидание $\mathbb{E}\xi_2 = 1 \cdot 4/16 + 2 \cdot 8/16 + 4 \cdot 4/16 = 36/16 = 9/4$ совпадает с результатом теоремы 2.

Теперь найдём математическое ожидание случайной величины ξ, равной количеству решений случайно выбранного уравения из Eq_n.

Теорема 3. Математическое ожидание числа решений случайно выбранного уравнения из Eq_n равно

$$\mathbb{E}\xi = \frac{3^n + 2 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^n}.$$

Доказательство. Случайная величина ξ может быть представлена в виде $\xi = \xi' + \xi''$, где

$$\xi' = \begin{cases} 0, & \text{если уравнение из } Eq_n^2, \\ \xi_1 & \text{иначе;} \end{cases} \qquad \xi'' = \begin{cases} 0, & \text{если уравнение из } Eq_n^1, \\ \xi_2 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку $|Eq_n^1| = 2|Eq_n^2|$, то $\mathbb{E}\xi' = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3}\,\mathbb{E}\xi_1 = \frac{2}{3}\,\mathbb{E}\xi_1$ и $\mathbb{E}\xi'' = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3}\,\mathbb{E}\xi_2 = \frac{1}{3}\,\mathbb{E}\xi_2$. Используя теоремы 1 и 2, получаем

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi' + \mathbb{E}\xi'' = \frac{2}{3}\,\mathbb{E}\xi_1 + \frac{1}{3}\,\mathbb{E}\xi_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^n + 2 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^n}.$$

Теорема доказана. ■

Пример 4. Выпишем все уравнения от одной переменной над полурешёткой F_2 (табл. 3).

Таблица 3

Уравнения	Количество решений	Уравнение	Количество решений
$x = \varepsilon, \varepsilon = x$	1	$x = x$	4
$xa_1 = \varepsilon, \varepsilon = xa_1$	0	$xa_1 = x$	2
$xa_2 = \varepsilon, \varepsilon = xa_2$	0	$xa_2 = x$	2
$xa_1a_2 = \varepsilon, \varepsilon = xa_3$	0	$xa_1a_2 = x$	1
$x = a_1, a_1 = x$	1	$x = xa_1$	2
$xa_1 = a_1, a_1 = xa_1$	2	$xa_1 = xa_1$	4
$xa_2 = a_1, a_1 = xa_2$	0	$xa_2 = xa_1$	1
$xa_1a_2 = a_1, a_1 = xa_1a_2$	0	$xa_1a_2 = xa_1$	2
$x = a_2, a_2 = x$	1	$x = xa_2$	2
$xa_1 = a_2, a_2 = xa_1$	0	$xa_1 = xa_2$	1
$xa_2 = a_2, a_2 = xa_2$	2	$xa_2 = xa_2$	4
$xa_1a_2 = a_2, a_2 = xa_1a_2$	0	$xa_1a_2 = xa_2$	2
$x = a_1a_2, a_1a_2 = x$	1	$x = xa_1a_2$	1
$xa_1 = a_1a_2, a_1a_2 = xa_1$	2	$xa_1 = xa_1a_2$	2
$xa_2 = a_1a_2, a_1a_2 = xa_2$	2	$xa_2 = xa_1a_2$	2
$xa_1a_2 = a_1a_2, a_1a_2 = xa_1a_2$	4	$xa_1a_2 = xa_1a_2$	4

Составим таблицу распределения случайной величины ξ:

ξ	0	1	2	3	4
P	14/48	12/48	16/48	0	6/48

Математическое ожидание $\mathbb{E}\xi = 1 \cdot 12/48 + 2 \cdot 16/48 + 4 \cdot 6/48 = 68/48 = 17/12$, очевидно, соответствует теореме 3.

3. Математическое ожидание числа неприводимых компонент множества решений случайно выбранного уравнения

Пусть F — свободная полурешётка счётного ранга с множеством свободных порождающих элементов $\{a_i : i \in I\}$ с присоединённой единицей ε. Множество $Y \subseteq F$ называется *алгебраическим*, если существует система уравнений над F с множеством решений Y (множеством решений системы уравнений является пересечение решений всех уравнений системы).

Непустое алгебраическое множество Y называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n, \tag{2}$$

где Y_i — алгебраические множества, $Y_i \nsubseteq Y_j$ для всех $i \neq j$ и $n > 1$. Если алгебраическое множество представимо в виде объединения (2), где множества Y_i неприводимы, то множества Y_i называются *неприводимыми компонентами* множества Y.

Будем рассматривать уравнения над полурешёткой F, которые в своей записи содержат только константы из полурешётки F_n. Например, для $n = 2$ будем рассматривать те уравнения над F, в записи которых могут присутствовать только константы $\varepsilon, a_1, a_2, a_1a_2$, т. е. элементы полурешётки F_2.

Определим случайную величину ψ, равную количеству неприводимых компонент множества решений случайно выбранного уравнения над F с константами из F_n.

Теорема 4. Математическое ожидание числа неприводимых компонент множества решений случайно выбранного уравнения над F с константами из F_n равно

$$\mathbb{E}\psi = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнения I типа, т. е. уравнения вида $xa = a'$ или $a' = xa$, где $a, a' \in F_n$. Множество решений любого такого уравнения конечно, потому что x может состоять только из букв, входящих в состав a'. Это означает, что случайная величина ψ для любого из уравнений данного вида равна количеству решений этого уравнения. Таким образом, для уравнений I типа ψ может принимать следующие значения: $0, 1, 2, 4, \ldots, 2^k, \ldots, 2^n$.

Теперь рассмотрим уравнения II типа. Представим их в виде $xab = xa'b$, где $a, a', b \in F_n$ и $a \cap a' = \varnothing$. Поскольку любое решение такого уравнения имеет вид $x = aa't$, координатная полурешётка множества решений $V(xab = xa'b)$ вкладывается в полурешётку F^*, порождённую множеством $\{a_1 \ldots a_n \ldots\} \cup \{t\}$. В таком случае, как следует из работы [7], множество $V(xab = xa'b)$ является неприводимым. Следовательно, $\psi = 1$ для любого уравнения II типа.

Обобщим вышесказанное. Имеем, что $\psi = 0$ для $2(4^n - 3^n)$ несовместных уравнений I типа. Далее, $\psi = 1$ для всех уравнений II типа и для уравнений I типа, имеющих ровно одно решение, т. е. для $4^n + 2C_n^0 2^n$ уравнений. Наконец, по формуле (1) $\psi = 2^i$ для $2C_n^i 2^{n-i}$ уравнений I типа, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, получаем

$$\mathbb{E}\psi = 0 \cdot \frac{2(4^n - 3^n)}{3 \cdot 4^n} + 1 \cdot \frac{4^n + 2C_n^0 \cdot 2^n}{3 \cdot 4^n} + \sum_{i=1}^{n} 2^i \frac{2C_n^i 2^{n-i}}{3 \cdot 4^n} = \frac{1}{3} + \frac{2C_n^0 2^n}{3 \cdot 4^n} + \sum_{i=1}^{n} 2^i \frac{2C_n^i 2^{n-i}}{3 \cdot 4^n} =$$

$$= \frac{1}{3} + \sum_{i=0}^{n} 2^i \frac{2C_n^i 2^{n-i}}{3 \cdot 4^n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{n} \frac{C_n^i \cdot 2^n}{4^n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i}{2^n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gilman R., Myasnikov A., and Roman'kov V.* Random equations in nilpotent groups // J. Algebra. 2012. V. 352. No. 1. P. 192–214.
2. *Gilman R., Myasnikov A., and Roman'kov V.* Random equations in free groups // Groups Complexity Cryptol. 2011. V. 3. No. 2. P. 257–284.
3. *Roman'kov V.* Equations over groups // Groups Complexity Cryptol. 2012. V. 4. No. 2. P. 191–239.
4. *Daniyarova E., Miasnikov A., and Remeslennikov V.* Unification theorems in algebraic geometry // Algebra and Discrete Mathematics. Hackensack, 2008. P. 80–112.
5. *Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н* Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. II. Основания // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17. № 1. С. 65–106.
6. *Шевляков А. Н.* Эквивалентные уравнения над полурешетками // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 478–490.

7. *Шевляков А. Н.* Элементы алгебраической геометрии над свободной полурешеткой // Алгебра и логика. 2015. Т. 54. № 3. С. 399–420.

REFERENCES

1. *Gilman R., Myasnikov A., and Roman'kov V.* Random equations in nilpotent groups. J. Algebra, 2012, vol. 352, no. 1, pp. 192–214.
2. *Gilman R., Myasnikov A., and Roman'kov V.* Random equations in free groups. Groups Complexity Cryptol., 2011, vol. 3, no. 2, pp. 257–284.
3. *Roman'kov V.* Equations over groups. Groups Complexity Cryptol., 2012, vol. 4, no. 2, pp. 191–239.
4. *Daniyarova E., Miasnikov A., and Remeslennikov V.* Unification theorems in algebraic geometry. Algebra and Discrete Mathematics. Hackensack, 2008, pp. 80–112.
5. *Daniyarova E. Yu., Myasnikov A. G., and Remeslennikov V. N* Algebraicheskaya geometriya nad algebraicheskimi sistemami. II. Osnovaniya [Algebraic geometry over algebraic structures. II. Foundations]. Fundam. Prikl. Mat., 2012, vol. 17, iss. 1, pp. 65–106. (in Russian)
6. *Shevlyakov A. N.* Ekvivalentnye uravneniya nad polureshetkami [Equivalent equations in semilattices]. Sib. Elektron. Mat. Izv., 2016, vol. 13, pp. 478–490. (in Russian)
7. *Shevlyakov A. N.* Elementy algebraicheskoy geometrii nad svobodnoy polureshetkoy [Elements of algebraic geometry over a free semilattice]. Algebra Logika, 2015, vol. 54, no. 3, pp. 399–420. (in Russian)