УДК 111

В.В. Целищев

ФОРМАЛЬНЫЕ ОНТОЛОГИИ И СЕМАНТИКА ПРИМИТИВНЫХ КОНЦЕПЦИЙ ОСНОВАНИЙ МАТЕМАТИКИ[1]

Анализируются проблемы экспликации семантического статуса примитивных концепций оснований математики в системах Г. Фреге, Р. Кронекера и Д. Гильберта. В центре внимания стоит проблема адекватности обоснования математических систем двумя способами: через определение концепций и аксиоматикой. Концептуализм Фреге и Кронекера противопоставляется идеологии Гильберта. Сопоставляются примитивные элементы в обоих подходах и определяется их логическая природа.
Ключевые слова: *онтология, семантика, примитивные концепции, Гильберт, аксиомы, определения.*

Одним из важных вопросов оснований математики начиная с конца XIX в. был вопрос об онтологическом статусе примитивных терминов. Работы Готтлоба Фреге [1] по прояснению концептуального аппарата математического мышления и новая трактовка аксиоматического метода Давидом Гильбертом [2] имели противоположные установки в отношении природы примитивных концепций математики, и их полемика оказалась важным этапом в методологии и философии математики. Спорам вокруг онтологического статуса примитивных терминов в немалой степени обязано своим возникновением важнейшее направление в основаниях математики – так называемый структурализм. Поднятые в работах этих логиков и математиков вопросы имеют огромное значение для понимания природы формальных систем, особенно в связи с развитием компьютерных методов представления знания. Понятие онтологии информационных систем имеет самое непосредственное отношение к анализу статуса примитивных терминов математики, которые по сути и представляют онтологию математики. Поэтому сопоставление мотивов и аргументации классических работ с современным состоянием исследований в этой области представляет большой интерес. Восхитительная обстановка философских дискуссий в основаниях математики тех времен до сих пор не оценена полностью, хотя эти дискуссии имеют самое непосредственное отношение к современным преставлениям о природе дедуктивного знания.

Прежде всего, надо отметить, что предметом обсуждения на рубеже XIX и XX вв. стал статус геометрии. Хотя Г. Фреге, оспаривая тезис И. Канта о синтетической природе истин математики, показал аналитический характер истин арифметики, он оставил статус синтетических за истинами геометрии. Появление «Оснований геометрии» Д. Гильберта ознаменовало целую эпоху не только в собственно математике, но и в ее философии, и именно в отно-

[1] Исследования, нашедшие отражение в данной статье, поддержаны грантом Российского фонда фундаментальных исследований 12-06 – 318 а «Семантическая информация и формальные онтологии».

шении геометрии разгорелся спор между Фреге и Гильбертом; участниками дискуссий по сходным проблемам были А. Пуанкаре и Б. Рассел.

Важность статуса истин геометрии для тех споров хорошо передается пассажем из работы Г. Фрейденталя:

> …узы с реальностью обрублены. Геометрия стала чистой математикой. Вопрос о том, можно ли применять математику к реальности и как это делать, является тем же самым вопросом, который относится и к другим ветвям математики. Аксиомы не являются очевидными истинами. Они вообще не являются истинами в обычном смысле …Гильберт четко обозначил разрыв между математикой и реалистической наукой и тем самым создал парадигму новой методологии [3. С. 618].

Однако не только геометрия была той областью, о которой разгорелись споры; те вопросы, которые были подняты в этой полемике, оказались созвучными методологическим установкам Р. Дедекинда в основаниях арифметики, в которых он расходился с Д. Гильбертом по существенным вопросам. В некотором отношении позиция Р. Дедекинда солидаризировалась с позицией Г. Фреге. Целый клубок проблем вокруг статуса примитивных терминов математики включал в себя, прежде всего, вопрос о соотношении определений и аксиом как в геометрии, так и в алгебре.

Существенная часть обсуждения этих вопросов содержалась в полемике А. Пуанкаре и Б. Рассела. Возникновение неевклидовых геометрий резко поставило вопрос, какая из геометрий является «подлинной» в качестве описания «реального» пространства. Обнаружение моделей неевклидовой геометрии в евклидовой геометрии показало переводимость одной геометрии в другую, и выбор между ними стал, с точки зрения Пуанкаре, делом конвенции. Он настаивал на том, что описание физического пространства может осуществляться с равным успехом обеими системами, поскольку никакие эмпирические процедуры не могут решить этот вопрос. Позднее этот тезис (так называемый тезис Пуанкаре) развил детально Г. Райхенбах [4].

То, что принято называть конвенционализмом Пуанкаре в вопросе о природе геометрии, на самом деле было самым тесным образом связано с пониманием математики как совокупности структур. В любом случае, конвенционализм и структурализм тесно переплетены в вопросе о природе объектов математики. Традиционный взгляд на геометрию полагает ее наукой об объективном пространстве, и в этом смысле предметом математики является внешний мир. Пуанкаре аргументировал, что такого определенного предмета геометрия не имеет, и ее утверждения не имеют истинностного значения. В некотором смысле это было крайне необычной позицией, вызвавшей многочисленные возражения, простиравшиеся даже в политические сферы. Достаточно посмотреть характер такой критики в работе В.И. Ленина «Материализм и эмпириокритицизм».

При попытках определения, о «чем» говорит геометрия как она представлена в аксиоматическом виде у Гильберта, мы наталкиваемся на систему неявных определений понятий «точка», «прямая» и т.д. Эти определения являются неявными в том смысле, что они не говорят прямо, что такое точка или что такое прямая, а скорее являются спецификациями того, как «точка» соотносится с «прямой». Другими словами, сами по себе эти понятия не имеют значения или референта, которые определялись бы интуицией или восприятием, и все, что от них требуется, это выполнение условий, обозначенных аксиомами. Именно это обстоятельство позволяет по-новому рассматривать роль аксиом как скрытых или неявных определений. Сама концепция неявного определения, которое при этом имеется в виду, была введена позднее Р. Карнапом, в качестве обоснования такой трактовки «объектов» геометрии, и тем не менее идея о том, что геометрии говорит о чем-то таком, что не определено точно, вызывала и вызывает до сих пор возражения.

Взгляд, согласно которому математика имеет дело с неопределенными объектами, встречается с естественными метафизическими возражениями. Но помимо них, есть и эпистемологические возражения. Действительно, утверждения математики могут быть истинными или ложными, если эти утверждения описывают некоторые объекты, определения которых и дают возможность квалифицировать их как истинные или ложные, задавая референты или значения. То есть значения терминов, входящих в утверждения, должны быть фиксированы заранее. Согласно Б. Расселу, математическое определение есть описание объекта, которое соотносит его с уже известными терминами. Здесь у Рассела фигурирует то, что позднее стало частью его доктрины знания по описанию и знания-знакомства. Там, где дальнейшее описание невозможно, остаются примитивные термины, известные нам через процедуру наглядного знакомства или использования эгоцентрических терминов.

С. Шапиро так описывает расхождения взглядов Рассела и Пуанкаре [5. С. 155]. Оба исходят из одинаковой посылки, что если аксиомы должны иметь истинностные значения, тогда мы можем определить значение примитивных терминов до формулировки теории. Пуанкаре, в силу своего конвенционализма, не принимал консеквента этой импликации, и, стало быть, не верным оказывается и антецедент. Другими словами, аксиомы не имеют истинностного значения. В противоположность этому для Рассела консеквент был вполне осмысленным, и, стало быть, истинным оказывается антецедент, т.е. аксиомы должны иметь истинностные значения. Вопрос о том, как мы определяем значение примитивных терминов, является сложным, если не принимать таких доктрин, как расселовское знание-знакомство. Но и эта доктрина оказывается ненадежной с точки зрения установления значения примитивных терминов, и вскоре сам Рассел отказался от своих требований к замене неявных определений с помощью аксиом в пользу явных определений. Это связано с тем, что Рассел склонился к концепции математики как совокупности структур. При этом основным его мотивом было доверие научной практике, в данном случае математической практике, где аксиоматический метод стал доминирующим во многих областях. В этом отношении удивительно точным оказывается его афоризм о природе математики:

Математика может быть определена как предмет, в котором мы никогда не знаем ни того, о чем мы говорим, ни того, что сказанное нами является истинным.

Обычно это известное высказывание Рассела производит впечатление намеренно шокирующего парадокса, поскольку математика считается наиболее точной из наук. Но на самом деле контекст афоризма соотносится с проблемой неявных определений, в роли которых выступают аксиомы. Контекст этот превосходно передается также часто цитируемым пассажем из Б. Рассела:

> …математик не должен заниматься частными вещами по поводу его точек или их внутренней природой. Это же относится к прямым, плоскостям, даже если он рассуждает как прикладной математик. Мы можем сказать, что имеется эмпирическое свидетельство приблизительной истинности таких частей геометрии, и таким образом, истинность не является делом определения. Но нет никаких эмпирических свидетельств того, чем должна быть «точка». Ею может быть все, что как можно ближе удовлетворяет нашим аксиомам, но не как то, что «очень мало» или «не имеет частей». Обладает ли она такими свойствами, это неважно, если она удовлетворяет аксиомам. Если мы можем из эмпирического материала сконструировать логическую структуру, даже весьма сложную, которая будет удовлетворять геометрическим аксиомам, эта структура вполне законно может быть названа «точкой». Мы не должны говорить, что нет больше ничего, что может быть названо «точкой»; мы должны сказать лишь: «сконструированный нами объект достаточен для геометра; он может быть одним из многих объектов, любого из которых было бы достаточно для оправдания эмпирической истинности геометрии, и таким образом, тезиса том, что геометрия не есть дело определения [6. С. 62].

Такое представление о природе математики почти всегда соотносится со структурализмом. Однако такое упрощенное преставление наталкивается на ряд трудностей в интерпретации философии математики таких мыслителей, как Г. Фреге и Р. Дедекинд. Последний традиционно относится к структуралистам, и тем не менее его точка зрения на то, считать ли аксиомы неявными определениями, оказывается противоположной точке зрения Д. Гильберта. Никто не оспаривает представления о том, что в основе математики лежат определения и аксиомы. Гильберт полагает, что аксиом вполне достаточно, чтобы не определять те объекты, которые удовлетворяют аксиомам. Здесь требуется уточнение относительно природы определений. Определение является номинальным, если оно вводит термин в качестве сокращения предыдущих уже известных терминов. Но математика должна с чего-то начинаться, и любое определение использует ни к чему не сводимые примитивные термины, не имеющие определения. Точка зрения Дедекинда состояла в том, что математика должна основываться на примитивных концепциях, которым дается объяснение. Гильберт полагал такие объяснения излишними. В этом смысле определения у Дедекинда играют роль, традиционно отводимую аксиомам. Опять-таки традиционно аксиомам приписывается самоочевидность. Гильберт полагал, что это требование к аксиомам также излишне. Ясно, что здесь мы имеем дело с принципиальными разногласиями в отношении того, как должны быть построены основания математики. Если Гильберт выдвигал на первый план аксиомы, то Дедекинд – концепции. В этом смысле Дедекинда часто называют концептуалистом. Его подход к основаниям математики опирается на важность определений. Хотя математическая практика пошла по пути, указанному Гильбертом, собственно философская сторона этого предприятия нуждается в значительном уточнении, поскольку перед Гильбертом встают онтологические и эпистемологические проблемы, к которым сам Гильберт относился серьезно. Ряд концептуальных вопросов такого рода стал предметом споров между Гильбертом и Фреге, последний из которых настаивал на концептуальной ясности аксиоматического подхода. В частности, Фреге, как впоследствии и Рассел, указывал на важность точных определений математический объектов перед тем, как они становятся предметом аксиоматических рассмотрений.

С 1899 по 1903 г. Гильберт и Фреге обменялись несколькими письмами, в которых изложили свои программные взгляды на роль аксиоматики и примитивных терминов в обосновании математики [7]. Следует сразу отметить, что на взгляды Фреге в этом вопросе, видимо, повлияла разрабатываемая им теория языка, которая не вполне совпадала по духу с математической практикой. Разногласия между Фреге и Гильбертом касались роли определений и аксиом в обосновании математики. Фреге настаивает на том, что определения в математике должны специфицировать значение определяемого слова в уже известных терминах. Без таких определений аксиомы не могут задавать значения входящих в них терминов, лишаясь при этом истинностного значения. В этом смысле аксиомы, как их понимает Гильберт, никак не могут быть определениями. На это Гильберт отвечал, что самым решительным образом противится тому, чтобы что-либо было заранее известным при аксиоматическом описании. Если для Фреге аксиоматизация представлялась систематизацией уже известных истин, то для Гильберта эти истины создавались аксиомами. Точнее, как платонист Фреге предполагал, что утверждения математики являются описанием уже существующей объективной математической реальности, как области уже существующих математических объектов. С точки зрения Гильберта, экзистенциальные утверждения математики являются не дескриптивными, а следствием непротиворечивости заданных аксиом. Непротиворечивость для Гильберта является критерием и истинности, и существования

Далее, Гильберт полагает, что определения математических объектов в предлагаемом Фреге стиле не могут быть исчерпывающими в том смысле, что только математическая аксиоматическая система в целом дает такое определение.

> Концепции могут быть фиксированы логически только их отношениями к другим концепциям. Эти отношения, сформулированные в определенных утверждениях, я называю аксиомами, таким образом, приходя к взгляду, что эти аксиомы …являются определениями концепций. Тут я ничего не придумываю, поскольку не нашел ничего лучше, но меня к этому вынудили требования строгости логического вывода и логического конструирования теории. Я убедился, что более тонкие разделы математики …могут трактоваться только таким путем; в противном случае мы попадаем в круг [7. С. 51].

Фактически это является одной из формулировок структурализма, суть которого состоит в отказе рассматривать изолированные математические объекты и утверждения, не соотносящиеся с системой. Самой простой иллюстрацией структурализма является утверждение о том, что число 2 не есть объект в каком-либо смысле, а есть то, что стоит в ряду натуральных чисел после числа 1 и перед числом 3. В определенном смысле это просто «место» в прогрессии. Существует несколько версий структурализма, в целом разделяющих представление о том, что с точки зрения онтологии главное место занимает не понятие объекта, а понятие структуры в целом [8].

Как уже было указано, взгляд Фреге в существенной степени определялся его теорией языка, согласно которой смысл термина определяет его референт. Если человек понимает смысл термина «точка», тогда он должен иметь средство определения того, что является точкой. Другими словами, каждый термин имеет фиксированный смысл и референт, или денотат. Как следствие этого, каждое правильно построенное предложение в математике есть утверждение о фиксированной совокупности объектов или концепций. Например, цифры в этом смысле являются сингулярными терминами, которые указывают на натуральные числа. Пуанкаре и Гильберт отвергали этот взгляд, полагая, что не существует какой-то совокупности выделенных объектов, подпадающих под аксиоматическую характеристику натуральных чисел, характеристику системы. Противостояние Фреге и Гильберта в этом вопросе на самом деле объясняется разными преставлениями о природе логики, и представления эти разделяют исследователей в области логики и оснований математики на два больших лагеря. Для Фреге, как и многих других, например Л. Витгенштейна, логика понимается как язык, в то время как Гильбертом логика рассматривается как исчисление. В первом случае любое предложение уже является интерпретированным, и при смене интерпретации ничего не меняется в статусе этого предложения, в то время как во втором случае основные концепции имеют различные объемы в каждой модели.

Не следует полагать, что в этом споре кто-то победил. На самом деле, он высветил несколько важнейших положений в трактовке оснований математики, и поднял важные вопросы о природе исходных элементов в математических системах, т.е. примитивных терминов. Что касается соотношения номинальных и неявных определений, то довольно скоро уже сам Фреге осмыслил неявные определения Гильберта как точные определения, но уже второго порядка. До сих пор такое представление об этом соотношении является общепринятым, и можно считать спор результатом вышеупомянутых расхождений в понимании природы логики.

Идеи Гильберта о сути аксиоматического метода являются важными не только с точки зрения взглядов на природу математики и логики. Они поднимают важнейшие вопросы онтологического плана, а именно, что лежит в основе представления математического знания. В этом отношении наиболее интересно сопоставление взглядов Дедекинда и Гильберта.

В силу ранее сказанного следует признать, что элементы онтологии математической системы, например точки, прямые или натуральные числа, вводятся двумя разными способами. С одной стороны, для каждого объекта требуется точное определение. На таком способе настаивают Фреге и Дедекинд. С другой стороны, онтология вводится через неявные определения, которые характеризуют всю систему в целом. Это точка зрения Гильберта. Как уже было указано, с традиционной точки зрения трудно понять, как гильбертовские аксиомы могут определять онтологию вообще. Знаменитая острота Гильберта, произнесенная им на берлинском вокзале, что если в его аксиоматической системе для геометрии точки, прямые и треугольники заменить столами, стульями и подставками под пивные кружки, то ничего не изменится, явно свидетельствует о нетрадиционной концепции математической онтологии. На самом деле, аксиомы Гильберта конечно же определяют онтологию, но несколько иным путем. Как показал Фреге, эти аксиомы определяют концепции высших порядков, под которые подпадают уже не отдельные объекты, а структуры. В этом смысле область математики состоит не из объектов первого уровня, например чисел, а из объектов второго уровня, скажем полей и групп. Это означает, что мы должны иметь более четкое представление о том, что является исходным базисом математики, т.е. какие примитивные термины используются при представлении математических систем и как они соотносятся с аксиомами.

Вопрос о том, что первично в представлении математических систем – примитивные концепции или же аксиомы, – является чрезвычайно важным для прояснения понятия онтологии математики. Различие методов представления у Гильберта и Дедекинда в этом отношении весьма показательно, способствуя большей ясности в вопросе о природе математических понятий. В центре вопроса оказывается концепция примитивных понятий, набор которых определяет всю математическую систему. С точки зрения Дедекинда, эти примитивные концепции, которые не имеют определений, требуют еще и пояснений, без которых они не выполняют своей роли оснований математики. С точки зрения Гильберта, такие пояснения принципиально излишни. Как видно, этот заочный спор Дедекинда и Гильберта имеет значительное сходство со спором Фреге и Гильберта. Однако в случае первого (гипотетического) спора упор сделан не на противопоставлении неявных и точных определений, а на роли объяснений (elucidation) для примитивных концепций математики.

Рассмотрим примитивные концепции в представлении Дедекинда. Главным отличием этих концепций является то, что они обладают существенностью, которая реализуется через объяснение. Перечень базисных концепций Дедекинда таков:

a есть вещь
$a=b$
A есть система
a есть элемент A
Φ есть отображение системы A
$\Phi(s)$ (Φ-образ s).

В онтологических терминах, это вещь, тождество, система (множество), элементность, отображение и образ.

Возникает вопрос, что означает в данном контексте существенность примитивного термина? Прежде всего, нужно отметить, что термин или знак в системе может пониматься по-разному. В одном случае термин всегда «нагружен» смыслом или значением, имеет подразумеваемую интерпретацию. В другом случае термин есть просто знак, которому может быть придана та или иная интерпретация. В чем состоит различие между этими случаями? В первом случае термин является существенным в том смысле, что круг его возможных интерпретаций находится в одной сфере, так что существенность его не теряется при другой интерпретации. Если мы в этом случае меняем одну интерпретацию на другую, мы осуществляем переинтерпретацию, при которой значение или смысл знака становится другим, но сам знак или термин не претерпевает изменений. Во втором случае термин не обладает существенностью, будучи просто формальным символом, «местом для подстановки», и если такая подстановка осуществляется, тогда термин или знак обретают существенность. Это довольно тонкое различие, которое тем не менее играет важную роль.

А. Клев иллюстрирует его с помощью точной аналогии с сопоставлением концепций логической аналитичности суждения Б. Больцано и логической валидности В. Куайна:

> суждение называется логически аналитическим, если все переинтерпретации …его нелогических терминов оставляют неизменным истинность или ложность суждения. Схема называется валидной, если все ее интерпретации истинны. В первом случае мы начинаем с суждения и через варьирование его нелогических терминов мы получаем новые суждения, но никогда при этом не покидаем область суждений, дабы образовать эту …«пропозициональную форму». Во втором случае, однако, мы начинаем именно с такой формы, схемы, которая должна быть «заполнена», интерпретирована для того, чтобы вообще получить суждение [9. С. 666].

Концептуализм Дедекинда аналогичен логической аналитичности Больцано, поскольку примитивные концепции Дедекинда при интерпретации и переинтерпретации не покидают сферы уже заданного. Иллюстрацией такой ситуации с переинтерпретацией является замечание Дедекинда, что «реальное» пространство могло бы не быть непрерывным, хотя наше интуитивное представление говорит в пользу непрерывности. Но даже если бы мы и знали об отсутствии непрерывности, ничто не помешало бы нам от заполнения «пробелов» в «мысли». Другая переинтерпретация евклидового пространства дана им в представлении, когда оно повсюду не является непрерывным [10. С. 12]. Таким образом, примитивные концепции Дедекинда всегда существенны.

Изначальная трудность в понимании природы примитивных концепций состоит в том, что осмысленная (или интерпретированная) математика должна начинаться с чего-то осмысленного в такой же степени. Но коль скоро соответствующие концепции являются примитивными, откуда может взяться осмысленность на более поздней стадии? Г. Фреге хорошо осознавал эту проблему, допуская, что понимание примитивных концепций требует чего-то еще, что можно назвать разъяснением. (Немецкий термин Фреге – Erlauterungen, английский перевод – Elucidation).

Какого рода разъяснения можно дать примитивным концепциям? В случае Дедекинда, выше был приведен его перечень примитивных концепций, которые снабжены определенными разъяснениями. Так,

> Под вещью я [Дедекинд] понимаю объект нашей мысли.
>
> Вещь *a* есть то же что вещь *b*, когда все, что может мыслиться как а, может также мыслиться как b.

Ясно, что разъяснения не являются номинальными определениями. Тогда становится неясным, какие языковые средства позволяются в процессе понимания примитивных концепций, то есть, какие средства выступают в качестве разъяснения. Здесь предлагается широкий набор концептуальных средств – от метафор до наглядных определений, в чем-то напоминающих расселовское знание-знакомство. Но при таком понимании эпистемологического статуса концепции разъяснения она не может быть частью науки, поскольку выходит за рамки ее строгого языка. Конечно, в настоящее время идут достаточно частые разговоры о важности «кулис» науки, частью которых и могут быть разъяснения. Но такая трактовка вряд ли укрепляет позиции концептуального подхода к основаниям математики. Для того чтобы понять действительную роль разъяснений, требуется исследование того, имеется ли нужда в такого рода концепции при использовании аксиом. Если система аксиом требует разъяснений, тогда эти разъяснения могут иметь более «капитальный» статус, чем просто эвристика, этакая лесенка Витгенштейна, которую можно отбросить после достигнутого понимания.

Относительно недавно Х. Патнэм выдвинул тезис «внутреннего реализма», который использует результат о существовании нестандартных интерпретаций первопорядковой аксиоматизации арифметики.

Ни одна точка зрения, которая фиксирует только истинностные значения целостных предложений, не может фиксировать референты, даже если она определяет истинностные значения предложений в любом возможном мире [11. С. 33].

Для того чтобы избежать крайнего релятивизма, в котором его обвиняют многие философы, Патнэм предлагает ввести концепцию понимания, которая весьма сходна с концепцией разъяснения. Для чего Патнэму «понимание»? Поскольку, с его точки зрения, тотальное использование языка фиксирует единственную намеренную интерпретацию не в большей степени, чем это делает любая аксиоматическая система, требуется еще и «понимание» или «объяснение».

Любое объяснение должно состоять из дополнительных слов, а сами эти слова нуждаются в интерпретации. Предложение Патнэма состоит в том, чтобы рассматривать любое объяснение как неинтерпретированное расширение уже деинтерпретированной системы. Цель подобного приема ясна – Патнэм при этом стремится получить новую теорию, для которой будет возможно прежнее изобилие интерпретаций. Сама идея Патнэма состоит в необходимости какого-то рода объяснений нашей практики. Но практика при этом может пониматься двумя разными способами. В одном из них речь может идти о понимании того способа, которым практика определяет значение в математическом языке. Тут можно согласиться с Патнэмом, что детерминанты математического значения содержатся в нашем использовании математического языка. Но при этом возникает вопрос, почему Патнэм считает, что это использование будет как-то «схвачено» аксиомами?

В этом отношении к очень важному выводу приходит П. Бенацерраф:

> математическая практика отражает наши интенции и контролирует наше использование математического языка такими способами, которые могут не

> осознаваться нами в любой заданный момент и которые превосходят то, что мы точно устанавливаем в любом заданном объяснении [12. С. 111].

Действительно, наше использование математических терминов не «схватывается» аксиомами и нуждается в дополнительном объяснении. Но именно такого рода объяснения не принимал Гильберт, полагая, что самих по себе аксиом вполне достаточно. Мотивом для такого решения является неточность в разъяснениях или объяснениях. Действительно, Фреге допускал в качестве объяснений то, что принадлежит «кулисам» науки, т.е. то, что не входит в саму науку. Гильберт считал, что математика самодостаточна для того, чтобы сказать, что она говорит, без дополнительных пояснений. Но это означает, что примитивные термины не имеют заранее фиксированного значения. Другими словами, примитивные термины у Гильберта не имеют в себе существенности. Они являются просто схемами, которые должны наполниться содержанием при применении математики к внешнему миру. Однако в этом случае становится не совсем ясно, как мы понимаем математические утверждения. Теоретическая трудность здесь вот какого рода: если примитивные термины есть просто схемы, они представлены переменными, но какая семантика может быть приписана переменным? Это очень тонкий, до сих пор не до конца разработанный вопрос. Но перед тем как рассмотреть его, следует сказать о том, почему же Гильберт не принимал объяснений или разъяснений к примитивным терминам. Одна из весьма правдоподобных догадок состоит в том, что Гильберт находился под сильным влиянием философии Канта, и идея интеллекта, организующего материал опыта, очень близка ему. В этом отношении схемы, наполняемые опытом, вполне соответствуют той роли, которую Гильберт отводил науке. Кантианская направленность философии математики Гильберта проявляется особенно четко в его трактовке понятия знака [13].

Концепция примитивных терминов у Гильберта легче воспринимается, если прибегнуть к модификации интересного примера, предложенного Д. Шлиммом [14]. Пусть мы встречаемся при некоторых вымышленных обстоятельствах с утверждениями некоего автора, который выразил их ввиде аксиом:

1. Каждый снарк буджумит себя.
2. Если каждый снарк буджумит другого снарка, и второй – третьего, тогда первый снарк буджумит третьего.

Термины «снарк» и «буджумит» нам незнакомы, и именно такие термины являются примитивными, в полном согласии с ранее сказанным по поводу них. Эти примитивные термины связываются в утверждении с остальными словами. Для понимания того, что утверждают аксиомы, нужно знать, что означают эти примитивные термины. Здесь есть несколько возможностей, которые сводятся к следующим вариантам: а) человек, написавший эти аксиомы, имеет в виду нечто такое, что он держит про себя; б) аксиомы задают значение примитивных терминов, статус которых ясен: «снарк» есть существительное, а «буджумит» есть двухместное отношение; в) выражения не имеют смысла и для самого автора. Все три возможности не имеют предпочтений без дальнейших разъяснений, и ясно, что сами по себе эти аксиомы не говорят, с какими целями они утверждаются. Мы можем по этому поводу высказывать свои гипотезы, некоторые из которых могут оказаться вполне правдоподобными. Ситуация в некотором смысле аналогична нахождению аналитических гипотез в условиях неопределенности указания у В. Куайна [15].

Что-то вроде примера от вымышленного автора мы находим у Гильберта: он мог бы предложить, среди прочих, такие аксиомы:

Стол и стул находятся на подставке под пивную кружку.

Стол, стул и пивная кружка находятся на подставке под пивную кружку.

Стол находится между стулом и пивной кружкой.

Хотя здесь все слова нам знакомы, их употребление не совсем обычно, если не сказать больше. Именно это обстоятельство делает термины «стол», «стул», «подставка под пивную кружку», хотя значения этих слов понятно на обыденном уровне, примитивными терминами. Гильберт проявил человеколюбие при объяснении слушателям своей доктрины: он мог бы в качестве примитивных терминов взять вообще бессмысленные слова. В определенном смысле это вполне осмысленная стратегия, которая ныне называется «десемантизация» термина. С точки зрения Гильберта, аксиомы говорят о логической структуре соотношений между примитивными концепциями, и этого вполне достаточно.

На самом деле в «Основаниях геометрии» Гильберт предлагает для геометрии следующие аксиомы:

A и *B* лежат на *a*
A, B и *C* лежат на α

A лежит между *B* и *C*

AB конгруентно *CD*

Угол (*h,k*) конгруентен углу (*h’, k’*)

Коль скоро вместо «точки» можно подставить «стол», и значит, заранее известная семантика терминов тут не имеет значения, вместо «точек» и «столов» можно поставить просто переменную, или схему. В принципе символические буквы *A* и *B* в первой аксиоме выполняют эту роль, но по умолчанию предполагается, что за *A* и *B* стоят объекты (конкретные или абстрактные). Если мы заменим *A* на *X* и *B* на *Y*, мы сделаем, как это ни странно, значительные изменения, потому что за *X* и *Y* ничего не стоит. Это приводит к существенным трудностям, требующим для своего разрешения развития целой области исследований [16][1]. Но ответ на вопрос о семантике примитивных терминов у Гильберта достаточно затруднителен. Один из правдоподобных ответов состоит в предположении, что их можно отождествить с нелогическими константами. В частности, это зависит от того, можно ли провести разли-

[1] См., например: *Fine K.* Reasoning with Arbitrary Objects. Oxford, Blackwell, 1985.

чие между нелогическими константами и переменными. В этом отношении интересен следующий пассаж:

> …работа Гильберта по аксиоматизации геометрии делает заметный упор на то, что стало современным понятием *нелогической константы*, нечто таким, что не является ни свободным в своей интерпретируемости как переменная, ни столь фиксированным как *логическая* константа. Другими словами, упор сделан здесь на идее, что раз дана интерпретация, тогда референты нелогических терминов фиксированы, в то время как для переменных это все еще не так, а также на представлении, которое позволяет вариацию в референции посредством различных интерпретаций. Эти понятия не следует брать бессмысленными, и, таким образом, мы могли бы сказать, что они имеют смысл, который придается им некоторым образом системой аксиом, в которой они играют роль. Но варьирование референции все-таки означает отказ от доктрины Фреге, согласно которой смысл определяет референт. В свете всего этого, различие может быть выражено так: хотя Фреге и Гильберт могли бы согласиться, что логика должна оперировать таким образом, чтобы быть независимой от вопросов референции, Фреге отвергал, а Гильберт утверждал то, что эта доктрина «независимости» должна применяться также и к аксиомам [17. С. 163].

В таком понимании семантики переменных М. Халлет следовал У. Демопулосу, который для иллюстрации тезиса приводит следующий поясняющий пример:

> мы отмечаем различие между нелогическими константами и переменными – а именно различие между выражениями, имеющими определенное значение, но не имеющими фиксированного референта, и выражениями, у которых отсутствует значение, и в то же время есть конвенционально постулированная референция (в пределах данной области). Это различие лежит в основе нашей концепции формального языка и современного взгляда на аксиоматику. Например, употреблением символа «∘» для композиции группы наше намерение состоит в том, что в любой структуре языка, которая удовлетворяет аксиомам группы, «∘» будет означать эту операцию, хотя мы определенно не всегда имеем в виду конкретную группу (и следовательно, операцию образования группы). Таким образом, в то время как «∘» не имеет фиксированного референта, его значение ясно: «∘» есть операция групповой композиции. Следует заметить, что ситуация была бы другой, если бы «∘» было переменной. В этом случае надо было бы делать отдельное постулирование в случае каждой группы перед тем, как мы могли бы сказать о любой формуле с знаком «∘», удовлетворяет ли она группе. Но ясно, что предложения теории групп не являются неопределенными в истинностном значении, потому что почти во всех случаях мы не сумели обеспечить необходимое постулирование. Факт состоит в том, что ясно, какой референт у знака «∘» будет в любой группе, независимо от отдельного постулирования нами. Отсутствие нужды в отдельном постулировании такого рода и составляет то, что мы имеем в виду, когда говорим, что ∘ есть скорее значимое выражение, нежели переменная [18. С. 214].

Вопрос о семантике примитивных терминов как нелогических констант имеет прямое отношение к тому, можно ли аксиомы считать определениями, хотя и неявными, как полагал Гильберт. Следует иметь в виду, что нелогические константы определяют в значительной степени структуру аксиоматической теории. Дело в том, что у Фреге смысл определяет референт выражений, независимо от контекста, и поэтому истинность утверждений абсолютизирована. Но в случае теоретико-модельного подхода Гильберта речь может идти только об истине в структуре, или истинности в модели, которая варьируется в зависимости от контекста. Сама постановка вопроса об истинности в модели требует выделения нелогических констант, референты которых варьируются в зависимости от контекста. Именно в последнем состоит их отличие от переменных. Таким образом, Фреге не мог принять точки зрения Гильберта, поскольку у него обозначающие выражения определяют референцию абсолютно.

Следует заметить, что нельзя приписывать Гильберту идеи о роли нелогических констант в его взгляде о роли аксиом в определении концепций, потому что использование понятия нелогических констант связано самым тесным образом с понятием истины в структуре, которое появилось гораздо позже. Но в любом случае Гильберт стоял у истоков этого направления, и ряд не до конца разработанных положений Гильберта, например незнание им концепции неявного определения, обязан как раз именно этому обстоятельству.

Рассмотрим уже приведенный выше пример с символом образования группы. В теоретико-модельном контексте референтом «∘» будет не дальнейшая спецификация, состоящая в приписывании смысла или значения, а спецификация конкретной группы, которая дает интерпретацию языку. Таким образом, в той степени, в какой референт «∘» не зависит от более широкой теории, правдоподобно считать (вместе с Гильбертом), что аксиомы все-таки дают полную спецификацию значения «∘».

В отношении роли нелогических концепций как референтов примитивных концепций у Гильберта имеются и другие точки зрения. Если У. Демопулос полагает важным разделение переменных и нелогических констант решающим, иллюстрируя этот тезис употреблением знака «∘», то А. Клев считает этот знак уже свободной переменной, интерпретация которой (он называет ее «as-if») релевантна к определенной групповой операции, если говорить о том же знаке «∘». Правда, сам А. Клев допускает, что различие между as-if интерпретацией и интерпретацией как нелогических констант является, возможно, терминологическим [19. С. 675]. Но в любом случае, примитивные термины имеют лишь формальный смысл и могут рассматриваться как некоторая структура, которая ждет наполнения материальным содержанием. Однако дело состоит не в том, чтобы обозначить формальный смысл примитивных терминов у Гильберта, а в том, что концепция определения референции для примитивных терминов тесным образом связана с теоретико-модельным подходом к основаниям математики.

Ранее уже было сказано, что можно найти некоторого рода «компромисс» между Фреге и Гильбертом в вопросе о том, могут ли аксиомы быть определениями концепций, если полагать, что аксиомы определяют сущности второго порядка. Представляет интерес точка зрения, согласно которой различие взглядов Фреге и Гильберта может быть в значительной степени ослаблено при принятии во внимание прагматических аспектов аксиоматического метода.

Согласно Шлимму, аксиомы играют двоякую роль [20. Разд. 2.3 и 2.4]. С одной стороны, мы фокусируем внимание на смысле аксиом, и в этом случае аксиомы играют семантическую роль, характеризуя через описание или определение моделей или областей. Именно этот подход свойствен Пеано и Дедекинду при аксиоматическом представлении алгебраических структур и натуральных чисел. С другой стороны, аксиомы могут служить систематизации и представлению утверждений теории, и в этом случае мы имеем дело с синтаксической ролью аксиом. Именно в этом аспекте употребления аксиомы связаны с понятием следования и выведения из них следствий. Аксиоматизация в смысле Гильберта проявляет как раз синтаксический аспект использования аксиоматического метода.

В реальном математическом исследовании оба аспекта не исключают друг друга. Скорее, они характеризуют различные стадии развития математических теорий или различные способы представления математического знания. Так, в отношении последнего можно отметить, что аксиоматические системы с простыми аксиомами и относительно малым их числом играют семантическую роль, в то время как аксиоматические системы со сложными аксиомами и относительно большим их числом играют синтаксическую роль. И тем не менее различение подобного рода является прагматическим. Возвращаясь к примеру с вымышленной аксиоматической системой, можно рассматривать ее в синтаксическом аспекте как базис для выведения теорем, и в семантическом – для характеристики объектов – снарков – с бинарным отношением на них – буджумировать.

Несмотря на практическое смешение двух аспектов, они являются проявлениями различных функций аксиоматизации. При семантическом понимании аксиоматики она призвана описывать область объектов, например натуральные числа или группы, или же предписывать условия для определенных областей, т.е. определять их. Традиционное понятие выполнимости моделью аксиоматической системы затемняет отмеченное важное различие описания и определения модели. Само по себе это различение не принадлежит логике, а является частью прагматики аксиоматической системы.

При синтаксическом понимании аксиоматики система может описывать определенную теорию, а также определять ее, как состоящую только из тех утверждений, которые являются следствием аксиом. Различие между дескриптивной и предписательной аксиоматизациями отражается на значении примитивных терминов. Если примитивные термины предполагаются имеющими значение вне системы аксиом, аксиоматизация рассматривается как дескриптивная. Такая аксиоматизация называется Гильбертом материальной или содержательной. Примером такой аксиоматизации являются «Начала» Евклида, поскольку там термин «точка» предположительно указывает на точку. Если аксиоматическую систему понимать так, тогда вымышленная система аксиом выражает действительные свойства снарков и буджумирования.

Если значение примитивных терминов аксиоматической системы полностью зависит от отношений, выраженных аксиомами, тогда аксиомы считаются предписательными или же нормативными. Именно в этом смысле о них говорят как о «неявных определениях». Если значения терминов предполагаются фиксированными, тогда аксиомы просто определяют, что может быть сказано о референтах примитивных терминов, например о снарках и буджумировании. Но поскольку никакая информация о снарках и буджумировании не является релевантной к аксиоматическому представлению, что выходило бы за пределы того, что установлено аксиомами, аксиомы могут рассматриваться как говорящие о любой другой области, которая удовлетворяет аксиомам. Это ведет к взгляду, что референтами примитивных терминов являются переменные и что аксиомы не являются утверждениями, которые могут быть истинными или ложными. При этом толковании они скорее представляют схемы для разнообразия утверждений. Такая система аксиом не определяет единственной модели, а определяет целый класс таких моделей. Это понимал Гильберт.

Итак, согласно Шлимму, у нас есть две роли и две функции аксиоматической системы [20. С. 52] В реальной математической практике тогда есть четыре комбинации: Если мы рассматриваем семантический аспект аксиоматики, тогда фокус на понимании ее референтов. Если аксиомы понимаются синтаксически, референты не значат слишком много, и главное определяется отношениями между аксиомами и другими утверждениями. Если аксиомы рассматриваются как *семантически дескриптивные*, тогда они выражают известные отношения между снарками и буджумированием. Если они *синтаксически дескриптивные*, тогда они представляют уже принятые утверждения о них. Если аксиомы *синтаксически предписательны*, тогда они есть постулирование утверждений, которые должны рассматриваться как общие истины о снарках и буджумировании. В *семантической предписательной* роли они выражают определенные отношения, в которых референты снарка и буджумирования, чем бы они ни являлись, должны стоять в отношении друг друга как компоненты модели аксиом.

Интерпретация примитивных терминов в основаниях математики оказывается производной от нескольких факторов, в том числе от modus vivendi семантических предпосылок, определяемых прагматическими соображениями математической практики.

Литература

1. *Фреге Г.* Основоположения арифметики. Томск, 2000.
2. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М., 1948.
3. *Freudenthal H.* The Main Trends in the Foundations of Geometry in the 19 th Century // Logic, Methodology and Philosophy of Science / ed. Nagel E., etc. Stanford University Press, 1962.
4. *Райхенбах Г.* Философия пространства и времени. М., 1985.
5. *Shapiro S.* Space, Number and Structure // Philosophia Mathematica (3). Vol. 4 (1996). P. 148–173.
6. *Рассел Б.* Введение в математическую философию. М.: Гнозис, 1996.
7. *Frege G.* Philosophical and Mathematical Correspondence. Oxford, Blackwell, 1980.
8. *Shapiro S.* Philosophy of Mathematics. Oxford University Press, 1997.
9. *Klev A.* Dedekind and Hilbert on the Foundations of the Deductive Sciences // The Review of Symbolic Logic. 2011. Vol. 4, No. 4. P. 645–681.
10. *Sieg W.* Hilbert's Programs and Beyond. Oxford University Press, 2013.
11. *Putnam H.* Reason, Truth, and History. Cambridge, 1982.
12. *Benacerraf P.* Skolem and Sceptic // Proceedings of Aristotelian Society. 1985. Suppl. Vol. 59.
13. *Tselishchev V.* Mathematical Intuition and "Minimal" Hilbert's Philosophy // Proceedings of the XXIII World Philosophical Congress. Athens, 2013. (in print).

14. *Schlimm D.* Axioms in Mathematical Practice // Philosophia Mathematica (III), 2013. Vol. 21. P. 37–92.

15. *Куайн В.* Слово и объект. М., 2000.

16. *Fine K.* Reasoning with Arbitrary Objects. Oxford, Blackwell, 1985.

17. *Hallett M.* Hilbert's Axiomatic Method and the Laws of Thought // Mathematics and Mind / ed. George A. Oxford University Press, 1994.

18. *Demopoulos W.* Frege, Hilbert, and the Conceptual Structure of Model Theory // History and Philosophy of Logic. 1994. Vol. 15.

19. *Klev A.* Dedekind and Hilbert on the Foundations of the Deductive Sciences // The Review of Symbolic Logic. 2011. Vol. 4, No. 4. P. 645–681.

20. *Schlimm D.* Axioms in Mathematical Practice // Philosophia Mathematica (III). 2013. Vol. 21. P. 37–92.