

## ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

DOI 10.17223/20710410/26/10

УДК 519.7

## ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЦИРКУЛЯНТНОГО ТИПА С ПОРОГОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ВЕРШИНАХ

И. С. Быков

*Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия***E-mail:** patrick.no10@gmail.com

Рассматриваются дискретные динамические системы, заданные на графе-циркулянте, функционирование которых определяется пороговыми функциями. Получены общие свойства графа функционирования системы. В случае значности системы  $p = 2$  проведена классификация всех состояний системы в зависимости от длин серий нулей и единиц. Как результат, получены некоторые свойства циклов функционирования и нижняя оценка количества компонент связности. Для произвольного значения  $p$  сформулирован критерий существования неподвижных точек, определены их вид и количество.

**Ключевые слова:** дискретные динамические системы, граф функционирования, граф-циркулянт, пороговые функции, циклы графа функционирования, неподвижные точки.

## Введение

Динамические системы в целом и дискретные динамические системы в частности моделируют различные явления и объекты. С помощью теории динамических систем можно охарактеризовать процесс, который описывает система, тем самым спрогнозировать поведение объекта (явления) в будущем. Например, можно определить, к каким последствиям приведёт какой-либо процесс: к негативным или же, напротив, к позитивным. Одним из объектов, которые моделируют дискретные динамические системы, являются генные сети.

## 1. Постановка задачи

## 1.1. Граф функционирования

Дискретной динамической системой называется пара  $(\Omega, A)$ , где  $\Omega$  — множество состояний системы, а  $A$  — отображение, действующее на множестве состояний:

$$A : \Omega \rightarrow \Omega.$$

Функционированием дискретной динамической системы с начальным состоянием  $\omega \in \Omega$  назовём бесконечную последовательность  $\omega, A^1(\omega), A^2(\omega), A^3(\omega), \dots$ , где  $A^1(\omega) = A(\omega)$ ;  $A^{i+1}(\omega) = A(A^i(\omega))$  для  $i \in \mathbb{Z}_+$ .

Графом функционирования (или графом состояний) дискретной динамической системы называют ориентированный граф  $H = G(V, D)$  с петлями, где

$$V = \Omega; \quad D = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \in \Omega, A(\omega_1) = \omega_2\}.$$

Согласно [1], каждая компонента связности графа функционирования представляет собой единственный контур (возможно, петлю), к которому присоединены деревья, ориентированные к корню.

Любой контур этого графа будем называть *циклом функционирования*. Для любого состояния  $\omega$  из цикла функционирования длины  $r$  верно  $A^r(\omega) = \omega$ . Любую вершину с петлёй будем называть *неподвижной точкой*. Другими словами, если  $\omega$  — неподвижная точка, то  $A(\omega) = \omega$ . Висячую вершину графа функционирования будем называть *истоком*, т. е. если  $\omega$  — исток, то для любого  $\omega' \in \Omega$  имеем  $A(\omega') \neq \omega$ .

*Задача анализа функционирования* дискретных динамических систем состоит в определении качественных характеристик графа функционирования по заданным множеству всех состояний  $\Omega$  и отображению перехода  $A$ . К качественным характеристикам графа состояния относятся, например, следующие:

- 1) характеристики компонент связности (циклов функционирования);
- 2) характеристики неподвижных точек;
- 3) максимальная длина цикла графа функционирования;
- 4) максимальная длина цепи в графе функционирования;
- 5) характеристики истоков.

## 1.2. Динамическая система циркулянтного типа

Рассматриваются динамические системы, заданные на графе-циркулянте [2, 3].

*Граф-циркулянт* — ориентированный граф  $G_{n,k}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) с множеством вершин  $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$  и множеством рёбер  $D = \{(i, j) : i, j \in V, (i - j) \bmod n \leq k\}$ .

Определим множество всех состояний  $\Omega$  и отображение перехода  $A$ .

Каждой вершине  $i$  графа-циркулянта сопоставим значение  $x_i$  из множества  $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ . *Состоянием* назовем кортеж, составленный из значений всех вершин графа-циркулянта:  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ , т. е.  $|\Omega| = p^n$ . Если состояние имеет вид  $(x, x, \dots, x)$ , то будем обозначать его  $(\tilde{x})$ .

Определим отображение  $A$ , действующее на  $\Omega$  следующим образом:

$$A((x_0, x_1, \dots, x_{n-1})) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}),$$

где  $y_i$  вычисляется по правилу

$$y_i = \begin{cases} x_i + 1, & \text{если } \sum_{j=1}^k x_{i+j} < T \text{ и } x_i < p-1, \\ x_i - 1, & \text{если } \sum_{j=1}^k x_{i+j} \geq T \text{ и } x_i > 0, \\ x_i & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и далее все операции в индексах выполняются по модулю  $n$ .

В этом случае также говорят, что  $y_i$  принимает значение *симметричной пороговой функции* с пороговым значением  $T \in \mathbb{Z}$ . Аргументами этой функции являются значения вершин, дуги из которых входят в  $i$ -ю.

Такая постановка была рассмотрена ранее [2–4] при пороговых значениях  $T = 1$  и  $k$ . В этих случаях действие отображения  $A$  совпадает с действиями аддитивного и мультипликативного (при  $p = 2$ ) автомата соответственно.

Введём отношение эквивалентности на множестве всех состояний  $\Omega$ . Будем говорить, что  $X \sim X'$ , если  $X'$  получено из  $X$  циклическим сдвигом. Таким образом, всё множество  $\Omega$  разбивается на классы эквивалентности. В силу симметричности графа-

циркулянта и пороговой функции все состояния одного класса эквивалентности обладают одинаковыми характеристиками функционирования. Поэтому без ограничения общности при рассмотрении функционирования системы можно считать, что для любого начального состояния  $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  имеем  $x_0 \neq x_{n-1}$  (если  $X \neq (\tilde{x})$ ).

Набор параметров дискретной динамической системы  $p, n, k, T$  полностью задаёт множество состояний  $\Omega$  и отображение перехода  $A$ , а значит, и граф функционирования. Граф функционирования системы с таким набором параметров будем обозначать  $H_p(n, k, T)$ . На рис. 1 приведён пример такого графа.

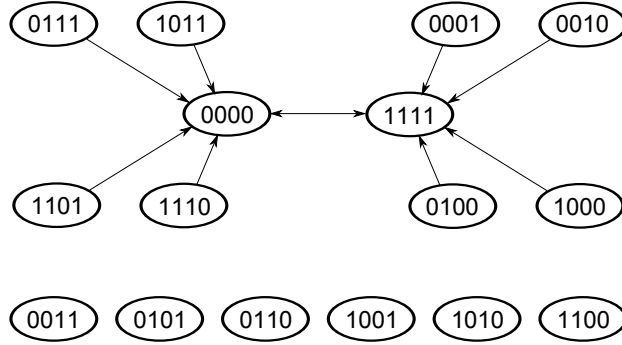


Рис. 1. Пример графа функционирования  $H_2(4, 3, 2)$

В работе исследуется функционирование дискретной динамической системы  $H_p(n, k, T)$ . В частности, рассматриваются циклы функционирования и неподвижные точки системы.

## 2. Общие свойства графа функционирования

Одним из параметров систем рассматриваемого вида является пороговое значение  $T \in \mathbb{Z}$ . Следующая лемма характеризует граф функционирования в зависимости от значения параметра  $T$ .

### Лемма 1.

- 1) Если  $T \leq 0$ , то  $A((x_0, \dots, x_{n-1})) = (\max(0, x_0 - 1), \dots, \max(0, x_{n-1} - 1))$ .
- 2) Если  $T > (p-1)k$ , то  $A((x_0, \dots, x_{n-1})) = (\min(p-1, x_0+1), \dots, \min(p-1, x_{n-1}+1))$ .
- 3) Если  $0 < T \leq (p-1)k$ , то граф функционирования содержит цикл

$$(\lceil T/k \rceil - 1, \lceil T/k \rceil - 1, \dots, \lceil T/k \rceil - 1) \leftrightarrow (\lceil T/k \rceil, \lceil T/k \rceil, \dots, \lceil T/k \rceil).$$

**Доказательство.** Пункты 1 и 2 следуют из определения отображения  $A$ . Докажем пункт 3. Пусть  $0 < T \leq (p-1)k$ .

Положим  $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (\lceil T/k \rceil - 1, \lceil T/k \rceil - 1, \dots, \lceil T/k \rceil - 1)$ . Тогда для любого  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  верно  $\sum_{j=1}^k x_{i+j} = k(\lceil T/k \rceil - 1) = k\lceil T/k \rceil - k < T$ . Значит, выполнено  $y_i = x_i + 1$ , т.е.  $A(X) = (\lceil T/k \rceil, \lceil T/k \rceil, \dots, \lceil T/k \rceil)$ .

Аналогично, если  $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (\lceil T/k \rceil, \lceil T/k \rceil, \dots, \lceil T/k \rceil)$ , то для любого  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  верно  $\sum_{j=1}^k x_{i+j} = k\lceil T/k \rceil \geq T$ . Значит, выполнено  $y_i = x_i - 1$ , откуда  $A(X) = (\lceil T/k \rceil - 1, \lceil T/k \rceil - 1, \dots, \lceil T/k \rceil - 1)$ . ■

**Следствие 1.** Пусть  $p = 2$ . Тогда

- 1) если  $T \leq 0$ , то  $A(X) = (\tilde{0})$  для любого  $X \in \Omega$ ;

- 2) если  $T > k$ , то  $A(X) = (\tilde{1})$  для любого  $X \in \Omega$ ;  
 3) если  $0 < T \leq k$ , то граф функционирования содержит цикл  $(\tilde{0}) \leftrightarrow (\tilde{1})$ .

**Лемма 2.**  $H_p(n, k, T) \cong H_p(n, k, (p-1)k - T + 1)$ .

**Доказательство.** Обозначим  $\hat{T} = (p-1)k - T + 1$ . Введём функцию  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$  следующим образом:  $\varphi(X) = ((p-1) - x_0, (p-1) - x_1, \dots, (p-1) - x_{n-1})$ . Докажем, что  $\varphi$  — изоморфизм графов  $H_p(n, k, T)$  и  $H_p(n, k, \hat{T})$ . Очевидно, что  $\varphi$  — биективное отображение (так как  $\varphi(\varphi(X)) = X$ ).

Пусть  $A_1, A_2$  — отображения, задающие графы функционирования  $H_p(n, k, T)$  и  $H_p(n, k, \hat{T})$  соответственно. Обозначим  $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ ,  $A_1(X) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ ,  $A_2(\varphi(X)) = (\hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{n-1})$ . Покажем, что  $\varphi(A_1(X)) = A_2(\varphi(X))$ . Возможны четыре случая:

- 1)  $y_i = 0$ . Следовательно,  $\sum_{j=1}^k x_{i+j} \geq T \Rightarrow \sum_{j=1}^k (p-1) - x_{i+j} \leq (p-1)k - T < \hat{T}$ .

Поскольку значение  $x_i$  равно 0 или 1, то  $\hat{y}_i = p-1$ .

- 2)  $y_i = p-1$ . Следовательно,  $\sum_{j=1}^k x_{i+j} < T \Rightarrow \sum_{j=1}^k (p-1) - x_{i+j} > (p-1)k - T \geq \hat{T}$ .

Поскольку значение  $x_i$  равно  $p-2$  или  $p-1$ , то  $\hat{y}_i = 0$ .

- 3)  $0 < y_i < p-1$ ,  $x_i = y_i - 1$ . Следовательно,

$$\sum_{j=1}^k x_{i+j} < T \Rightarrow \sum_{j=1}^k (p-1) - x_{i+j} > (p-1)k - T \geq \hat{T},$$

откуда  $\hat{y}_i = p - y_i - 1$ .

- 4)  $0 < y_i < p-1$ ,  $x_i = y_i + 1$ . Следовательно,

$$\sum_{j=1}^k x_{i+j} \geq T \Rightarrow \sum_{j=1}^k (p-1) - x_{i+j} \leq (p-1)k - T < \hat{T},$$

откуда  $\hat{y}_i = p - y_i - 1$ .

Заметим, что если  $y_i = x_i$ , то значение  $y_i$  равно  $p-1$  либо 0.

Таким образом,  $\varphi(A_1(X)) = A_2(\varphi(X))$  для всех  $X \in \Omega$ , откуда следует, что  $\varphi$  — изоморфизм. ■

**Следствие 2.** При  $p = 2$  имеем  $H_2(n, k, T) \cong H_2(n, k, k - T + 1)$ .

В силу лемм 1 и 2 при изучении качественных характеристик графов функционирования достаточно рассматривать пороговые значения

$$1 \leq T \leq \left\lfloor \frac{(p-1)k + 1}{2} \right\rfloor,$$

в частности, при  $p = 2$

$$1 \leq T \leq \left\lfloor \frac{k + 1}{2} \right\rfloor.$$

### 3. Циклы функционирования

Рассмотрим случай  $p = 2$ . При этом  $|\Omega| = 2^n$ , а пороговая функция задаётся следующим образом:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j=1}^k x_{i+j} < T, \\ 0, & \text{если } \sum_{j=1}^k x_{i+j} \geq T. \end{cases}$$

В силу результатов предыдущего пункта считаем, что  $1 \leq T \leq \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ . При рассмотрении функционирования системы будем также полагать, что для любого начального состояния  $X \in \Omega \setminus \{(\tilde{0}), (\tilde{1})\}$  выполнено  $x_0 = 0$ ,  $x_{n-1} = 1$ .

*Серией* состояния  $X$  назовём максимальную по включению последовательность компонент  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+l-1}$ , таких, что  $x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+l-1}$ . Число  $l$  называется длиной серии. Количество серий состояния  $X$  будем обозначать  $b(X)$ .

**Лемма 3.**  $b(A(X)) \leq b(X)$ .

**Доказательство.** Пусть  $A(X) = Y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ . Покажем, что если  $y_i \neq y_{i+1}$ , то  $x_{i+1} = y_{i+1}$ . Пусть  $y_i = 0$ ,  $y_{i+1} = 1$ . Тогда

$$\sum_{j=1}^k x_{i+j} \geq T; \quad \sum_{j=1}^k x_{(i+1)+j} = \sum_{j=2}^{k+1} x_{i+j} < T.$$

Следовательно,  $x_{i+1} = 1$ . Аналогично для  $y_i = 1$ .

Получили  $x_{i+1} = y_{i+1}$ . Таким образом, имеем, что если  $y_i$  и  $y_j$  — начала двух различных серий в  $Y$ , то  $x_i$  и  $x_j$  лежат в различных сериях состояния  $X$ . Следовательно, количество серий в  $X$  не меньше количества серий в  $Y$ . ■

**Следствие 3.** Если состояния  $X_1$  и  $X_2$  лежат в одном цикле функционирования, то  $b(X_1) = b(X_2)$ .

### 3.1. Состояния с длинными сериями

Состояние  $X$  из  $\Omega \setminus \{(\tilde{0}), (\tilde{1})\}$  будем называть *состоянием с длинными сериями*, если длина каждой серии из нулей не меньше  $k - T + 1$ , а длина каждой серии из единиц не меньше  $T$ .

На множестве состояний с длинными сериями определим инъективную кодирующую функцию  $\psi$ :

$$\psi((\underbrace{0\dots 0}_{s_0} \underbrace{0\dots 0}_{k-T+1} \underbrace{1\dots 1}_{s_1} \underbrace{1\dots 1}_T \dots \underbrace{0\dots 0}_{s_{b-2}} \underbrace{0\dots 0}_{k-T+1} \underbrace{0\dots 1}_{s_{b-1}} \underbrace{1\dots 1}_T)) = (s_0, s_1, \dots, s_{b-2}, s_{b-1}).$$

**Лемма 4.** Пусть состояние с длинными сериями  $X$  кодируется вектором  $(s_0, s_1, \dots, s_{b-1})$ . Тогда состояние  $A(X)$  (или некоторое эквивалентное ему) кодируется вектором  $(s_1, s_2, \dots, s_{b-2}, s_{b-1}, s_0)$ .

**Доказательство.** Пусть  $X$  — состояние с длинными сериями, которое кодируется согласно условию леммы. Рассмотрим  $X$  и  $A(X)$ :

$$\begin{aligned} X &= \dots \underbrace{1\dots 1}_T \underbrace{0\dots 0}_{s_{2i}} \underbrace{0\dots 0}_{k-T+1} \underbrace{1\dots 1}_{s_{2i+1}} \underbrace{1\dots 1}_T \underbrace{0\dots 0}_{s_{2i+2}} \underbrace{0\dots 0}_{k-T+1} \underbrace{1\dots 1}_{s_{2i+3}} \underbrace{1\dots 1}_T \dots \\ A(X) &= \dots \underbrace{1\dots 1}_T \underbrace{1\dots 1}_{s_{2i}} \underbrace{0\dots 0}_{k-T+1} \underbrace{0\dots 0}_{s_{2i+1}} \underbrace{1\dots 1}_T \underbrace{1\dots 1}_{s_{2i+2}} \underbrace{0\dots 0}_{k-T+1} \underbrace{0\dots 0}_{s_{2i+3}} \underbrace{1\dots 1}_T \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что  $A(X)$  — состояние с длинными сериями. Нетрудно видеть, что  $A(X)$  (или некоторое эквивалентное ему) кодируется вектором  $(s_1, s_2, \dots, s_{b-2}, s_{b-1}, s_0)$ . ■

**Следствие 4.** Любое состояние с длинными сериями лежит в цикле графа функционирования, который состоит только из состояний с длинными сериями.

**Доказательство.** Из леммы 4 следует, что если состояние  $X$  кодируется вектором  $(s_0, s_1, \dots, s_{b-1})$ , то состояние  $A^2(X)$  или некоторое эквивалентное ему кодируется вектором  $(s_2, s_3, \dots, s_{b-1}, s_0, s_1)$ . Это означает, что  $X \sim A^2(X)$ , откуда следует, что  $X$

лежит в цикле графа функционирования. В силу леммы 4 очевидно, что все состояния этого цикла — состояния с длинными сериями. ■

Заметим, что максимальная длина цикла, состоящего из состояний с длинными сериями, равна  $2n$ . Она достигается, когда  $X$  и  $A(X)$  не эквивалентны и  $(n, k+1) = 1$ . В общем случае для циклов, состоящих из состояний с длинными сериями, длина цикла нацело делит  $2n$ .

Так как каждый цикл функционирования содержит состояния не более чем из двух классов эквивалентности, подсчитав количество этих классов эквивалентности для состояний с длинными сериями, можно получить оценку снизу количества циклов функционирования (а значит, и компонент связности).

**Утверждение 1.** Число компонент связности в графе  $H_2(n, k, T)$  не меньше, чем

$$1 + \sum_{i=1}^{\lfloor n/(k+1) \rfloor} \tilde{P}(n - (k-1)i, 2i),$$

где  $\tilde{P}(a, b)$  — число циклических разбиений  $a$  на  $b$  слагаемых.

**Доказательство.** Пусть  $X$  — состояние с длинными сериями,  $\psi(X) = (s_0, s_1, \dots, s_{b-1})$ . Сумма компонент этого вектора равна  $(n - (k-1)b/2)$ .

По лемме 4 и следствию 4 каждому циклическому слову соответствует хотя бы один цикл, а значит, хотя бы одна компонента связности. Отсюда следует, что количество компонент связности, состояния цикла которых содержат  $b$  серий, не меньше

$$\tilde{P}(n - (k-1)b/2, b).$$

Для подсчёта всех компонент связности необходимо учесть различные количества серий состояния:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor n/(k+1) \rfloor} \tilde{P}(n - (k-1)i, 2i).$$

Верхний предел суммирования равен  $\lfloor n/(k+1) \rfloor$ , так как минимальная сумма длин двух соседних серий равна  $k+1$ .

Для завершения доказательства осталось учесть тривиальный цикл  $(\tilde{0}) \leftrightarrow (\tilde{1})$ . ■

Наилучшие результаты эта нижняя оценка показывает при  $(n, k+1) = 1$ . В этом случае учитываются все циклы, состоящие из состояний с длинными сериями, так как каждый класс эквивалентности целиком попадает в один и тот же цикл.

Подсчёт числа циклических разбиений

В полученной нижней оценке числа компонент связности фигурирует число циклических разбиений. Приведём формулу для подсчёта этого числа.

**Теорема 1.**

$$\tilde{P}(n, k) = \frac{1}{k} \sum_{\substack{1 \leq d \leq k, \\ \frac{k}{(k,n)} \mid d}} \binom{(d, k)n/k - 1}{(d, k)n/k - (d, k)}.$$

**Доказательство.** Воспользуемся леммой Бернсайда

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|,$$

где  $X$  — некоторое множество;  $G$  — подгруппа симметрической группы, действующей на множестве  $X$ ;  $X^g$  — множество элементов из  $X$ , которые  $g$  оставляет на месте.

Положим  $X$  — множество упорядоченных разбиений числа  $n$  на  $k$  слагаемых,  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} \leq S_k$  — подгруппа перестановок сдвига, где  $g_i$  — перестановка, сдвигающая на  $i$  позиций.

**Лемма 5.**

$$|X^{g_i}| = \begin{cases} \binom{(i,k)n/k - 1}{(i,k)n/k - (i,k)}, & \text{если } k/(i,k) \mid n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Доказательство.** Для того чтобы  $g_i$  оставляла некоторое слово длины  $k$  на месте, нужно, чтобы период этого слова делил  $i$  нацело. Поэтому если  $i \nmid k$ , то  $|X^{g_i}| = |X^{g_{(i,k)}}|$ .

Если  $i \mid k$ , но  $(k/i) \nmid n$ , то не существует упорядоченного разбиения, которое  $g_i$  оставляет на месте:  $|X^{g_i}| = 0$ .

Пусть теперь  $i \mid k$  и  $(k/i) \mid n$ . Тогда  $|X^{g_i}|$  равно числу упорядоченных разбиений числа  $in/k$  на  $i$  слагаемых, то есть

$$|X^{g_i}| = \binom{in/k - 1}{in/k - i}.$$

В итоге имеем

$$|X^{g_i}| = \begin{cases} |X^{g_{(i,k)}}|, & \text{если } i \nmid k, \\ \binom{in/k - 1}{in/k - i}, & \text{если } i \mid k \text{ и } (k/i) \mid n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что если  $i \mid k$ , то  $i = (i,k)$ , из чего и следует утверждение леммы. ■

Покажем, что

$$(k/(i,k)) \mid n \iff (k/(k,n)) \mid i.$$

Действительно,

$$(k/(i,k)) \mid n \iff k \mid (i,k)n \iff (k/(n,k)) \mid ((i,k)n/(n,k)).$$

Так как  $k/(n,k)$  и  $n/(n,k)$  взаимно просты, то  $(k/(n,k)) \mid (i,k)$ , что выполнено тогда и только тогда, когда  $(k/(k,n)) \mid i$ . Применяя лемму Бернсайда к значениям мощностей множеств  $X^{g_i}$ , получаем

$$\tilde{P}(n,k) = |X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{k} \sum_{\substack{1 \leq d \leq k, \\ \frac{k}{(k,n)} \mid d}} \binom{(d,k)n/k - 1}{(d,k)n/k - (d,k)}.$$

Теорема доказана. ■

### 3.2. Состояния с короткими сериями

Состояние  $X$  будем называть *состоянием с короткими сериями*, если длина каждой серии из нулей не больше  $(k - T)$ , а каждой серии из единиц — не больше  $(T - 1)$ .

**Лемма 6.** Пусть состояние  $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  лежит в цикле графа функционирования,  $Y = A(X) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ . Тогда если  $x_i \neq x_{i+1}$ , то  $x_i = y_i$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_i = 1$ . Рассмотрим  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{aligned} X &= \dots 0 \ 0 & 1 \ 1 \ \dots 1 \ 1 & & 0 \ 0 \ \dots 0 \ 0 & & 1 \ 1 \ \dots, \\ Y &= \dots y_{i_1} & \dots y_i & & \dots y_{i_2} & & \dots \end{aligned}$$

Пусть  $y_i \neq x_i$ . Следовательно,  $y_i = 0$ . Очевидно, что  $y_j \leq y_i$  для всех  $i_1 < j < i_2$ . Это значит, что  $y_j = 0$  для всех  $i_1 < j < i_2$  и в  $Y$  серий меньше, чем в  $X$ . Но  $X$  и  $Y$  лежат в одном цикле. Противоречие с леммой 3.

Аналогично для  $x_i = 0$ . ■

**Теорема 2.** Если состояние лежит в цикле графа функционирования, то оно является либо состоянием с длинными сериями, либо состоянием с короткими сериями.

**Доказательство.** Предположим обратное; тогда существуют две подряд идущие серии  $b_1$  и  $b_2$ , такие, что  $b_1$  — короткая, а  $b_2$  — длинная. Положим  $i + 1$  — индекс начала серии  $b_1$ ; пусть  $b_1$  — серия из нулей, а  $b_2$  — серия из единиц.

Рассмотрим  $y_i$ . Так как длина серии  $b_1$  не превосходит  $k - T$ , а серии  $b_2$  — не меньше  $T$ , то  $\sum_{j=1}^k x_{i+j} \geq T$ , откуда следует, что  $y_i = 0$ . Это противоречит лемме 6.

Аналогично рассматривается случай, когда  $b_1$  — серия из единиц, а  $b_2$  — из нулей. ■

**Следствие 5.** Все циклы функционирования делятся на три типа:

- тривиальный цикл  $(\tilde{0}) \leftrightarrow (\tilde{1})$ ;
- циклы, состоящие из состояний с длинными сериями;
- циклы, состоящие из состояний с короткими сериями.

### 3.3. Построение циклов с короткими сериями

Состояния с короткими сериями в системах с большими параметрами можно строить из подходящих систем с меньшими параметрами, используя одну из следующих двух конструкций. Обозначим вес состояния (количество ненулевых компонент)  $W(X)$ .

**Теорема 3.** Пусть имеется  $q$  систем;  $X_i$  — состояние с длинными сериями в системе с параметрами  $n_i, k_i, T_i$  и отображением  $A_i$ . Тогда если существуют такие  $k$  и  $T$ , что для любого  $0 \leq j \leq q - 1$  выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} k &= k_j + \sum_{i=0}^{q-1} n_i - n_j, \\ T &= T_j + \sum_{i=0}^{q-1} W(X_i) - W(X_j), \\ W(X) &= W(A_j(X_j)), \end{aligned}$$

то состояние  $X = X_0 X_1 \dots X_{q-1}$  лежит в цикле графа функционирования системы с параметрами  $n, k, T$ , где  $n = \sum_{i=0}^{q-1} n_i$ , и является состоянием с короткими сериями.

**Доказательство.** Покажем, что  $A(X) = A_0(X_0)A_1(X_1) \dots A_{q-1}(X_{q-1})$ . Пусть  $X_i = (x_0^i, x_1^i, \dots, x_{n_i-1}^i)$ ,  $A(X) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ . Рассмотрим  $y_i$ . Без ограничения общности будем полагать, что  $0 \leq i \leq n_0 - 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} y_i = 0 &\iff \sum_{j=i+1}^{n_0-1} x_j^0 + \sum_{j=0}^{n_1-1} x_j^1 + \dots + \sum_{j=0}^{n_{q-1}-1} x_j^{q-1} + \sum_{j=0}^{k_0-(n_0-i-1)} x_j^0 \geq T \iff \\ &\iff \sum_{j=i+1}^{n_0-1} x_j^0 + \sum_{j=1}^{q-1} W(X_j) + \sum_{j=0}^{k_0-(n_0-i-1)} x_j^0 \geq T \iff \sum_{j=1}^{k_0} x_{i+j}^0 \geq T_0. \end{aligned}$$



Так как все переходы равносильны, то и  $y_i = 1 \iff \sum_{j=1}^{k_0} x_{i+j}^0 < T_0$ .

Получили требуемое:  $A(X) = A_0(X_0)A_1(X_1) \dots A_{q-1}(X_{q-1})$ .

В силу того, что  $W(X_i) = W(A_i(X_i))$ , очевидно, что верно и

$$A^2(X) = A_0^2(X_0)A_1^2(X_1) \dots A_{q-1}^2(X_{q-1}).$$

Значит, найдётся такое  $i$ , что  $A^i(X) = X$ . Отсюда следует, что  $X$  лежит в цикле графа функционирования системы с параметрами  $n, k, T$ .

Теперь покажем, что  $X$  — состояние с короткими сериями. Длина самой длинной серии из единиц не превосходит  $\max(W(X_i))$ . Так как  $T_i > 0$ , то  $T > \max(W(X_i))$ .

Длина самой длинной серии из нулей не превосходит  $\max(n_i - W(X_i))$ ;  $k - T = k_0 + \sum_{j=1}^{q-1} (n_j - W(X_j)) - T_0$ . Так как  $k_i - T_i > 0$ , имеем  $k - T + 1 > \max(n_i - W(X_i))$ .

Получили, что все серии в  $X$  короткие. ■

**Теорема 4.** Пусть состояние  $X_0$  лежит в цикле графа функционирования системы с параметрами  $n_0, k_0, T_0$  и отображением  $A_0$ . Тогда если  $W(X_0) = W(A_0(X_0))$ , то состояние  $X = \underbrace{X_0 X_0 \dots X_0}_{m} X_0$  лежит в цикле графа функционирования системы с параметрами  $n = mn_0, k = k_0 + ln_0, T = T_0 + lW(X_0)$  и является состоянием с короткими сериями для всех  $0 < l < m$ .

**Доказательство.** Покажем, что  $A(X) = A_0(X_0)A_0(X_0) \dots A_0(X_0)$ . Пусть  $A(X) = (y_0, y_1, \dots, y_{mn'-1})$ ,  $X_0 = (x_0, x_1, \dots, x_{n_0-1})$ . Рассмотрим  $y_i$ . Без ограничения общности будем полагать, что  $0 \leq i \leq n_0 - 1$ . Тогда

$$y_i = 0 \iff \sum_{j=1}^k x_{i+j} = \sum_{j=1}^{k_0} x_{i+j} + lW(X_0) \geq T \iff \sum_{j=1}^{k'} x_{i+j} \geq T_0.$$

Так как все переходы равносильны,  $y_i = 1 \iff \sum_{j=1}^{k_0} x_{i+j} < T_0$ . Получили требуемое:  $A(X) = A_0(X_0)A_0(X_0) \dots A_0(X_0)$ . В силу того, что  $W(X_0) = W(A_0(X_0))$ , очевидно, что верно и  $A^2(X) = (A_0)^2(X_0) (A_0)^2(X_0) \dots (A_0)^2(X_0)$ . Так как  $X_0$  лежит в цикле, за конечное число шагов вернёмся в  $X$ .

То, что  $X$  — состояние с короткими сериями, доказывается аналогично предыдущей теореме. ■

#### 4. Неподвижные точки

Вновь рассматриваем случай  $p = 2$ .

Частным случаем циклов функционирования являются неподвижные точки. Напомним, что  $X$  является неподвижной точкой, если  $A(X) = X$ . Для того чтобы  $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  была неподвижной точкой, необходимо и достаточно:

- если  $x_i = 0$ , то  $\sum_{j=1}^k x_{i+j} \geq T$ ,
- если  $x_i = 1$ , то  $\sum_{j=1}^k x_{i+j} < T$ .

Докажем критерий существования неподвижных точек в системе, а также, если они существуют, укажем их количество. Сначала докажем необходимые леммы, устанавливающие свойства неподвижных точек.

**Лемма 7.** Если состояние  $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  является неподвижной точкой системы с параметрами  $n, k, T$ , то  $x_i = x_{i+k+1}$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_i = 0$  для некоторого  $i$ . Так как  $X$  — неподвижная точка, то  $\sum_{j=1}^k x_{i+j} \geq T$ . Так как  $T > 0$ , среди  $1, 2, \dots, k$  найдётся хотя бы одно  $j$ , такое, что  $x_{i+j} = 1$ . Выберем наименьшее такое  $j$  и обозначим его  $j'$ . Снова, в силу того, что  $X$  — неподвижная точка, верно  $\sum_{j=1}^k x_{(i+j') + j} < T$ . Заметим, что в силу выбора  $j'$  выполняется  $\sum_{j=j'+1}^k x_{i+j} \geq T - 1$ ; с другой стороны, имеем

$$T > \sum_{j=1}^k x_{(i+j') + j} = \sum_{j=j'+1}^k x_{i+j} + \sum_{j=k+1}^{j'+k} x_{i+j} \Rightarrow \sum_{j=j'+1}^k x_{i+j} = T - 1; \sum_{j=k+1}^{j'+k} x_{i+j} = 0.$$

Так как  $k + 1 \leq j' + k$ , верно  $x_{i+k+1} = 0 = x_i$ .

Аналогично, если  $x_i = 1$ . ■

**Следствие 6.** Если состояние  $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  является неподвижной точкой системы с параметрами  $n, k, T$ , то  $x_i = x_{i+r(k+1)}$  для любого  $r$  из  $\mathbb{Z}_+$ .

**Лемма 8.** Если состояние  $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  является неподвижной точкой системы с параметрами  $n, k, T$ , то  $x_i = x_{i+(n,k+1)}$ .

**Доказательство.** Пусть  $k + 1 = r(n, k + 1)$  и  $n = q(n, k + 1)$ . Заметим, что  $r$  и  $q$  — взаимно простые числа. Докажем, что существует такое  $j \geq 0$ , что  $k + 1$  делит  $((n, k + 1) + jn)$  нацело. Запишем

$$\frac{(n, k + 1) + jn}{k + 1} = \frac{1 + jq}{r} = w,$$

где  $w \in \mathbb{R}_+$ .

По свойству взаимно простых чисел существуют  $a, b \in \mathbb{Z}$ , такие, что  $ar + bq = 1$ . Тогда  $a'r + b'q = 1$  для  $a' = a + qt$ ,  $b' = b - rt$  при любом  $t \in \mathbb{Z}$ . В силу того, что  $r \geq 1$  и  $q \geq 1$ , можно выбрать  $t$  так, чтобы выполнялись условия  $a' > 0$ ,  $b' < 0$ . Возьмём  $w = a'$  и  $j = -b'$  (при таком  $t$ ); получим, что  $k + 1$  делит  $((n, k + 1) + jn)$  нацело.

Обозначим  $j' = ((n, k + 1) + jn)/(k + 1)$ . Тогда  $x_{i+j'(k+1)} = 0$  по следствию из леммы 7;  $(i + (n, k + 1) + jn) \equiv i + (n, k + 1) \pmod{n}$ . ■

**Следствие 7.** Если состояние  $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  является неподвижной точкой системы с параметрами  $n, k, T$ , то  $x_i = x_{i+r(n,k+1)}$  для любого  $r \in \mathbb{Z}_+$ .

#### 4.1. Критерий существования неподвижных точек

**Теорема 5.** Пусть система задана параметрами  $n, k, T$ . Тогда неподвижные точки в системе существуют в том и только в том случае, когда выполняется каждое из следующих трёх условий:

- 1)  $(n, k + 1) > 1$ ;
- 2)  $k + 1 - (k + 1)/(n, k + 1) \geq T$ ;
- 3)  $(k + 1)/(n, k + 1)$  нацело делит  $T$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $X$  — неподвижная точка.

- 1) Если  $(n, k + 1) = 1$ , то по лемме 8  $X = (\tilde{0})$  или  $X = (\tilde{1})$ . Противоречие, так как  $(\tilde{0})$  и  $(\tilde{1})$  не являются неподвижными точками.

- 2) Пусть  $k + 1 - (k + 1)/(n, k + 1) < T$  и существует хотя бы одно такое  $i$ , что  $x_i = 0$ . Тогда по лемме 8  $X$  имеет вид  $(\dots, 0, \underbrace{\dots, 0}_{(n, k+1)}, \underbrace{\dots, 0}_{(n, k+1)}, \dots, \underbrace{\dots, 0}_{(n, k+1)}, \dots)$ .

Отсюда следует, что  $\sum_{j=1}^k x_{i+j} \leq k + 1 - (k + 1)/(n, k + 1) < T$ , а это означает, что  $x_i = 1$ . Противоречие.

- 3) Пусть  $k' = (k + 1)/(n, k + 1)$  не делит нацело  $T$  и существует хотя бы одно  $i$ , для которого  $x_i = 0$ . Тогда существуют такие  $t, q$  из  $\{0, 1, \dots, k'\}$ , что

$$\sum_{j=i+t(n, k+1)+1}^{i+(t+1)(n, k+1)} x_{i+j} \neq \sum_{j=i+q(n, k+1)+1}^{i+(q+1)(n, k+1)} x_{i+j}.$$

Отсюда следует, что существует такое  $r$  ( $1 \leq r < (n, k + 1)$ ), что  $x_{i_q} \neq x_{i_t}$ , где  $i_q = i + q(n, k + 1) + r$ ;  $i_t = i + t(n, k + 1) + r$ . Очевидно, что  $|i_t - i_q|$  кратно  $(n, k + 1)$ , тогда по лемме 8 имеем  $x_{i_q} = x_{i_t}$ . Противоречие.

Достаточность. Пусть выполнены все три условия. Построим неподвижную точку. Обозначим  $T_k = T(n, k + 1)/(k + 1)$ . Рассмотрим состояние

$$X = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(n, k+1)-T_k}, \underbrace{1, \dots, 1}_{T_k}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n, k+1)-T_k}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{T_k}).$$

Легко убедиться, что  $X$  — неподвижная точка. ■

#### 4.2. Количество неподвижных точек

**Теорема 6.** Пусть система задана параметрами  $n, k, T$ , которые удовлетворяют условию существования неподвижных точек. Тогда количество неподвижных точек равно  $\binom{(n, k + 1)}{T_k}$ , где  $T_k = T(n, k + 1)/(k + 1)$ .

**Доказательство.** Как следует из леммы 8 и теоремы 5, неподвижная точка задаётся первыми  $(n, k + 1)$  компонентами, сумма которых должна быть равна  $T_k$ .

Обратно: пусть сумма первых  $(n, k + 1)$  компонент состояния  $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  равна  $T_k$ , а все остальные компоненты получены повторением первых  $(n, k + 1)$  компонент необходимое число раз. Покажем, что  $X$  — неподвижная точка системы. В силу свойств состояния  $X$  можно провести следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k x_{i+j} &= \frac{k + 1}{(n, k + 1)} \sum_{j=1}^{(n, k+1)} x_{i+j} - x_{i+k+1} = \frac{k + 1}{(n, k + 1)} \sum_{j=1}^{(n, k+1)} x_{i+j} - x_i = \\ &= \frac{k + 1}{(n, k + 1)} \sum_{j=0}^{(n, k+1)-1} x_j - x_i = T = x_i. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^k x_{i+j} = \begin{cases} T - 1, & \text{если } x_i = 1, \\ T & \text{иначе.} \end{cases}$$

Это означает, что  $X$  — неподвижная точка.

Следовательно, неподвижная точка однозначно задаётся расстановкой  $T_k$  единиц на первых  $(n, k + 1)$  позициях и других неподвижных точек, кроме состояний такого вида, не существует. То есть число неподвижных точек равно  $\binom{(n, k + 1)}{T_k}$ . ■

### 4.3. Обобщение на случай произвольного $p$

Результаты о неподвижных точках в случае  $p = 2$  можно обобщить на случай произвольного  $p$ . Из определения (1) следует, что если состояние  $X$  в системе с параметрами  $p, n, k, T$  является неподвижной точкой, то либо  $x_i = 0$ , либо  $x_i = p - 1$  для любого  $i$  (в противном случае значение  $x_i$  изменится). Теперь понятно, что так как значения всех компонент в неподвижной точке делятся на  $p - 1$ , то рассмотрение неподвижных точек при произвольном значении  $p$  эквивалентно случаю двоичной системы с параметрами  $n, k, \lceil T/(p - 1) \rceil$ .

Теоремы о неподвижных точках можно обобщить следующим образом.

**Теорема 7.** Пусть система задана параметрами  $p, n, k, T$ . Тогда неподвижные точки в системе существуют в том и только в том случае, когда выполняется каждое из следующих трёх условий:

- 1)  $(n, k + 1) > 1$ ;
- 2)  $k + 1 - (k + 1)/(n, k + 1) \geq \lceil T/(p - 1) \rceil$ ;
- 3)  $(k + 1)/(n, k + 1)$  нацело делит  $\lceil T/(p - 1) \rceil$ .

**Теорема 8.** Пусть система задана параметрами  $p, n, k, T$ , которые удовлетворяют условию существования неподвижных точек. Тогда количество неподвижных точек равно  $\binom{(n, k + 1)}{T_k}$ , где  $T_k = \frac{\lceil T/(p - 1) \rceil (n, k + 1)}{k + 1}$ .

Доказательства теорем 7 и 8 аналогичны доказательствам теорем для  $p = 2$ .

### Заключение

В ходе работы основным предметом изучения были циклы графа функционирования дискретных динамических систем заданного вида. Отдельно, как частный случай циклов функционирования, рассмотрены неподвижные точки (циклы длины 1). Для них получено полное их описание при произвольном значении  $p$ : необходимое и достаточное условие их существования, их количество и вид.

Циклы функционирования в общем случае рассматривались для систем с параметром  $p = 2$ . Установлено, что любой цикл функционирования либо полностью состоит из состояний с длинными сериями, либо полностью — из состояний с короткими. Для состояний с длинными сериями доказано, что любое из них лежит в цикле графа функционирования. Построены две конструкции для получения состояний с короткими сериями, лежащих в циклах, из состояний систем с меньшими значениями параметров.

В дальнейшем планируется получить полное описание всех циклов из состояний с короткими сериями и с помощью этого улучшить оценку количества компонент связности графа функционирования.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Harary F. The number of functional digraphs // Math. Ann. 1959. V. 139. P. 203–210.
2. Евдокимов А. А., Лиховидова Е. О. Дискретная модель генной сети с пороговыми функциями // Вестник ТГУ. Приложение. 2008. № 2. С. 18–21.
3. Кутумова Е. О. Циклы функционирования дискретной модели регуляторного контура генной сети с пороговыми функциями // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 38. № 3. С. 65–75.
4. Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А. Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 206–212.