ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 512.579

О СИСТЕМАХ ОБРАЗУЮЩИХ ДИАГОНАЛЬНЫХ ПОЛИГОНОВ НАД ПОЛУГРУППАМИ ИЗОТОННЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Т. В. Апраксина

Национальный исследовательский университет «МИЭТ», г. Москва, Россия

E-mail: taya.apraksina@gmail.com

Исследуются диагональные полигоны (автоматы) над полугруппами изотонных преобразований частично упорядоченного множества и непрерывных отображений топологического пространства в себя. Найдено необходимое условие цикличности диагонального правого полигона над полугруппой непрерывных отображений компакта в себя. Доказано отсутствие счётного множества образующих диагонального биполигона над полугруппой изотонных отображений множества натуральных чисел в себя. Изучаются связи между понятиями изотонности и непрерывности.

Ключевые слова: *полигон, диагональный полигон, непрерывные отображения, изотонные отображения, система образующих.*

Введение

Изотонные (то есть сохраняющие порядок) отображения $X \to Y$, где X и Y — частично упорядоченные множества, изучались многими авторами. При $X = Y$ получаем множество $O(X)$ изотонных отображений $X \to X$, которое является полугруппой относительно композиции $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$, где $x \in X$, $\alpha, \beta \in O(X)$. В случае, если рассматриваются частичные отображения $\alpha : X_1 \to X$, где $X_1 \subseteq X$, понятие изотонности может быть определено разными неэквивалентными способами [1]. Другое обобщение понятия изотонного отображения состоит в переходе от частичного порядка к квазипорядку или вообще произвольному бинарному отношению [1]. Вместе с тем можно заметить, что понятие изотонного отображения является частным случаем непрерывного отображения $X \to Y$, если X и Y наделить топологиями, естественным образом связанными с заданными на X и Y частичными порядками. Для конечных множеств X и Y это установлено в [2], а в общем случае — в п. 1 настоящей работы.

Полугруппа $C(X)$ непрерывных отображений $X \to X$ (где X — топологическое пространство) также подвергалась интенсивному изучению с алгебраической точки зрения. Этой полугруппе посвящён обстоятельный обзор [3]. Один из центральных вопросов этой теории — в каких случаях топологическое пространство X определяется с точностью до гомеоморфизма своей полугруппой $C(X)$? М. Торнтон [4] дал абстрактную характеризацию полугрупп, изоморфных полугруппе непрерывных отображений $C(X)$. Он рассмотрел гомоморфизмы этих полугрупп и показал, что любой изоморфизм между полугруппами $C(X)$ и $C(Y)$ индуцируется гомеоморфизмом или дуальным гомеоморфизмом (это понятие определяется для некоторого класса T_0-пространств) между топологическими T_0-пространствами X и Y. Ранее Л. М. Глускин [5] доказал аналогичное утверждение для частично упорядоченных множеств с нетривиальными порядками. Б. С. Нурутдинов [6] рассматривал аналогичные вопросы определяемости топологического пространства другими полугруппами отображений, в частности полугруппами замкнутых отображений.

Далее рассматриваются полигоны над полугруппами. Хорошо известно, что полигон над полугруппой является *алгебраической моделью автомата*, где элементы множества X — состояния, а S — входные сигналы (см., например, [7]). В п. 2 и 3 изучаются полугруппы непрерывных/изотонных отображений с точки зрения их диагональных полигонов и биполигонов. Ранее автором было доказано, что для отрезка числовой прямой с обычной топологией диагональный правый полигон над полугруппой $C(X)$ непрерывных отображений $X \to X$ является циклическим. В п. 2 приводится условие на компакт X, необходимое для цикличности полигона $(C(X) \times C(X))_{C(X)}$. В п. 3 рассматривается диагональный биполигон над полугруппой $O(\mathbb{N})$ всех изотонных преобразований $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Доказано отсутствие счётной системы образующих этого полигона.

1. Изотонность и непрерывность

В [2] Р. Стонг исследовал конечные топологические пространства X. Он определил U_x для $x \in X$ как пересечение всех открытых множеств, содержащих x, и отношение $\leqslant$ на X по правилу $x \leqslant y \Leftrightarrow U_x \subseteq U_y$. В случае конечного множества X пересечение любой совокупности открытых множеств открыто. Поэтому все U_x открыты. Однако данная конструкция может быть легко перенесена и на бесконечные множества X.

Пусть X — произвольное частично упорядоченное множество, не обязательно конечное. Введём на X топологию, приняв множество подмножеств вида $U_x = (-\infty, x] = \{y \in X : y \leqslant x\}$ за базу открытых множеств (тот факт, что это база топологии, проверятся непосредственно). Назовем эту топологию *порядковой топологией.* Обычно порядковая топология рассматривалась для линейно упорядоченных множеств, но и в случае частично упорядоченного множества получается топология. Легко видеть, что антисимметричность отношения $\leqslant$ равносильна тому факту, что X является T_0-пространством. Можно расссматривать квазипорядок вместо порядка, тогда от аксиомы T_0 придётся отказаться.

Утверждение 1. Пусть X, Y — частично упорядоченные множества и $\alpha : X \to Y$ — отображение. Наделим X и Y порядковыми топологиями. Тогда α изотонно в том и только в том случае, если оно непрерывно.

Доказательство. Необходимость. Пусть α изотонно. Возьмём любой элемент $y \in Y$. Так как $\{(-\infty, y] : y \in Y\}$ — база топологии в Y, то достаточно доказать, что $(-\infty, y]\alpha^{-1}$ открыто в X. Пусть $x \in (-\infty, y]\alpha^{-1}$. Тогда $x\alpha \leqslant y$. Если $x' \leqslant x$, то из изотонности α получаем, что $x'\alpha \leqslant y$, а значит, $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]\alpha^{-1}$. Таким образом, $(-\infty, y]\alpha^{-1} = \bigcup\limits_{x\alpha \leqslant y} (-\infty, x]$, то есть $(-\infty, y]\alpha^{-1}$ открыто.

Достаточность. Пусть α непрерывно и $x \leqslant x'$ для некоторых $x, x' \in X$. Пусть $V = (-\infty, x'\alpha]$. Множество V открыто в Y, а так как α непрерывно, $V\alpha^{-1}$ открыто в X. Имеем $x' \in V\alpha^{-1}$. Отсюда следует, что существует элемент базы U, такой, что $x' \in U$ и $U \subseteq V\alpha^{-1}$. Имеем $U = (-\infty, u]$ для некоторого $u \in X$. Так как $x' \in U$, выполняется $x' \leqslant u$. Это влечёт $x \leqslant u$, а значит, $x \in U$. Но $U\alpha \subseteq V$. Следовательно, $x\alpha \leqslant x'\alpha$. ■

Следствие 1. Пусть X — частично упорядоченное множество, рассматриваемое как топологическое пространство с порядковой топологией. Тогда $C(X) = O(X)$.

2. Диагональные полигоны над полугруппой непрерывных отображений

Напомним понятие полигона над полугруппой. *Правым полигоном* [8] над полугруппой S называется множество X, на котором действует полугруппа S, то есть определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, такое, что выполняется тождество $(xs)s' = x(ss')$ для $x \in X$, $s, s' \in S$. *Левый полигон* Y над полугруппой S определяется двойственным образом, то есть как отображение $Y \times S \to Y$, $(s, y) \mapsto sy$, причём $s(s'y) = (ss')y$ для $y \in Y$, $s, s' \in S$. Если множество X является левым полигоном над полугруппой S и правым полигоном над полугруппой T, то оно называется *биполигоном* в случае, когда выполняется условие $(sx)t = s(xt)$ при $x \in X$, $s \in S$, $t \in T$. Если S — полугруппа, то множество $S \times S$ является правым полигоном над S относительно действия $(x, y)s = (xs, ys)$ при всех $x, y, s \in S$, левым относительно действия $s(x, y) = (sx, sy)$, а также биполигоном. Назовем их *правым, левым диагональными полигонами*, а также *диагональным биполигоном* и будем обозначать $(S \times S)_S$, $_S(S \times S)$, $_S(S \times S)_S$ соответственно. Диагональный (би)полигон называется *циклическим*, если он порождается одним элементом (то есть одной парой $(a, b) \in S \times S$).

Раннее автором изучались свойства диагональных полигонов над полугруппой непрерывных отображений в случае, когда X — отрезок числовой прямой. Доказано, что диагональный правый полигон $(C(X)\times C(X))_{C(X)}$ является циклическим [9], а диагональный левый полигон $_{C(X)}(C(X) \times C(X))$ не является счётно порождённым [10]. В случае произвольного компакта можно получить необходимое условие цикличности диагонального полигона.

Утверждение 2. Пусть X — компакт и $|X| > 1$. Если диагональный правый полигон $(C(X)\times C(X))_{C(X)}$ циклический, то X содержит непересекающиеся подпространства X_1, X_2, гомеоморфные пространству X.

Доказательство. Предположим, что выполнены условия утверждения. Тогда существует пара $(\alpha, \beta) \in C(X) \times C(X)$, порождающая диагональный правый полигон. Если 1_X — тождественное отображение $X \to X$, то $(\alpha, \beta)\gamma = (1_X, 1_X)$ при некотором $\gamma \in C_X$. Отсюда следует, что α, β — инъективные отображения. Пусть $X_1 = X\alpha$, $X_2 = X\beta$. Очевидно, $\alpha : X \to X_1$, $\beta : X \to X_2$ — непрерывные биективные отображения, а так как X — компакт, α — гомеоморфизм между X и X_1. Аналогично получаем, что β — гомеоморфизм между X и X_2. Осталось доказать, что $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Пусть это не так. Тогда $x\alpha = y\beta$ при некоторых $x, y \in X$. Возьмём два различных элемента $a, b \in X$, и пусть θ_a, θ_b — константные отображения, то есть $x\theta_a = a$ и $x\theta_b = b$ при всех $x \in X$. Очевидно, что отображения θ_a, θ_b непрерывны. Следовательно, $(\alpha, \beta)\delta = (\theta_a, \theta_b)$ при некотором $\delta \in C_X$. Имеем: $a = x\theta_a = x\alpha\delta = y\beta\delta = y\theta_b = b$, что противоречит выбору элементов a и b. ■

Следует отметить, что не все компакты являются таковыми. Например, в компакте $X = \left\{0, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots\right\}$ (с обычной топологией действительных чисел) нет двух непересекающихся гомеоморфных X подпространств.

3. Диагональные биполигоны над полугруппой изотонных отображений

В работе [11] доказано, что диагональный правый полигон $(S \times S)_S$, диагональный левый полигон $_S(S \times S)$ и диагональный биполигон $_S(S \times S)_S$ являются циклическими, если $S = T(X)$, $P(X)$ или $B(X)$, где X — бесконечное множество, $T(X)$ —

полугруппа всех отображений $X \to X$, $P(X)$ — полугруппа частичных отображений, а $B(X)$ — полугруппа бинарных отношений на множестве X. Аналогичный вопрос возникает для полугруппы $O(X)$ всех *изотонных* (сохраняющих порядок) отображений $\alpha : X \to X$, где X — частично упорядоченное множество. Ранее автором были исследованы диагональные полигоны над полугруппой $O(X)$ и получены условия цикличности и конечной порожденности этих полигонов [9]. Там же доказано, что ни для какой бесконечной цепи X диагональные полигоны над полугруппой $O(X)$ не могут быть циклическими. Основной результат данной работы обобщает упомянутый результат в случае, когда X — множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с обычным порядком, а именно доказано, что диагональный биполигон над полугруппой изотонных отображений $O(\mathbb{N})$ не имеет счётной системы образующих.

Определение 1. Пусть α, β: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — изотонные отображения. Назовём пару (α, β) *правильной*, если выполняются следующие условия:

(i) $i\alpha \neq j\alpha$, $i\beta \neq j\beta$ при $i \neq j$;

(ii) $i\alpha \neq j\beta$ при любых i, j (т. е. $\operatorname{im}\alpha \cap \operatorname{im}\beta = \varnothing$);

(iii) для любого k существует l, такое, что $l\alpha = k$ или $l\beta = k$ (т. е. $\operatorname{im}\alpha \cup \operatorname{im}\beta = \mathbb{N}$).

Замечание 1. Если пара (α, β) принадлежит порождающему множеству (множеству образующих), но не является правильной, то существует правильная пара $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, такая, что $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})\gamma = (\alpha, \beta)$ при некотором $\gamma \in O(\mathbb{N})$. Поэтому в системе образующих пару (α, β) можно заменить на пару $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Далее будем считать, что система образующих состоит только из правильных пар.

Следующая лемма показывает, что в системе образующих любую пару можно заменить на правильную пару.

Лемма 1. Пусть $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — изотонные отображения, такие, что $\operatorname{im}\alpha$, $\operatorname{im}\beta$ — бесконечные множества. Тогда существуют изотонные отображения $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$, образующие правильную пару, такие, что $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})\gamma = (\alpha, \beta)$ при некотором изотонном отображении γ.

Доказательство. По отображениям α, β построим множество M троек (p, t, ε) для некоторых $p, t \in \mathbb{N}$ следующим образом: $M = \{(p, t, 0) : t\alpha = p\} \cup \{(p, t, 1) : t\beta = p\}$. Множество M упорядочим лексикографически: $(p, t, \varepsilon) < (p', t', \varepsilon')$, если и только если $p < p'$, или $p = p'$, $t < t'$, или $p = p'$, $t = t'$, $\varepsilon < \varepsilon'$.

Докажем, что для каждого $p_0 \in \mathbb{N}$ существует лишь конечное число троек $(p_0, t, \varepsilon) \in \in M$. Действительно, если таких троек бесконечно много, то либо троек вида $(p_0, t, 0)$, либо троек вида $(p_0, t, 1)$ бесконечно много. В первом случае $|\operatorname{im}\alpha| < \infty$, во втором случае $|\operatorname{im}\beta| < \infty$ — то и другое противоречит условию леммы. Так как число троек $(p_0, t, \varepsilon) \in M$ конечно для каждого $p_0 \in \mathbb{N}$, множество M упорядочено по типу натурального ряда. Для тройки $(p, t, \varepsilon) \in M$ пусть $N(p, t, \varepsilon)$ обозначает номер этой тройки по порядку в M. Очевидно, для любого $t \in \mathbb{N}$ имеем $(t\alpha, t, 0), (t\beta, t, 1) \in M$. Это позволяет определить отображения $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ по формулам $t\tilde{\alpha} = N(t\alpha, t, 0)$, $t\tilde{\beta} = N(t\beta, t, 1)$. Проверим, что $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ — изотонные инъективные отображения. Ясно, что достаточно осуществить проверку для $\tilde{\alpha}$. Пусть $t < t'$. Тогда $t\alpha \leqslant t'\alpha$. Если $t\alpha < t'\alpha$, то $(t\alpha, t, 0) < (t'\alpha, t', 0)$, а значит, $N(t\alpha, t, 0) < N(t'\alpha, t', 0)$, то есть $t\tilde{\alpha} < t'\tilde{\alpha}$. Если $t\alpha = t'\alpha$, то $(t\alpha, t, 0) < (t'\alpha, t', 0)$, откуда $N(t\alpha, t, 0) < N(t'\alpha, t', 0)$, то есть $t\tilde{\alpha} < t'\tilde{\alpha}$.

Проверим, что $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ — правильная пара. Условие (i) следует из инъективности отображений $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$. Проверим выполнение условия (ii). Пусть $i\tilde{\alpha} = j\tilde{\beta}$. Тогда $N(i\alpha, i, 0) = N(j\beta, j, 1)$. Но это невозможно, так как $(i\alpha, i, 0) \neq (j\beta, j, 1)$. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим тройку с номером k. Если это тройка $(p, t, 0)$, то $t\alpha = p$, то есть $(p, t, 0) = (t\alpha, t, 0)$, а значит, $t\tilde{\alpha} = N(t\alpha, t, 0) = k$. Если тройка с номером k имеет вид

$(p,t,1)$, то аналогично получаем, что $t\tilde{\beta}=k$. Таким образом, $k\in \operatorname{im}\alpha\cup\operatorname{im}\beta$, то есть выполнено условие (iii). Теперь построим отображение $\gamma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Пусть $s\in\mathbb{N}$ и (p,t,ε) — s-я по порядку тройка из M, то есть $s=N(p,t,\varepsilon)$. Тогда полагаем $s\gamma=p$. Ясно, что таким образом отображение γ определено корректно. Докажем, что γ изотонно. Пусть $s<s'$. При этом $s=N(p,t,\varepsilon)$, $s'=N(p',t',\varepsilon')$. Имеем $(p,t,\varepsilon)<(p',t',\varepsilon')$. Отсюда получается, что $p\leqslant p'$. Так как $p=s\gamma$ и $p'=s'\gamma$, то выполняется $s\gamma\leqslant s'\gamma$. Этим доказана изотонность отображения γ.

Осталось доказать, что $\tilde{\alpha}\gamma=\alpha$ и $\tilde{\beta}\gamma=\beta$. Пусть $t\in\mathbb{N}$, тогда $t\tilde{\alpha}=N(t\alpha,t,0)$. Отсюда $t\tilde{\alpha}\gamma=N(t\alpha,t,0)\gamma=t\alpha$. Таким образом, $\tilde{\alpha}\gamma=\alpha$. Аналогично доказывается, что $\tilde{\beta}\gamma=\beta$. ∎

Приведём пример, иллюстрирующий лемму 1.

Пример 1. Пусть $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&\cdots\\2&5&5&7&8&9&\cdots\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&\cdots\\4&4&4&7&8&\cdots\end{pmatrix}$.

Тогда α даёт следующие тройки для множества M: $(2,1,0)$, $(5,2,0)$, $(5,3,0)$, $(7,4,0)$, $(8,5,0)$, $(9,6,0)$, $\ldots$; β даёт $(4,1,1)$, $(4,2,1)$, $(4,3,1)$, $(7,4,1)$, $(8,5,1)$, $\ldots$

Перенумеруем их и упорядочим: $\underbrace{(2,1,0)}_{1}$, $\underbrace{(4,1,1)}_{2}$, $\underbrace{(4,2,1)}_{3}$, $\underbrace{(4,3,1)}_{4}$, $\underbrace{(5,2,0)}_{5}$, $\underbrace{(5,3,0)}_{6}$, $\underbrace{(7,4,0)}_{7}$, $\underbrace{(7,4,1)}_{8}$, $\ldots$

Следовательно,

$$\tilde{\alpha}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&\cdots\\1&5&6&7&9&\cdots\end{pmatrix},\quad \tilde{\beta}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\cdots\\2&3&4&8&\cdots\end{pmatrix},\quad \gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&\cdots\\2&4&4&4&5&5&7&\cdots\end{pmatrix}.$$

Положим теперь, что правильные пары изотонных преобразований $\alpha,\beta:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ взаимно однозначно соответствуют последовательностям $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\ldots)$ из нулей и единиц, в которых бесконечно много как нулей, так и единиц. Действительно, для каждого $k\in\mathbb{N}$ пусть $k\alpha$ — позиция, которую в последовательности ε занимает k-й по счёту нуль, а $k\beta$ — позиция k-й по счёту единицы. Нетрудно проверить, что тогда α,β являются изотонными преобразованиями, составляющими правильную пару. Последовательность ε восстанавливается по правильной паре (α,β) однозначно:

$$\varepsilon_i=\begin{cases}0, & \text{если } i\in\operatorname{im}\alpha,\\ 1, & \text{если } i\in\operatorname{im}\beta.\end{cases}$$

Например, если $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&\cdots\\1&5&6&7&9&\cdots\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&\cdots\\2&3&4&8&10&\cdots\end{pmatrix}$, то

$$\varepsilon=1000111010\ldots$$

Пусть $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\ldots)$ — последовательность из нулей и единиц.

Определение 2. *Позицией* элемента ε_i назовём индекс i и будем писать $\operatorname{pos}(\varepsilon_i)=i$.

Определение 3. *Элементарным прореживанием* последовательности нулей и единиц называется одновременное удаление i-й по счёту единицы и i-го по счёту нуля (для какого-либо i), *прореживанием* — применение элементарных прореживаний конечное или бесконечное число раз.

Далее будем писать $\varepsilon_i = 0_m$, если ε_i — m-й по счёту нуль в последовательности ε. Аналогично этому m-ю по счёту единицу в ε будем обозначать 1_m. Например, последовательность $\varepsilon = 0010110110011$ можно записать так: $\varepsilon = 0_1 0_2 1_1 0_3 1_2 1_3 0_4 1_4 1_5 0_5 0_6 1_6 1_7$. Пусть дана последовательность ε из нулей и единиц, в которой бесконечно много нулей и бесконечно много единиц. Операцию прореживания последовательности ε можно проиллюстрировать следующим образом. Если $t_1 < t_2 < t_3 \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, то возьмём в ε те единицы и нули, которые имеют номера $t_1, t_2, t_3, \ldots$, сохраняя их порядок в ε. Полученная последовательность η будет последовательностью, полученной из ε прореживанием. Например, если $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 6$, $t_4 = 7$, $\ldots$, то прореживание ε даёт $\eta = 0101011\ldots$

Лемма 2. Пусть ε, η — последовательности из нулей и единиц, соответствующие правильным парам (α, β) и (α', β'), причём $\alpha' = \gamma\alpha\delta$, $\beta' = \gamma\beta\delta$ при некоторых $\gamma, \delta \in O(\mathbb{N})$. Тогда последовательность η можно получить из последовательности ε прореживанием.

Доказательство. Так как $\alpha' = \gamma\alpha\delta$ инъективно, то γ также инъективно. Пусть $i\gamma = t_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Очевидно, $t_1 < t_2 < \ldots$ Так как $\gamma\alpha\delta$ и $\gamma\beta\delta$ образуют правильную пару, то

1) $\operatorname{im}(\gamma\alpha) \cap \operatorname{im}(\gamma\beta) = \varnothing$;
2) δ инъективно на множестве $\operatorname{im}(\gamma\alpha) \cup \operatorname{im}(\gamma\beta)$.

Следовательно, $i\gamma\alpha = \operatorname{pos}(0_{t_i})$, $i\gamma\beta = \operatorname{pos}(1_{t_i})$. Таким образом, в последовательности ε выделяются нули и единицы с номерами $t_1, t_2, t_3, \ldots$ Отображение δ переведёт эту последовательность взаимно однозначно. ■

С помощью лемм 1 и 2 рассуждениями, близкими к диагональному методу Кантора, доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Диагональный биполигон ${}_{O(\mathbb{N})}(O(\mathbb{N}) \times O(\mathbb{N}))_{O(\mathbb{N})}$ не имеет счётного множества образующих.

Доказательство. Предположим, что $M = \{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3), \ldots\}$ — счётное множество образующих диагонального биполигона ${}_{O(\mathbb{N})}(O(\mathbb{N}) \times O(\mathbb{N}))_{O(\mathbb{N})}$. Выберем среди них такие пары, для которых $\operatorname{im}\alpha_i, \operatorname{im}\beta_i$ — бесконечные множества. Получаем множество M'. Множество M' конечно или счётно: $M' = \{(\alpha'_1, \beta'_1), (\alpha'_2, \beta'_2), (\alpha'_3, \beta'_3), \ldots\}$. Ввиду леммы 1 можно считать, что все $(\alpha'_i, \beta'_i) \in M$ — правильные пары. Пусть $\varepsilon^{(i)}(i = 1, 2, 3, \ldots)$ — соответствующие этим парам последовательности из нулей и единиц. Положим $A = \{\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots\}$. Тогда A конечно или счётно. Пусть $B = A \times \mathbb{N}$. Ясно, что B — счётное множество. Имеем $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. Построим последовательность $p_1, p_2, p_3, \ldots$ натуральных чисел рекурсивно. Пусть $b_i = (\varepsilon, m)$. Число p_1 выберем таким, чтобы $p_1 > 1$ и $p_1 > a$, где a — количество нулей 0_i, таких, что $i \geqslant m$ и $\operatorname{pos} 0_i < \operatorname{pos} 1_m$. Если в последовательности ε имеет место $\operatorname{pos} 0_m > \operatorname{pos} 1_m$, то $a = 0$ и можно положить $p_1 = 2$.

Пусть числа $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$ уже построены, причем $p_i > i$ при $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Рассмотрим b_k. Пусть $b_k = (\varepsilon, m)$. Сначала выбираем, если это возможно, p_1 нулей, лежащих от 0_m до 1_m: $0_{t_1} = 0_m$, 0_{t_2}, 0_{t_3}, $\ldots$, $0_{t_{p_1}}$. Автоматически будут выбраны единицы $1_{t_1} = 0_m$, 1_{t_2}, 1_{t_3}, $\ldots$, $1_{t_{p_1}}$. Ясно, что существует лишь конечное число способов выбора нулей $0_{t_1} = 0_m$, $\ldots$, $0_{t_{p_1}}$. Далее выбираем, если это возможно, p_2 нулей между 1_{t_1} и 1_{t_2}: $0_{t_{p_1+1}}$, $0_{t_{p_1+2}}$, $\ldots$, $0_{t_{p_1+p_2}}$. Это также можно сделать лишь конечным количеством способов. Пусть выбраны нули $0_{t_{p_1+\ldots+p_{i-1}+1}}$, $\ldots$, $0_{t_{p_1+\ldots+p_{i-1}+p_i}}$, предшествующие элементу 1_{t_i}. Так как $p_1 + \ldots + p_i > i$, то определено t_{i+1}, и если $i < k - 1$, то можно выбрать следующую последовательность из нулей p_{i+1} между 1_{t_i} и $1_{t_{i+1}}$.

Последние выбранные нули — это $0_{t_{p_1+\ldots+p_{k-2}+1}}, \ldots, 0_{t_{p_1+\ldots+p_{k-2}+p_{k-1}}}$, они предшествуют элементу $1_{t_{k-1}}$. Так как $p_1+\ldots+p_{k-1} > k-1$, то t_k также определено. Обозначим через c максимальное количество нулей между $1_{t_{k-1}}$ и 1_{t_k} при всевозможных выборах нулей и единиц вышеописанным способом. Ввиду конечности количества способов выбора имеем $c \neq \infty$. Полагаем $p_k = \max\{c+1, k+1\}$. Итак, последовательность $p_1, p_2, p_3, \ldots$ построена. Пусть $\eta = 0^{p_1}10^{p_2}10^{p_3}1\ldots$ (здесь 0^p обозначает $\underbrace{0\ldots0}_{p}$). Докажем, что последовательность η не может быть получена из какой-либо последовательности $\varepsilon^{(i)} \in A$ с помощью прореживания. Действительно, пусть η получается из $\varepsilon^{(i)}$ путем прореживания, то есть выделения нулей и единиц с номерами $t_1, t_2, \ldots$, где $t_1 < t_2 < \ldots$ Тогда существует такое k, что $(\varepsilon^{(i)}, t_1) = b_k$. Имеем $(\operatorname{pos} 1_{k-1}) < (\operatorname{pos} 0_{p_1+\ldots+p_k}) < (\operatorname{pos} 1_{t_k})$. Из условия $p_k = \max\{c+1, k+1\}$ имеем $p_k \geqslant c+1$. Значит, между $1_{t_{k-1}}$ и 1_{t_k} всего нулей меньше чем p_k. Получили противоречие. Следовательно, последовательность η не получится из $\varepsilon^{(i)}$ прореживанием. Последовательность η соответствует некоторой правильной паре (φ, ψ) через образующие: $\varphi = \gamma\alpha_i\delta$, $\psi = \gamma\beta_i\delta$ для некоторых $\gamma, \delta \in O(\mathbb{N})$. Так как $\operatorname{im}\varphi$ и $\operatorname{im}\psi$ бесконечны, то же верно для α_i, β_i. Следовательно, $(\alpha_i, \beta_i) \in M'$. Если ε' — соответствующая этой паре последовательность из нулей и единиц, то $\varepsilon' \in A$, то есть $\varepsilon' = \varepsilon^{(i)}$ при некотором $i \in \mathbb{N}$. По лемме 2 получаем, что η полуается из $\varepsilon^{(i)}$ прореживанием. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ■

Следствиями из теоремы 1 являются аналогичные утверждения для диагональных левого и правого полигонов.

Следствие 2. Диагональный левый полигон $_{O(\mathbb{N})}(O(\mathbb{N})\times O(\mathbb{N}))$ не имеет конечной или счётной системы образующих.

Следствие 3. Диагональный правый полигон $(O(\mathbb{N}) \times O(\mathbb{N}))_{O(\mathbb{N})}$ не имеет конечной или счётной системы образующих.

Заключение

При исследовании диагональных полигонов над полугруппами изотонных преобразований частично упорядоченного множества доказано отсутствие их счётнопорождённости в случае множества натуральных чисел для левого, правого и биполигонов. Найдены условия цикличности правого диагонального полигона над полугруппой непрерывных отображений в случае компакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ярошевич В. А.* О свойствах полугрупп частичных изотонных преобразований квазиупорядоченных множеств // Вестник МГАДА. 2011. Вып. 3(9). С. 139–144.
2. *Stong R. E.* Finite topological spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. No. 123. P. 325–340.
3. *Magill K. D. Jr.* A survey of semigroups of continuous selfmaps // Semigroup Forum. 1975/1976. V. 11. P. 189–282.
4. *Thornton M. C.* Semigroups of isotone selfmaps on partially ordered sets // J. London Math. Soc. 1976. V. 14. No. 3. P. 545–553.
5. *Глускин Л. М.* Полугруппы изотонных преобразований // Успехи матем. наук. 1961. № 16:5(101). С. 157–162.
6. *Нурутдинов Б. С.* Топологии пространств, описываемые полугруппами отображений // Вестник МГУ. Сер. Математика, Механика. 1973. № 4. С. 24–29.

7. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994.
8. *Kilp M., Knauer U., and Mikhalev A. V.* Monoids, acts and categories. Berlin; New York: de Gruyter, 2000.
9. *Апраксина Т. В.* Диагональные полигоны над полугруппами изотонных преобразований // Чебышевский сб. 2011. № 12:1. С. 10–16.
10. *Апраксина Т. В.* Цикличность и конечнопорожденность диагональных полигонов над полугруппами преобразований // Мат. вестн. педвузов и ун-тов Волго-Вятск. региона. 2012. № 14. С. 51–58.
11. *Gallagher P. and Ruškuc N.* Generation of diagonal acts of some semigroups of transformations and relations // Bull. Austral. Math. Soc. 2005. V. 72. P. 139–146.