

Е.В. Пикущак, Л.Л. Миньков

**ВЛИЯНИЕ ПОПРАВКИ ОЗЕЕНА НА ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ СКОРОСТИ
ОСЕДАНИЯ МЕЛКИХ ЧАСТИЦ В БИДИСПЕРСНОЙ СУСПЕНЗИИ¹**

На основе приближенного решения Озеена для поля течения вязкой несжимаемой жидкости около сферы проводится оценка времени пребывания мелкой частицы в цилиндрической ячейке, окружающей крупную частицу, с учетом силы тяжести и с последующим определением средней скорости мелкой частицы в ячейке. Проводится оценка влияния числа Рейнольдса и размера цилиндрической ячейки на среднюю скорость движения мелкой частицы.

Ключевые слова: обтекание сферы, бидисперсная суспензия, седиментация, решение Озеена.

При седиментации частиц в би- и полидисперсной суспензиях наблюдается значительное повышение скорости оседания мелких частиц по сравнению со значением, даваемым формулой Стокса [1–3]. Ускоренная седиментация мелких частиц может играть большую роль в технических приложениях. С одной стороны увеличение скорости оседания мелких частиц способствует повышению качества очистки жидкости от мелких примесей при очистке сточных вод, а с другой – увеличение скорости оседания мелких частиц ухудшает качество разделения частиц суспензии по размерам за счет попадания мелких фракций в крупный продукт [4, 5].

Для объяснения причин ускорения седиментации мелких частиц в окружении соседних крупных в работе [6] была предложена ячеистая модель увлечения мелких частиц крупными за счет попадания мелких частиц в гидродинамический погранслои крупных. Эта модель, построенная на приближении Стокса для поля течения около крупной частицы, позволила объяснить на качественном и количественном уровнях такое явление, как «фиш-хук»-эффект, наблюдаемый при разделении частиц в гидроциклонах малых масштабов [4, 7, 8].

Очевидно, что течение Стокса имеет место при малой скорости дисперсной среды относительно дисперсионной, когда относительное число Рейнольдса для крупной частицы близко к нулю. В гидроциклонах малых масштабов (диаметром менее 50 мм) разделяемая суспензия подвергается большим ускорениям, что приводит к отклонению поля течения около крупной частицы от Стоксовского режима [9]. В Авторами [10] была предложена гипотеза, объясняющая ускоренное оседание мелких частиц за счет их попадания в вихревую зону, образующуюся за крупной частицей при числах Рейнольдса больше 25. В частности, было показано, что средняя скорость седиментации мелких частиц ведет себя немонотонно с увеличением числа Рейнольдса от 25 до 200.

Целью настоящей работы является развитие модели ускоренного оседания мелких частиц в бидисперсной суспензии, предложенной в работе [6], на случай поля течения Озеена около крупной частицы, которое справедливо для $Re < 1$.

¹ Работа проводилась при финансовой поддержке гранта РФФИ мол_нр №14-38-50913.

В работе [11] приводится решение задачи об обтекании неподвижного шара вязким потоком несжимаемой жидкости (рис. 1) для чисел $0 < \text{Re} < 1$.

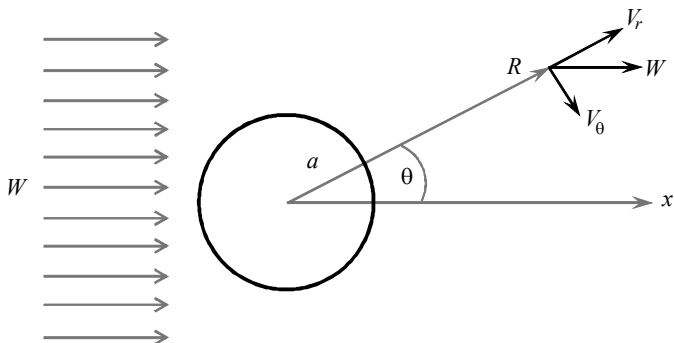


Рис. 1. Схема обтекания частицы жидкостью

Поле течения жидкости, скорость которой на бесконечности равна W , а кинематическая вязкость – ν , определяется следующими выражениями для компонент вектора скорости, записанных в сферической системе координат:

$$V_r = -\frac{A_0}{R^2} + \frac{2A_1 \cos(\theta)}{R^3} - \frac{C_0 \exp(-kR[1 - \cos(\theta)])}{2kR^2} [1 + kR(1 + \cos(\theta))] + \frac{C_1 \cos(\theta) \exp(-kR[1 - \cos(\theta)])}{kR^3} + W \cos(\theta); \quad (1)$$

$$V_\theta = \frac{A_1 \sin(\theta)}{R^3} + \frac{C_0 \sin(\theta)}{2R} \exp(-kR[1 - \cos(\theta)]) + \frac{C_1 \sin(\theta)}{2kR^3} \exp(-kR[1 - \cos(\theta)]) - W \sin(\theta), \quad (2)$$

где $k = \frac{W}{2\nu}$; $C_0 = \frac{3Wa}{2} \left(1 + \frac{3ka}{4}\right)$; $C_1 = \frac{3}{2} Wa^3 k$; $A_0 = -\frac{3Wa}{4k} \left(1 + \frac{3ka}{4}\right)$; $A_1 = -\frac{1}{2} Wa^3$; a – радиус шара; R – расстояние от центра шара, $R > a$.

В декартовой системе координат компоненты вектора скорости течения выражаются в виде

$$U = V_r \cos(\theta) - V_\theta \sin(\theta); \quad V = V_r \sin(\theta) + V_\theta \cos(\theta).$$

Для перехода к безразмерной форме записи выберем в качестве масштаба длины радиус шара, а в качестве масштаба скорости – W , тогда

$$r = R/a, \quad v_r = V_r/W, \quad v_\theta = V_\theta/W.$$

$$v_r = \cos(\theta) - \frac{A_0}{r^2} + \frac{2A_1 \cos(\theta)}{r^3} + \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Re} \cdot r [1 - \cos(\theta)]\right) \times \left[-\frac{C_0}{\text{Re} \cdot r^2} - \frac{C_0 (1 + \cos(\theta))}{2r} + \frac{C_1 \cos(\theta)}{\frac{1}{2} \text{Re} \cdot r^3} \right]; \quad (3)$$

$$v_{\theta} = \left[\frac{A_1}{r^3} + \left(\frac{C_0}{2r} + \frac{C_1}{\text{Re} \cdot r^3} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Re} \cdot r [1 - \cos(\theta)] \right) - 1 \right] \sin(\theta), \quad (4)$$

где $\text{Re} = \frac{aU}{\nu}$, $C_0 = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{3}{8} \text{Re} \right)$, $C_1 = \frac{3}{4} \text{Re}$,

$$A_0 = -\frac{3}{2\text{Re}} \left(1 + \frac{3}{8} \text{Re} \right), \quad A_1 = -\frac{1}{2}$$

Здесь $r > 1$.

Очевидно, что при $r = 1$ условия прилипания $v_r = 0$, $v_{\theta} = 0$ не выполняются, поэтому вблизи поверхности шара целесообразно использовать решение Стокса.

В декартовой системе координат компоненты вектора скорости течения выражаются в виде

$$u(x, y) = v_r(r, \theta) \cos(\theta) - v_{\theta}(r, \theta) \sin(\theta);$$

$$v(x, y) = v_r(r, \theta) \sin(\theta) + v_{\theta}(r, \theta) \cos(\theta).$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos(\theta) = x/r, \quad \sin(\theta) = y/r.$$

Для нахождения траекторий мелких частиц (в предположении малости чисел Стокса, [6]) решается система кинематических уравнений

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y) - U_f; \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y), \quad (5)$$

где U_f – скорость оседания мелкой частицы в неподвижной жидкости.

С начальными условиями: $t = 0$, $x = -D$, $y = y_0$. Система уравнений (5) решается до момента времени, соответствующего $x = D$.

На рис. 2 показаны линии тока жидкости в окрестности крупной частицы для $\text{Re} = 0,5$. Видно, что в отличие от стоксовского режима обтекания линии тока перестают быть симметричными относительно оси OY и отклоняются от оси OX к периферии.

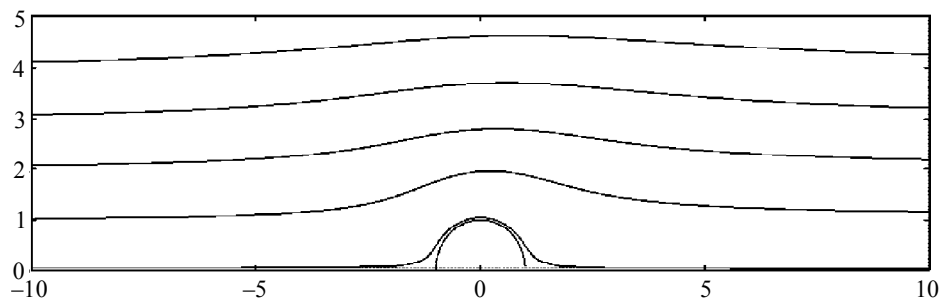


Рис. 2. Линии тока жидкости в окрестности крупной частицы:
 $D = 20$, $\text{Re} = 0,5$

На рис. 3 приведены траектории мелких частиц для $U_f = 0,2$. Для них, как и для линий тока жидкости, имеет место нарушение симметрии относительно оси OY , а отклонение от продольной оси к периферии становится более выраженным, чем для жидкости.

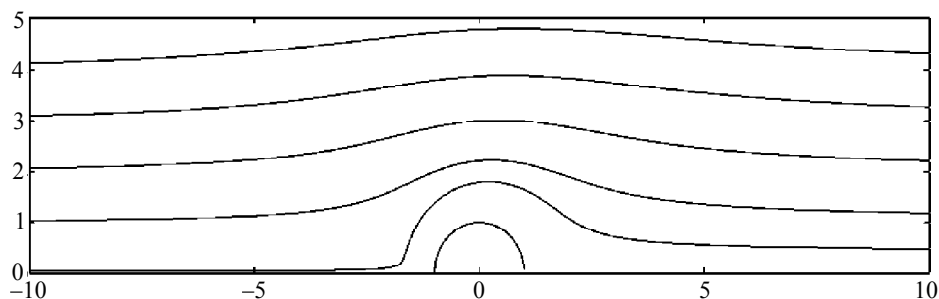


Рис. 3. Траектории мелких частиц в окрестности крупной частицы.
 $D = 20$, $Re = 0,5$, $U_f = 0,2$

На рис. 4 представлены результаты расчетов U_s по формуле (6) для $U_f = 0$ (средняя скорость жидкости в лабораторной системе координат), полученные для поля течения Озеена при разных числах Рейнольдса в диапазоне $0 \leq Re \leq 1$. Видно, что с ростом размера ячейки (увеличение D) и числа Рейнольдса, средняя скорость жидкости в ячейке в лабораторной системе координат уменьшается, а для больших значений D – близка к нулю:

$$U_s(U_f, D, Re) = 1 - \frac{4}{D} \int_0^D \frac{y}{t(y, U_f, D, Re)} dy. \quad (6)$$

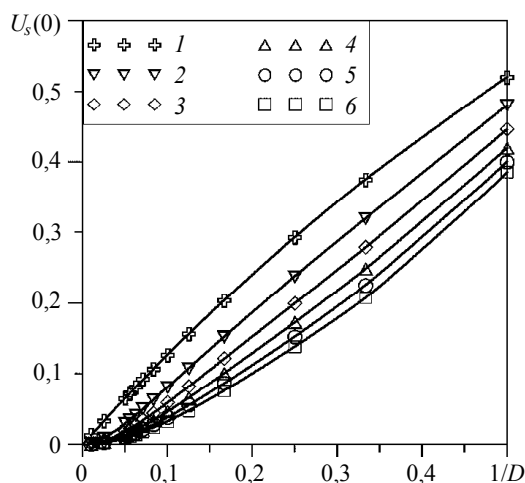


Рис. 4. Скорость движения жидкости в ячейке в зависимости от ее размера:
 кр. 1 – $Re = 0$; кр. 2 – 0,2; кр. 3 – 0,4; кр. 4 – 0,6; кр. 5 – 0,8; кр. 6 – 1,0

Коэффициенты a , b , c являются функциями числа Рейнольдса, которые для $0,1 \leq Re \leq 1$ можно аппроксимировать полиномами третьей степени:

$$a(Re) = -8,3036 \cdot Re^3 + 17,466 \cdot Re^2 - 9,5047 \cdot Re - 1,0824;$$

$$b(Re) = 7,3536 \cdot Re^3 - 16,075 \cdot Re^2 + 10,365 \cdot Re + 0,3369;$$

$$c(Re) = -1,6898 \cdot Re^3 + 3,9965 \cdot Re^2 - 3,3239 \cdot Re + 1,1518.$$

Полученные данные для $U_s(0)$ аппроксимируются полиномами третьей степени $U_s(0, D) = a(1/D)^3 + b(1/D)^2 + c(1/D)$. В таблице приведены значения коэффициентов полинома для различных значений числа Рейнольдса.

Значения коэффициентов полинома

Re	a	b	c
0	0,233	- 0,7016	1,3334
0,1	-1,8104	1,1737	0,8672
0,2	- 2,4571	1,9123	0,6157
0,4	- 2,5658	2,3388	0,3617
0,6	- 2,2635	2,3302	0,2377
0,8	- 1,8092	2,1499	0,1756
1,0	- 1,4077	1,9657	0,1378

Таким образом, средняя скорость жидкости в ячейке в лабораторной системе координат может быть представлена в виде

$$U_s(0, D, Re) = a(Re)\left(\frac{1}{D}\right)^3 + b(Re)\left(\frac{1}{D}\right)^2 + c(Re)\left(\frac{1}{D}\right).$$

Влияние размера ячейки на осредненную относительную скорость мелких частиц в ячейке

$$\frac{U_s(U_f, D, Re) - U_s(0, D, Re)}{U_f}$$

показано на рис. 5. Как видно, число Рейнольдса в диапазоне от 0 до 0,8 слабо влияет на относительную скорость мелких частиц, и данные можно аппроксимировать с приемлемой степенью точности зависимостью $1 - 1,3/D^2$.

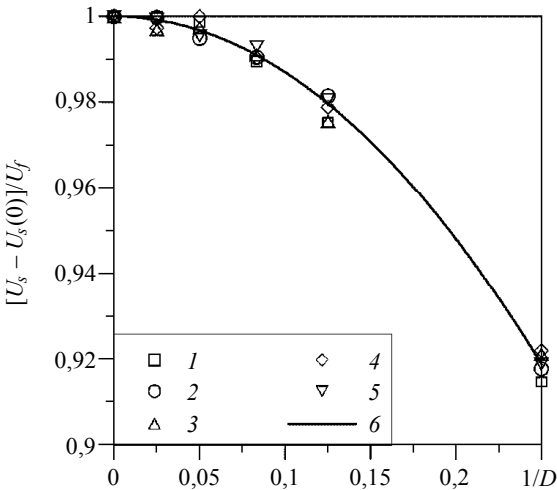


Рис. 5. Зависимость относительной скорости мелких частиц в ячейке от размера ячейки: кр. 1 – Re = 0,1; кр. 2 – 0,2; кр. 3 – 0,4; кр. 4 – 0,6; кр. 5 – 0,8; кр. 6 – аппроксимационная кривая

Окончательное выражение для осредненной скорости мелких частиц имеет вид

$$U_s(U_f, D, \text{Re}) = \frac{a(\text{Re})}{D^3} + \frac{b(\text{Re})}{D^2} + \frac{c(\text{Re})}{D} + U_f \left(1 - \frac{1,3}{D^2} \right). \quad (7)$$

В размерном виде формулу ускоренного оседания мелких частиц в присутствии крупных частиц (7) можно записать как

$$\frac{u_s}{u_f} = 1 - 1,57\alpha_c^{2/3} + \left(1,5a(\text{Re})\alpha_c + 1,31b(\text{Re})\alpha_c^{2/3} + 1,145c(\text{Re})\alpha_c^{1/3} \right) \left(\frac{d_c}{d_f} \right)^2. \quad (8)$$

В отличие от формулы, полученной для течения Стокса около крупной частицы [6], в формуле (8) учтены слагаемые более высокого порядка малости относительно объемной доли крупных частиц, а именно $\alpha_c^{2/3}$ и α_c . Как следует из (8), таблицы и рис. 4, увеличение числа Рейнольдса ведет к снижению влияния отношения размеров крупной и мелкой частиц на повышение скорости оседания мелких частиц u_s . Более того, для разреженных суспензий увеличение числа Рейнольдса с 0 до 1 уменьшает относительную среднюю скорость оседания мелких частиц в 2,5 – 3 раза (рис. 6).

На рис. 7 показано влияние объемной доли крупных частиц на относительную среднюю скорость оседания мелких частиц для низких и умеренных значений чисел Рейнольдса. Видно, что зависимость U_s/U_f от α_c имеет ярко выраженный максимум, что качественно согласуется с результатами экспериментов по измерению скорости оседания мелких частиц полидисперсной суспензии в тарельчатой центрифуге [12].

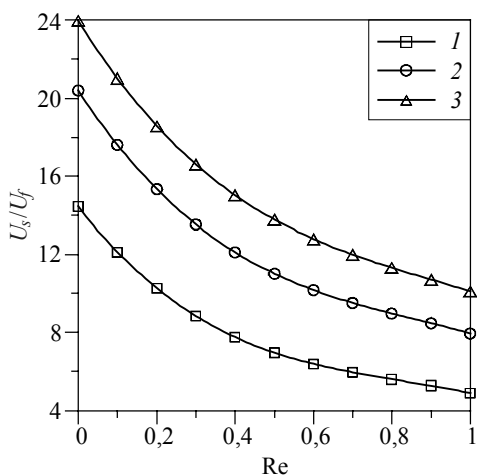


Рис. 6. Зависимость средней скорости оседания мелких частиц от числа Рейнольдса, $d_c/d_f = 10$: кр. 1 – $\alpha_c = 0,001$; кр. 2 – $0,003$; кр. 3 – $0,005$

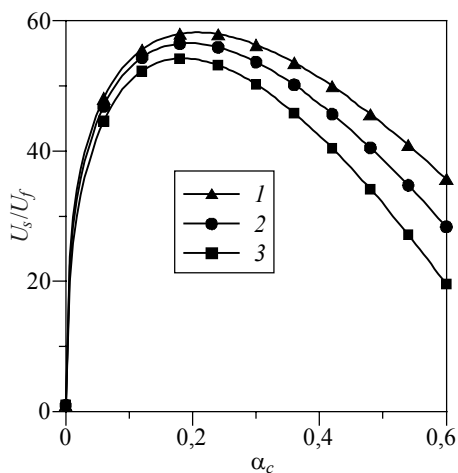


Рис. 7. Зависимость средней скорости оседания мелких частиц от объемной доли крупных частиц, $d_c/d_f = 10$: кр. 1 – $\text{Re} = 0,05$; кр. 2 – $0,1$; кр. 3 – $0,2$

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G.K., van Rensburg J. Structure formation in bidisperse sedimentation // J. Fluid Mech. 1986. V. 119. P. 379–407.
2. Bickert G., Stahl W., Bartsch R., Müller F. Sedimentationsverhalten von mono- und polydispersen, submikronen partikeln in verdünnten und konzentrierten suspensionen // Chem.-Ing. Tech. 1996. No. 68. P. 1459–1462.
3. Gerhart Ch., Dück J., Neeße Th. Grundlagen-untersuchungen zur behinderten Sedimentation polydisperser suspensionen bei der hydrostromklassierung. Teil I: Untersuchungen in einer Laborzentrifuge // Aufbereitungstechnik. 1999. B. 40. N 7. S. 328–334.
4. Finch J.A. Modelling a fish-hook in hydrocyclone selectivity curves // Powder Technology. 1981. V. 29. P. 277.
5. Neeße Th., Dück J., Kerkhoff Th. Feinstkornabscheidung im hydrozyklon // Aufbereitungstechnik. 1996. B. 37. N 9. S. 413–421.
6. Дик И.Г., Миньков Л.Л., Неессе Т. Гидродинамическая модель ускорения седиментации мелких частиц в бидисперсной суспензии // Теплофизика и аэромеханика. 2001. Т. 8. № 2. С. 283–294.
7. Neeße T., Dueck J., Schwemmer H., Farghaly M. Using a high pressure hydrocyclone for solids classification in the submicron range // Minerals Engineering. 2015. V. 71. P. 85–88.
8. Minkov L., Dueck J., Neeße T. Computer simulations of the Fish-Hook effect in hydrocyclone separation // Minerals Engineering. 2014. V. 62. P. 19–24.
9. Миньков Л.Л., Степанова Ю.О. Влияние циркуляционной зоны на скорость оседания мелких частиц в бидисперсной суспензии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 5(25). С. 70–77.
10. Dueck J. The sedimentation velocity of a particle in a wide range of Reynolds numbers in the application to the analysis of the separation curve // Advanced Powder Technology. 2013. V. 24. No. 1. P. 150–153.
11. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955. 519 с.
12. Дик И.Г., Килимник Д.Ю., Миньков Л.Л., Неессе Т. Измерение скорости седиментации мелкодисперсных частиц в тарельчатой центрифуге // ИФЖ. 2003. Т. 76. № 4. С. 7–17.

Статья поступила 06.01.2015 г.

Pikushchak E.V., Minkov L.L. INFLUENCE OF OSEEN'S CORRECTION ON FINE PARTICLE SETTLING VELOCITY FORMULA FOR BIDISPERSE SUSPENSION
DOI 10.17223/19988621/33/9

In this paper, a simplified cellular model of particle sedimentation under gravity in bidisperse suspension is proposed. To determine the average settling velocity of fine particles, their residence time in the cylindrical cell surrounding the large ones is evaluated. The flow field of a viscous incompressible fluid around the large particle is described based on the approximate Oseen solution. The fine particles are assumed to be inertialess, which allows one to determine the trajectory of these particles by solving only kinematic equations. The influence of the Reynolds number and the size of the cylindrical cell on the average velocity of the fine particles is assessed. A formula for determining the sedimentation velocity of fine particles settling in the presence of large ones with allowance for the volume fraction of coarse particles, particle size ratio, and the Reynolds number is derived. It is shown that the increase in the Reynolds number tends to reduce the effect of the particle size ratio on the average sedimentation velocity of fine particles.

Keywords: flow around sphere, bidisperse suspension, sedimentation, Oseen's solution.

MINKOV Leonid Leonidovich (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof.,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

PIKUSHCHAK Elizaveta Vladimirovna (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof.,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: liza@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Batchelor G.K., van Rensburg J. Structure formation in bidisperse sedimentation. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 119, pp. 379–407.
2. Bickert G., Stahl W., Bartsch R., Müller F. Sedimentationsverhalten von mono- und polydispersen, submikronen partikeln in verdünnten und konzentrierten suspensionen. *Chem.-Ing. Tech.*, 1996, no. 68, pp. 1459–1462.
3. Gerhart Ch., Dück J., Neeße Th. Grundlagen-untersuchungen zur behinderten Sedimentation polydisperser suspensionen bei der hydrostromklassierung. Teil I: Untersuchungen in einer Laborzentrifuge. *Aufbereitungs technik*, 1999, b. 40, n 7, s. 328–334.
4. Finch J.A. Modelling a fish-hook in hydrocyclone selectivity curves. *Powder Technology*, 1981, vol. 29, pp. 277.
5. Neeße Th., Dück J., Kerkhoff Th. Feinstkornabscheidung im hydrozyklon. *Aufbereitungstechnik*, 1996, b. 37, n 9, s. 413–421.
6. Dik I.G., Min'kov L.L., Neesse T. Gidrodinamicheskaya model' uskoreniya sedimentatsii melkikh chastits v bidispersnoy suspenzii. *Teplofizika i aeromekhanika*, 2001, vol. 8, no. 2, pp. 283–294. (in Russian)
7. Neesse T., Dueck J., Schwemmer H., Farghaly M. Using a high pressure hydrocyclone for solids classification in the submicron range. *Minerals Engineering*, 2015, vol. 71, pp. 85–88.
8. Minkov L., Dueck J., Neesse T. Computer simulations of the Fish-Hook effect in hydrocyclone separation. *Minerals Engineering*, 2014, vol. 62, pp. 19–24.
9. Min'kov L.L., Stepanova Yu.O. Vliyanie tsirkulyatsionnoy zony na skorost' osedaniya melkikh chastits v bidispersnoy suspenzii. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 5(25), pp. 70–77. (in Russian)
10. Dueck J. The sedimentation velocity of a particle in a wide range of Reynolds numbers in the application to the analysis of the separation curve. *Advanced Powder Technology*, 2013, vol. 24, no. 1, pp. 150–153.
11. Slezkin N.A. *Dinamika vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti*. Moscow, GITTL Publ., 1955, 519 p. (in Russian)
12. Dik I.G., Kilimnik D.Yu., Min'kov L.L., Neesse T. Izmerenie skorosti sedimentatsii melkodispersnykh chastits v tarel'chatoy tsentrifuge. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2003, vol. 76, no. 4, pp. 7–17. (in Russian)