

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МОНЖА – АМПЕРА И ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ПЕРЕМЕННОЙ ЭНТРОПИЕЙ

Представлен аналитический алгоритм построения частных решений неоднородного уравнения Монжа – Ампера. Получены в явном виде одиннадцать параметрических решений, содержащих функциональный и/или константный произвол. Дана газодинамическая интерпретация одного из таких решений: задача о распространении ударных волн сжатия и разрежения в термодинамически устойчивой сжимаемой среде, уравнение состояния которой обладает неклассической (знакопеременной) выпуклостью.

**Ключевые слова:** уравнение Монжа – Ампера; термодинамически аномальный газ; ударные волны сжатия и разрежения.

Уравнение Монжа – Ампера и его газодинамические приложения имеют важное значение в математической физике. Современное состояние этой проблемы и библиография представлены в [1–4]. Изучение литературных источников показывает, что конструирование аналитических решений, содержащих функциональный и константный произвол, по-прежнему является актуальной задачей. Данная работа имеет следующие цели: получение новых точных решений неоднородного уравнения Монжа – Ампера; построение примеров нестационарного адиабатического течения газа с нормальными и аномальными термодинамическими свойствами.

### Алгоритм построения параметрических решений

Рассмотрим уравнение Монжа – Ампера

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = W(x_1, x_2), \quad (1)$$

правая часть которого зависит только от переменных  $x_1, x_2$ , а  $Y(x_1, x_2)$  – неизвестная функция. Уравнению (1) дадим следующую форму записи:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x_1} \frac{\partial Y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} \frac{\partial Y_2}{\partial x_1} = W, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} = \frac{\partial Y_2}{\partial x_1}, \quad (2)$$

где

$$dY = Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2, \quad (3)$$

$$Y_1 = \partial Y / \partial x_1, \quad Y_2 = \partial Y / \partial x_2.$$

Решение системы (2) представим в параметрическом виде ( $\alpha$  – параметр):

$$Y_1 = x_2^2 A_2(\alpha) + x_2 A_1(\alpha) + A_0(\alpha), \quad (4)$$

$$Y_2 = x_2^3 B_3(\alpha) + x_2^2 B_2(\alpha) + x_2 B_1(\alpha) + B_0(\alpha),$$

$$x_1 = \alpha x_2^2 + x_2 C_1 + C_0, \quad C_0, C_1 - \text{const}.$$

Такой способ построения параметра  $\alpha$  применялся в [5] для изучения газодинамических процессов с ударными волнами. Примем, что  $W$  определяется зависимостью

$$x_2^4 W = \sum_{i=0}^6 x_2^i \Pi_i, \quad \Pi_i = \Pi_i(\alpha), \quad (5)$$

где  $\Pi_i(\alpha)$  – аналитические функции. После подстановки (4) в (2) и проведения стандартных вычислений получаем дифференциальные уравнения, связывающие между собой функции  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, B_3$ :

$$\begin{aligned} \dot{A}_0 s_0 - \dot{B}_0^2 &= \Pi_0, \quad \dot{A}_0 s_1 + \dot{A}_0 s_1 - 2\dot{B}_0 \dot{B}_1 = \Pi_1, \\ \dot{A}_2 s_0 + \dot{A}_1 s_1 + \dot{A}_0 s_2 - \dot{B}_1^2 - 2\dot{B}_2 \dot{B}_0 &= \Pi_2, \quad \dot{A}_2 s_1 + \dot{A}_1 s_2 + \dot{A}_0 s_3 - 2\dot{B}_3 \dot{B}_0 - 2\dot{B}_2 \dot{B}_1 = \Pi_3, \\ \dot{A}_2 s_2 + \dot{A}_1 s_3 + \dot{A}_0 s_4 - \dot{B}_2^2 - 2\dot{B}_1 \dot{B}_3 &= \Pi_4, \quad \dot{A}_2 s_3 + \dot{A}_1 s_4 - 2\dot{B}_3 \dot{B}_2 = \Pi_5, \quad \dot{A}_2 s_4 - \dot{B}_3^2 = \Pi_6, \\ \dot{B}_0 &= -C_1 \dot{A}_0, \quad \dot{B}_1 = -\dot{A}_1 C_1 - 2\alpha \dot{A}_0, \quad \dot{B}_2 = A_1 - 2\alpha \dot{A}_1 - C_1 \dot{A}_2, \quad \dot{B}_3 = 2(A_2 - \alpha \dot{A}_2), \\ s_0 &= -C_1 \dot{B}_0, \quad s_1 = -2\alpha \dot{B}_0 - C_1 \dot{B}_1, \quad s_2 = B_1 - 2\alpha \dot{B}_1 - C_1 \dot{B}_2, \\ s_3 &= 2(B_2 - \alpha \dot{B}_2) - C_1 \dot{B}_3, \quad s_4 = 3B_3 - 2\alpha \dot{B}_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Точка над символом функции есть производная  $d/d\alpha$ .

Сначала рассмотрим основной вариант  $C_1 = 0$ , для которого

$$\begin{aligned} \alpha &= (x_1 - C_0)/x_2^2, \quad B_0 \equiv \text{const}, \\ s_0 &\equiv 0, \quad s_1 \equiv 0, \quad \Pi_0 \equiv 0, \quad \Pi_1 \equiv 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В этом случае совокупность уравнений (6) представляет собой систему восьми уравнений, в которые входят шесть функций  $A_0, A_1, A_2, B_1, B_2, B_3$  и пять коэффициентов  $\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6$ . Ясно, что задача будет замкнута, если априорно задать любые три из этих пяти коэффициентов. Таким образом, мы получаем возможность построения частных решений уравнений Монжа – Ампера с нетривиальной правой частью вида (5): подходящий выбор функции  $W$  позволяет проинтегрировать в конечном виде уравнения (6). Полный дифференциал (3) искомой функции  $Y(x_1(\alpha, x_2), x_2)$  подсчитывается по формулам (4).

### Примеры точных решений

Сформулируем основные результаты. При записи правой части уравнения (1) применяем формулу (5) либо даем более компактный вид этого выражения. Функции  $\Pi_i$ , которые отсутствуют в развернутой записи  $W$ , являются тождественно нулевыми.

Решение I.

$$\begin{aligned} W &= -g_0(\alpha) - x_2 g_1(\alpha) - x_2^2 g_2(\alpha), \\ g_1 &= 4A_1 A_2 - 2\dot{A}_2(B_2 + \alpha A_1), \quad g_2 = 4A_2(A_2 - \alpha \dot{A}_2) - 3\dot{A}_2 B_3, \\ \dot{A}_2 &= (A_1^2 - g_0)/B_1, \quad B_2 = \alpha A_1 + b_2, \quad \dot{B}_3 = 2(A_2 - \alpha \dot{A}_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $A_0, A_1, B_0, B_1, b_2$  – произвольные постоянные;  $g_0(\alpha)$  – произвольная функ-

ция. Например, если  $g_0 \equiv \text{const}$ , то  $W(x_1, x_2)$  является полиномом второй степени по отношению к аргументу  $x_2$  и линейно зависит от  $x_1$ .

Решение II.

$$W = -h_0(\alpha) - x_2^{-1}h_1(\alpha), \quad (9)$$

$$h_0 = A_1^2 + 2\alpha A_1 \dot{A}_1 - 6J\dot{A}_1, \quad h_1 = -\dot{A}_1 B_1, \quad A_1 = \dot{J}(\alpha),$$

$$A_2 \equiv 0, \quad B_3 \equiv 0, \quad B_2 \equiv 3J - 2\alpha A_1.$$

Здесь  $A_0, B_0, B_1$  – произвольные постоянные;  $J(\alpha)$  – произвольная функция. Например, если  $A_1 = a_1 \alpha^{n_1}$ , то

$$W = a_1^2(1 - n_1)(2n_1 - 1)(1 + n_1)^{-1} \alpha^{2n_1} + a_1 n_1 B_1 x_2^{-1} \alpha^{n_1 - 1}, \quad (10)$$

$$a_1, n_1 - \text{const}, \quad 1 + n_1 \neq 0.$$

Решение III.

$$W = -h_0(\alpha) - x_2^{-1}h_1(\alpha) - x_2^{-2}h_2(\alpha), \quad (11)$$

$$h_0 = b_2^2 - 2a_2(J - \alpha \dot{J} + 2\alpha^2 \ddot{J}), \quad h_1 = 2\dot{A}_1(\alpha \dot{J} - 2\alpha^2 \ddot{J} - J) - 4b_2 \alpha \ddot{J},$$

$$h_2 = 2\ddot{J}(\alpha \dot{J} - J), \quad A_0 = \dot{J}(\alpha), \quad A_1 = b_2 + a_1 \alpha^{1/2}, \quad A_2 = a_2 \alpha,$$

$$B_1 = 2(J - \alpha \dot{J}), \quad B_2 = b_2 \alpha, \quad B_3 \equiv 0.$$

Здесь  $B_0, a_1, a_2, b_2$  – произвольные постоянные;  $J(\alpha)$  – произвольная функция. Отметим, что, несмотря на сходство записи, формула (9) не является следствием (11); решения II и III обладают разной структурой.

Решение IV. Для функции  $W$  имеем выражения (5), (7), причем

$$\Pi_2 = -\dot{B}_1 B_1 / (2\alpha), \quad \Pi_3 = -2b_2 \dot{B}_1,$$

$$\Pi_4 = \frac{3}{4} B_1 b_3 \alpha^{-1/2} - b_2^2 - \frac{9}{2} \dot{B}_1 b_3 \alpha^{1/2},$$

$$\Pi_5 = -3b_2 b_3 \alpha^{1/2}, \quad \Pi_6 = -\frac{9}{4} b_3^2 \alpha,$$

где  $B_1(\alpha)$  – произвольная функция. Итоговая запись решения выглядит так:

$$2\alpha \dot{A}_0 = -\dot{B}_1, \quad A_1 = b_2, \quad A_2 = 3b_3 \alpha^{1/2} / 2,$$

$$B_2 = b_2 \alpha, \quad B_3 = b_3 \alpha^{3/2},$$

где  $b_2, b_3$  – произвольные постоянные.

В рамках решения IV отметим три частных примера.

IV-1. Если  $b_3 = 0$ , то

$$W = (\Pi_2 / x_2^2) + (\Pi_3 / x_2) + \Pi_4,$$

$$\Pi_2 = -\dot{B}_1 B_1 / (2\alpha), \quad \Pi_3 = -2\dot{B}_1 b_2, \quad \Pi_4 = -b_2^2,$$

где  $b_2$  – произвольная постоянная,  $B_1(\alpha)$  – произвольная функция.

IV-2. Если  $b_2 = 0$ ,  $\Pi_4 \equiv 0$ , то

$$B_1 = b_1 \alpha^{1/6}, \quad \Pi_2 = -b_1^2 / (12\alpha^{5/3}), \quad W = (\Pi_2 / x_2^2) - \frac{9}{4} b_3^2 (x_1 - C_0),$$

где  $b_1, b_3$  – произвольные постоянные.

IV-3. Если  $B_1 \equiv \text{const}$ , то

$$W = \frac{3}{4} B_1 b_3 \alpha^{-1/2} - b_2^2 - 3b_2 b_3 (x_1 - C_0)^{1/2} - \frac{9}{4} b_3^2 (x_1 - C_0),$$

где  $B_1, b_2, b_3$  – произвольные постоянные.

Решение V. Функция  $W$  определяется выражением (5), (7), где

$$\Pi_2 = -\frac{b_1^2}{4\alpha}, \quad \Pi_3 = -\frac{b_1}{2} (B_2 \alpha^{-3/2} + \dot{B}_2 \alpha^{-1/2}),$$

$$\Pi_4 = 2\dot{A}_1 (B_2 - \alpha \dot{B}_2) - \dot{B}_2^2 - \frac{3}{2} b_1 b_3, \quad \Pi_5 = \frac{3}{2} b_3 (B_2 \alpha^{-1/2} - 3\dot{B}_2 \alpha^{1/2}), \quad \Pi_6 = -\frac{9}{4} b_3^2 \alpha.$$

Здесь  $B_2(\alpha)$  – произвольная функция. Итоговая запись решения имеет вид

$$A_0 = a_0 + [b_1 / (2\alpha^{1/2})], \quad A_1 = -\frac{\alpha^{1/2}}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\dot{B}_2(\alpha)}{\alpha^{3/2}} d\alpha, \quad A_2 = \frac{3}{2} b_3 \alpha^{1/2},$$

$$B_1 = b_1 \alpha^{1/2}, \quad B_3 = b_3 \alpha^{3/2},$$

где  $a_0, b_1, b_3, \alpha_0$  – произвольные постоянные.

В рамках решения V отметим два частных примера.

V-1. Если  $b_1 = 0$ ,  $b_3 = 0$ , то  $W = 2\dot{A}_1 B_2 - A_1 \dot{B}_2$ , где  $B_2(\alpha)$  – произвольная функция; формула для  $A_1(\alpha)$  дана в записи решения V.

V-2. Если  $B_2 \equiv \text{const}$ ,  $A_1 \equiv 0$ , то  $W$  содержит три произвольные постоянные  $b_1, B_2, b_3$ :

$$W = \frac{3B_2 b_3 x_2^2}{2(x_1 - C_0)^{1/2}} - \frac{9}{4} b_3^2 (x_1 - C_0) - \frac{b_1^2}{4(x_1 - C_0)} - \frac{b_1 B_2 x_2^2}{2(x_1 - C_0)^{3/2}} - \frac{3}{2} b_1 b_3.$$

Решение VI. Функция  $W$  (см. (5), (7)) содержит следующие выражения:

$$\Pi_2 = -\frac{b_1^2}{4\alpha}, \quad \Pi_3 = -b_1 b_2 \alpha^{-1/2},$$

$$\Pi_4 = \frac{b_1}{4} (2\alpha \dot{B}_3 - 3B_3) \alpha^{-3/2} - b_2^2 - b_1 \dot{B}_3 \alpha^{-1/2}, \quad \Pi_5 = -2b_2 \dot{B}_3,$$

$$\Pi_6 = \left( \alpha \dot{B}_3 - \frac{3}{2} B_3 \right) \left( \frac{\dot{B}_3}{\alpha} + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\dot{B}_3}{\alpha^2} d\alpha \right) - \dot{B}_3^2,$$

где  $B_3(\alpha)$  – произвольная функция. Решение определяется формулами

$$A_0 = a_0 + [b_1 / (2\alpha^{1/2})], \quad A_1 = b_2 \equiv \text{const},$$

$$A_2 = -\frac{\alpha}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\dot{B}_3(\alpha)}{\alpha^2} d\alpha, \quad B_1 = b_1 \alpha^{1/2}, \quad B_2 = b_2 \alpha,$$

где  $a_0, b_1, b_2, \alpha_0$  – произвольные постоянные.

В рамках решения VI отметим два примера.

VI-1. Если  $b_1 = 0, b_2 = 0$ , то  $W = x_2^2 \Pi_6(\alpha)$ , и это выражение зависит от выбора произвольной функции  $B_3(\alpha)$ .

VI-2. Если  $B_3 \equiv \text{const}$ , то

$$W = \frac{\Pi_2}{x_2^2} + \frac{\Pi_3}{x_2} + \Pi_4,$$

и эта функция содержит три свободных постоянных  $b_1, b_2, B_3$ .

Решение VII. Функция  $W$  (см. (5), (7)) подсчитывается с помощью формул

$$\Pi_2 = -\dot{B}_1 B_1 / (2\alpha), \quad \Pi_3 = \frac{a_1}{2} \alpha^{-1/2} (B_1 - 2\alpha \dot{B}_1) + 2\dot{A}_0 B_2,$$

$$\Pi_4 = a_2 (B_1 - 2\alpha \dot{B}_1) + a_1 B_2 \alpha^{-1/2} + 3B_3 \dot{A}_0, \quad \Pi_5 = 2a_2 B_2 + \frac{3a_1}{2} \alpha^{-1/2} B_3, \quad \Pi_6 = 3a_2 B_3,$$

где  $B_1(\alpha)$  – произвольная функция;  $B_2, B_3$  – произвольные постоянные.

Решение имеет вид

$$\dot{A}_0 = -\dot{B}_1 / (2\alpha), \quad A_1 = a_1 \alpha^{1/2}, \quad A_2 = a_2 \alpha, \quad a_1, a_2 \text{ – произвольные постоянные.}$$

Решение VIII. Правая часть  $W$  уравнения Монжа – Ампера содержит следующие выражения:

$$\Pi_2 = b_1^2 / 2, \quad \Pi_3 = -2b_1 b_2, \quad \Pi_4 = -b_2^2 - (3b_1 b_3 / 2),$$

$$\Pi_5 = -2b_2 b_3, \quad \Pi_6 = -b_3^2,$$

где  $b_1, b_2, b_3$  – произвольные постоянные. Итоговая запись решения выглядит так:

$$A_0 = (-b_1 / 2) \ln \alpha, \quad A_1 = b_2, \quad A_2 = b_3 / 2,$$

$$B_1 = \alpha b_1, \quad B_2 = \alpha b_2, \quad B_3 = \alpha b_3.$$

Решение IX. Укажем здесь три частных решения, для которых отдельные функции  $\Pi_i(\alpha)$  – степенные (см. (5) и (7)).

$$\text{IX-1.} \quad \Pi_2 \equiv 0, \quad \Pi_3 = a_1 B_1, \quad \Pi_4 = r_4 \alpha^{n_4}, \quad \Pi_5 = a_1 r_4 r_5 \alpha^{2+n_4} / B_1,$$

$$\Pi_6 = r_6 \alpha^{2+2n_4} (r_4 / B_1)^2, \quad A_0 \equiv \text{const}, \quad A_1 = \alpha a_1,$$

$$r_5 = (n_4 - 2)(n_4 - 1) / [(1 + n_4)(2 + n_4)], \quad B_1 \equiv \text{const}, \quad B_2 = -a_1 \alpha^2 / 2,$$

$$r_6 = 2n_4(1 - n_4) / [(1 + n_4)^2(2 + n_4)], \quad (1 + n_4)(2 + n_4) \neq 0; \quad B_1 \neq 0,$$

$$A_2 = \frac{r_4 \alpha^{1+n_4}}{B_1(1 + n_4)}, \quad B_3 = \frac{-2n_4 r_4 \alpha^{2+n_4}}{B_1(1 + n_4)(2 + n_4)},$$

где  $A_0, B_1, n_4, a_1, r_4$  – произвольные постоянные.

$$\begin{aligned}
\text{IX-2.} \quad & \Pi_2 \equiv 0, \Pi_3 \equiv 0, \Pi_4 \equiv 0, \Pi_5 = a_1 a_2 r_5 \alpha^{1+n_2}, \Pi_6 = a_2^2 r_6 \alpha^{2n_2}; \\
& r_5 = (n_2 - 2)(n_2 - 3)/(1 + n_2), \quad r_6 = 2(1 - n_2)(n_2 - 2)/(1 + n_2); \\
& A_0 \equiv \text{const}, B_1 \equiv 0, \quad A_2 = a_2 \alpha^{n_2}, \quad A_1 = \alpha a_1, \quad B_2 = -a_1 \alpha^2 / 2, \\
& B_3 = \frac{2(1 - n_2)}{(1 + n_2)} a_2 \alpha^{1+n_2}, \quad 1 + n_2 \neq 0.
\end{aligned}$$

где  $A_0, a_1, a_2, n_2$  – произвольные постоянные.

$$\begin{aligned}
\text{IX-3.} \quad & \Pi_2 \equiv 0, \Pi_3 \equiv 0, \Pi_4 \equiv r_4 \alpha^{n_4}, \Pi_5 = \frac{4A_1 n_4 r_4}{B_1 (1 + n_4)} \alpha^{1+n_4}, \\
& \Pi_6 = \frac{2A_1^2 n_4 (1 + 2n_4) r_4 \alpha^{2+n_4}}{B_1 (1 + n_4) (2 + n_4)} + \frac{2n_4 (1 - n_4) r_4^2 \alpha^{2+2n_4}}{B_1^2 (2 + n_4) (1 + n_4)^2}; \\
& A_0 \equiv \text{const}, A_1 \equiv \text{const}, \quad A_2 = \frac{\alpha A_1^2}{B_1} + \frac{r_4 \alpha^{1+n_4}}{B_1 (1 + n_4)}, \\
& B_1 \equiv \text{const}, B_2 = \alpha A_1, B_3 = \frac{-2n_4 r_4 \alpha^{2+n_4}}{B_1 (1 + n_4) (2 + n_4)}, \quad (1 + n_4) (2 + n_4) \neq 0, B_1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Здесь  $A_0, A_1, B_1, n_4, r_4$  – произвольные постоянные.

Напомним, что решения I – IX получены для  $C_1 = 0$  с учетом формул (7).

Укажем далее два решения, для которых допускается  $C_1 \neq 0$ .

Решение X.

$$\begin{aligned}
& W = \Pi_4 + (\Pi_5 / x_2) + (\Pi_6 / x_2^2), \\
& \Pi_4 = \dot{A}_2 (B_1 - C_1 \dot{B}_2) - \dot{B}_2^2, \quad \Pi_5 = \dot{A}_2 (2B_2 - 2\alpha \dot{B}_2 - C_1 \dot{B}_3), \quad \Pi_6 = \dot{A}_2 (3B_3 - 2\alpha \dot{B}_3) - \dot{B}_3^2, \\
& A_0 \equiv \text{const}, A_1 \equiv \text{const}, \quad A_2 = -\frac{\alpha}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \alpha^{-2} \dot{B}_3(\alpha) d\alpha, \\
& B_0 \equiv \text{const}, B_1 \equiv \text{const}, \quad B_2 = b_2 + \alpha A_1 - C_1 A_2.
\end{aligned}$$

Здесь  $B_3(\alpha)$  – произвольная функция;  $A_0, B_0, A_1, B_1, C_0, C_1, b_2$  – произвольные постоянные.

Решение XI. Функция  $W$  определяется выражением (5), в котором  $\Pi_i = \alpha^i r_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 6$ ;

$$\begin{aligned}
r_0 &= -b_0 (a_0 C_1 + b_0), \quad r_1 = -2[a_1 C_1 b_0 + a_0 (b_0 + b_1 C_1) + 2b_0 b_1], \\
r_2 &= -3[a_2 C_1 b_0 + a_0 (b_1 + C_1 b_2) + 2b_0 b_2] - 4[a_1 (b_0 + b_1 C_1) + b_1^2], \\
r_3 &= -6[a_2 (b_0 + b_1 C_1) + a_1 (b_1 + C_1 b_2) + 2b_1 b_2] - 4[a_0 (b_2 + C_1 b_3) + 2b_0 b_3], \\
r_4 &= -9[a_2 (b_1 + C_1 b_2) + b_2^2] - 8[a_1 (b_2 + C_1 b_3) + 2b_1 b_3] - 5a_0 b_3, \\
r_5 &= -12(b_2 + C_1 b_3 + 2b_2 b_3) - 10a_1 b_3, \quad r_6 = -b_3 (15a_2 + 16b_3).
\end{aligned}$$

Здесь все  $r_i$  постоянны. Решение определяется формулами

$$A_0 = \alpha a_0, A_1 = \alpha^2 a_1, A_2 = \alpha^3 a_2, B_0 = \alpha b_0, B_1 = \alpha^2 b_1, B_2 = \alpha^3 b_2, B_3 = \alpha^4 b_3, \\ b_0 = -a_0 C_1, b_1 = -a_0 - a_1 C_1, b_2 = -a_1 - a_2 C_1, b_3 = -a_2,$$

где  $C_0, C_1, a_0, a_1, a_2$  – произвольные постоянные.

Далее мы рассмотрим пример газодинамического истолкования решения II.

### Течения газа с переменной энтропией

Уравнения адиабатического движения идеального газа с переменной энтропией можно преобразовать к уравнению Монжа – Ампера для функции  $\xi = \xi(p, \psi)$ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial p^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \psi^2} - \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial p \partial \psi} \right)^2 = \frac{\partial V}{\partial p}, \quad (12)$$

$$t = \frac{\partial \xi}{\partial p}, \quad u = \frac{\partial \xi}{\partial \psi}, \quad V = V(p, S), \quad S = S(\psi), \quad V = 1/\rho, \quad d\psi = \rho dx - \rho u dt.$$

История этого вопроса и библиография даны в [1, 2]. Здесь приняты обозначения:  $x$  – декартова координата;  $t$  – время;  $\psi$  – лагранжева координата (функция частицы);  $u$  – скорость газа;  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность;  $V$  – удельный объем;  $S$  – энтропия единицы массы газа. Далее нам потребуются следующие известные термодинамические соотношения [6]. Уравнения состояния газа  $p = p(V, T)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(V, T)$ ,  $S = S(V, T)$  должны удовлетворять второму началу термодинамики:

$$TdS = d\varepsilon + pdV,$$

а это значит, что

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{p}{T} \right), \quad c_V = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T}, \quad (13)$$

где  $T$  – температура;  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия;  $c_V$  – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме. Если за независимые параметры приняты  $p$  и  $V$ , то функции  $\varepsilon = \varepsilon(p, V)$ ,  $S = S(p, V)$ ,  $T = T(p, V)$  подчинены связям

$$\frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial S}{\partial V} - \frac{\partial T}{\partial V} \frac{\partial S}{\partial p} = 1, \quad T \frac{\partial S}{\partial V} = p + \frac{\partial \varepsilon}{\partial V}, \quad T \frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}. \quad (14)$$

Условие устойчивости термодинамического равновесия имеет вид  $\partial p(V, S) / \partial V < 0$  или, что то же самое,  $\partial V(p, S) / \partial p < 0$ . Классическая газовая динамика изучает сжимаемые среды, удовлетворяющие свойствам нормального газа [1], [7]. В частности, для нормального газа выполнено условие выпуклости  $\partial^2 p(V, S) / \partial V^2 > 0$ . Термодинамически аномальная сжимаемая среда удовлетворяет условию вогнутости  $\partial^2 p(V, S) / \partial V^2 < 0$ , и в ней возможно существование ударных волн разрежения [8–10]. Сжатие поршнем такой среды инициирует расширяющуюся волну, которая является аналогом волны разрежения в обычном газе.

### Расширение аномального газа

Сопоставим друг с другом уравнения (1) и (12) и выполним в (3) – (5) переобозначения:

$$x_1 \rightarrow p, x_2 \rightarrow \psi, Y \rightarrow \xi, Y_1 \rightarrow t, Y_2 \rightarrow u, W \rightarrow \partial V / \partial p.$$

Обсудим газодинамическую интерпретацию решения II для случая (10) при  $B_0 = 0, B_1 = 0$ :

$$\partial V / \partial p = -(a_1^2 k_1 / \psi^{4n})(1+2n)(p-p_0)^{2n}, \quad n > 1, \quad (15)$$

$$k_1 = (n-1)(2n-1)/[(n+1)(2n+1)].$$

Движение газа определяется формулами

$$u = a_1 \frac{(1-2n)}{(1+n)} \psi^{(n-1)/n} \left( \frac{t+t_0}{a_1} \right)^{(n+1)/n}; \quad (16)$$

$$p - p_0 = \left[ \frac{(t+t_0)\psi^{2n-1}}{a_1} \right]^{1/n}. \quad (17)$$

В этих выражениях (см. (4), (9), (10)) приняты обозначения:  $C_0 = p_0 > 0$ ,  $-A_0 = t_0 > 0$ ;  $p_0, t_0, a_1$  – свободные параметры задачи. Интегрируя (15), получаем уравнение состояния термодинамически устойчивой сжимаемой среды (газа):

$$k_2 S = V / [p_1^{1+2n} - (p-p_0)^{1+2n}], \quad p_1 > 0, k_2 > 0. \quad (18)$$

$$p_1, k_2 - \text{const.}$$

Здесь параметр  $k_2$  характеризует зависимость температуры от давления (см. ниже формулу (20)). Распределение энтропии по частицам газа имеет вид

$$k_2 S = a_1^2 k_1 / \psi^{4n}. \quad (19)$$

Ясно, что  $\partial^2 V(p, S) / \partial p^2 = 0$  при  $p = p_0$ . Для каждого фиксированного  $\psi$  имеем положительную выпуклость (нормальный газ) при  $0 < p < p_0$ ; имеем отрицательную выпуклость (аномальный газ) при  $p_0 < p < \infty$  (рис. 1).

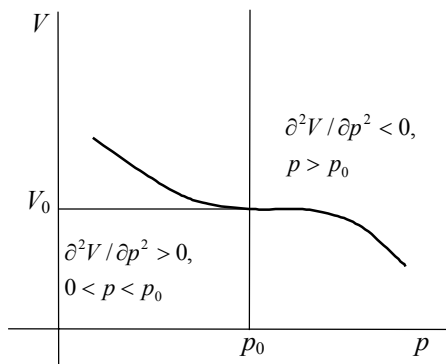


Рис. 1. Знакопеременная выпуклость уравнения состояния (18)  $V = V(p, S)$



На основе формул (13), (14) находим выражения для температуры, внутренней энергии и удельной теплоемкости:

$$(T - T_0) / k_2 = pp_1^{1+2n} - [(p - p_0)^{2+2n} / (2 + 2n)]; \quad (20)$$

$$\varepsilon = V \{ [T / (\pi_1 k_2)] - p \}, \quad \pi_1 \equiv \pi_1(p) = p_1^{1+2n} - (p - p_0)^{1+2n},$$

$$c_V = (1 + 2n)(p - p_0)^{2n} VT / (k_2^2 \pi_1^3). \quad (21)$$

Неравенства  $\pi_1 > 0$ ,  $T > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  обеспечиваются подходящим выбором констант  $T_0$ ,  $p_1$ . Здесь мы рассматриваем малую, но конечную окрестность термодинамической точки  $(p_0, V_0, T_0)$ . Внутри этой окрестности  $\partial T / \partial V \equiv 0$  (см. (20)). Функции (18), (20), (21), определяющие термодинамические свойства газа, зависят от выбора параметров  $n$ ,  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $T_0$ ,  $k_2$ . Из (18) следует, что

$$V_0 = k_2 S_0 p_1^{1+2n}, \quad S_0 = S(\psi = \psi_0), \quad (22)$$

где  $\psi_0$  – фиксированное значение лагранжевой координаты.

Изучаемая задача состоит в следующем. В начальный момент времени ( $t = 0$ ) аномальный газ находится между двумя непроницаемыми поршнями:  $\psi \in [\psi_l, \psi_r]$ , где  $0 < \psi_l < \psi_r < \infty$ ;  $\psi_l, \psi_r - \text{const}$ . Поршни движутся в разные стороны, т.е. происходит расширение аномального газа, сопровождающееся движением ударной волны разрежения (УВР)  $\psi_j = \psi_j(t)$  (рис. 2, а). При  $t = 0$  фронт УВР находится на правом поршне:  $\psi_j(t = 0) = \psi_r$ , а при  $t > 0$  этот сильный разрыв перемещается влево. Данный процесс длится до тех пор, пока фронт УВР не догонит левый поршень:  $\psi_j(t = t_1) = \psi_l$ ,  $0 \leq t \leq t_1 < \infty$ . Таким образом, перед фронтом УВР уравнение состояния (18) имеет отрицательную выпуклость (аномальный газ,  $p - p_0 > 0$ ), а за фронтом – положительную выпуклость (нормальный газ,  $p - p_0 < 0$ ). Форма записи термодинамических выражений (19) – (21) одинаковая по обе стороны сильного разрыва. Различие в содержании этих формул, т.е. и различие между точками вида  $(p_0, V_0, T_0)$  по обе стороны скачка, обусловлено тем, что параметры  $k_2$  и  $T_0$  меняются при переходе через разрыв, но при этом их отношение  $T_0/k_2$  остается непрерывным (см. ниже формулу (31)). Далее рассматриваем ситуацию, когда ударный переход «аномальный газ – нормальный газ» сопровождается выделением импульса и энергии в окрестности линии сильного разрыва  $x = x_j(t) \equiv x(\psi_j, t)$ . Подвод импульса и энергии происходит с правой стороны разрыва.

Динамические условия совместности при  $x = x_j(t)$  имеют вид [1, 6]

$$\rho_j(u_j - N) = \rho_*(u_* - N) = m'; \quad (23)$$

$$p_j + \rho_j(u_j - N)^2 = p_* + \rho_*(u_* - N)^2 + p'; \quad (24)$$

$$\varepsilon_j + p_j V_j + \frac{1}{2}(u_j - N)^2 = \varepsilon_* + p_* V_* + \frac{1}{2}(u_* - N)^2 + \frac{1}{m'}(W' + Np'). \quad (25)$$

Кроме того, на разрыве должен быть выполнен закон возрастания энтропии:

$$S_j > S_*. \quad (26)$$

Здесь индексы \* и  $j$  отмечают значения функций перед и за фронтом ударной волны;  $N = dx_j / dt$  – скорость перемещения сильного разрыва;  $m'$ , кг/(м<sup>2</sup>·с) – поток массы газа через разрыв;  $p'$ , Н/м<sup>2</sup> и  $W'$ , Дж/(м<sup>2</sup>·с) – плотности распределения на разрыве внешних для среды сил и притока энергии. Таким образом, величина  $u' = p' / m'$ , м/с, есть скорость, которая характеризует воздействие давления  $p'$  на скачке;  $\varepsilon' = W' / m'$ , Дж/кг, определяет подвод энергии, рассчитанный на единицу массы. Нетрудно видеть, что

$$m' = -\frac{d\psi_j}{dt}, p_j - p_* = (u_j - u_*) \frac{d\psi_j}{dt} + p'.$$

Движение газа между левым поршнем и УВР определяется формулами (16), (17),  $\psi \in [\psi_l, \psi_j]$ ; в этой области  $u < 0$ ,  $p - p_0 > 0$ . Справа от разрыва, т.е. при  $\psi \in (\psi_j, \psi_r]$  движение газа представляется в виде

$$u = a_1 \frac{(2n-1)}{n+1} \psi^{(n-1)/n} \left( \frac{t+t_0}{a_1} \right)^{(n+1)/n}; \quad (27)$$

$$p - p_0 = - \left[ \frac{(t+t_0) \psi^{2n-1}}{a_1} \right]^{1/n}; \quad (28)$$

в этой области  $u > 0$ ,  $p - p_0 < 0$ . Скорость перемещения УВР отрицательная:  $N < 0$ . Удовлетворяя условиям (23) – (25), получаем следующие зависимости:

$$u_j = -u_*, p_j - p_0 = p_0 - p_*,$$

$$(p_j - p_0)^{1+2n} = H_1 u_j, (p_* - p_0)^{1+2n} = H_1 u_*, p_1^{1+2n} = N_1 h_1,$$

$$H_1 = h_1 (t - t_0)^{-b_1}, N = N_1 (t + t_0)^{b_1}, h_1, N_1 - \text{const}; b_1 = n(1+8n)/(n-1);$$

$$\psi_j(t) = \psi_j^1(t+t_0)^{(1+2n)/(1-n)}, \psi_j^1 = \left[ \frac{1-n}{(1+2n)a_1^2 k_1 h_1} \right]^{1/(1-4n)}, \quad n > 1, h_1 < 0, N_1 < 0.$$

После аналитических преобразований находим

$$u_j = \frac{(2n-1)}{(n+1)a_1^{1/n}} (\psi_j^1)^{(n-1)/n} (t+t_0)^{-1}; \quad (29)$$

$$p_j - p_0 = -(\psi_j^1)^{(2n-1)/n} (t+t_0)^{b_2} a_1^{-1/n}, \quad b_2 = (4n-1)/(1-n). \quad (30)$$

Чтобы обеспечить баланс энергии (25), необходимо принять соотношение

$$(T_0 / k_2)_* = (T_0 / k_2)_j. \quad (31)$$

Функции источников импульса и энергии содержат свободный параметр  $h_1$  и имеют вид

$$p' = \frac{6n^2}{(n^2-1)a_1^{1/n}} (\psi_j^1)^{(2n-1)/n} (t+t_0)^{b_2}; \quad (32)$$

$$\varepsilon' + u' N = a_1^2 k_1 p_1^{1+2n} p' / \psi_j^{4n}. \quad (33)$$

Зависимость источников от модуля скорости перемещения УВР – степенная:

$$p' \sim |N|^{(1-4n)/[n(1+8n)]}, \quad (\varepsilon' + u' N) \sim |N|^{(1+8n^2)/(n-1)}.$$

Параметры  $a_1, n_1, k_1, p_0, p_1$  одни и те же по обе стороны разрыва, поэтому  $(k_2 S)^* = (k_2 S)_j$  (см. (19)). В формуле (22) нужно взять  $\psi_0 = \psi_j(t=0)$ , и тогда

$V_{0*} = V_{0j} = V_0$ . Условие (26) возрастания энтропии дает неравенство

$$k_2^{\text{anomal}} > k_2^{\text{normal}}. \quad (34)$$

Следовательно, согласно (31), термодинамические точки  $(p_0, V_0, T_0)^*$  и  $(p_0, V_0, T_0)_j$  различаются только значениями  $T_0$ , а именно:

$$T_0^{\text{anomal}} > T_0^{\text{normal}}. \quad (35)$$

Напомним, что параметры  $(p_0, V_0, T_0)^*$  и  $(p_0, V_0, T_0)_j$  служат основой построения формул (18), (20), (21), но при этом их числовые значения не принадлежат ни «аномальной» ни «нормальной» областям течения. Согласно (16), зависимость скорости левого поршня от времени имеет вид

$$u_l = u(\psi = \psi_l, t) \sim (t + t_0)^{(n+1)/n}.$$

Вместе с тем  $N \sim (t + t_0)^{b_1}$ , причем  $\psi_j(t=0) = \psi_r > \psi_l$  (см. постановку задачи).

Ясно, что в  $b_1 > [(n+1)/n]$ , поэтому существует конечный момент времени  $t_1 > 0$ , когда фронт УВР догонит левый поршень:  $\psi_j(t=t_1) = \psi_l$ . Именно это значение  $t = t_1$  представляет собой длительность процесса расширения аномального газа.

### Сжатие нормального газа

В начальный момент времени ( $t=0$ ) нормальный газ находится между двумя поршнями,  $\psi \in [\psi_l, \psi_r]$ , где  $0 < \psi_l < \psi_r < \infty$ . Поршни движутся навстречу друг другу, и в потоке газа распространяется ударная волна сжатия (УВС)  $\psi_j = \psi_l(t)$ , рис. 2, б.

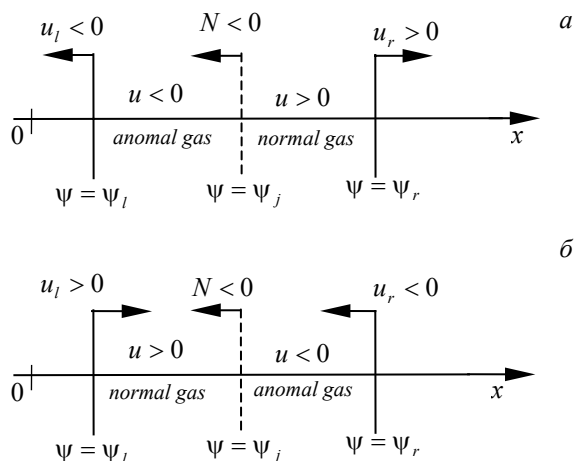


Рис. 2 Течение газа между двумя подвижными поршнями:  
а – расширение аномального газа; б – сжатие нормального газа

Физический смысл всех предыдущих обозначений сохраняется. При  $t = 0$  фронт УВС находится на правом поршне:  $\psi_j(t = 0) = \psi_r$ , а при  $t > 0$  этот сильный разрыв перемещается влево,  $N < 0$ . Этот процесс длится до момента встречи левого поршня с УВС:  $\psi_j(t = t_1) = \psi_l$ . Перед фронтом УВС уравнение состояния (18) имеет положительную выпуклость (нормальный газ,  $p - p_0 < 0$ ,  $u > 0$ ); за скачком выпуклость отрицательная (аномальный газ,  $p - p_0 > 0$ ,  $u < 0$ ). Данный ударный переход сопровождается поглощением импульса и энергии в правой окрестности сильного разрыва. Форма записи динамических условий совместности (23) – (25) полностью сохраняется. Движение нормального газа между левым поршнем и УВС определяется формулами (27), (28). В предыдущей задаче эти формулы относились к области газа, расположенной справа от разрыва. Движение аномального газа справа от разрыва описывается формулами (16), (17). Таким образом, по сравнению с предыдущей задачей, нормальная и аномальная области поменялись местами (рис. 2). Алгоритм расчета газодинамических параметров на фронте разрыва остается прежним, но итоговые формулы отличаются знаками. А именно: в левых частях выражений (29), (30), (32) надо сделать замену  $u_j \rightarrow (-u_j)$ ,  $(p_j - p_0) \rightarrow (p_0 - p_j)$ ,  $p' \rightarrow (-p')$ . Из (33) ясно, что при этом изменится на противоположный знак функции источника энергии  $\epsilon' + u' N$ . Условие (26) возрастания энтропии приводит к неравенствам

$$k_2^{\text{normal}} > k_2^{\text{anomal}}, \quad T_0^{\text{normal}} > T_0^{\text{anomal}}. \quad (36)$$

Сопоставляя друг с другом задачу о расширении аномального газа и задачу о сжатии нормального газа, можем заключить, что для них форма записи термодинамических выражений (18), (20), (21) одинаковая. Различия сосредоточены в содержательной части этих формул и обусловлены отличием (34), (35) от (36). Следовательно, термодинамическая устойчивость двух процессов: процесса расширения, содержащего УВР, и процесса сжатия, содержащего УВС, имеет место для двух сжимаемых сред с различающимися термическими уравнениями состояния вида  $T = T(p)$  (рис. 3). А именно: в задачах о движении УВР и УВС зависимость (20) должна обладать свойствами (34), (35) либо (36) соответственно.

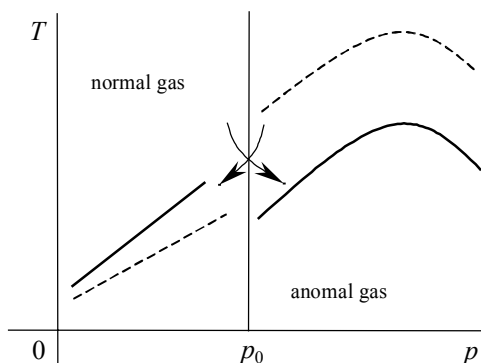


Рис. 3. Качественные свойства зависимости (20)  $T = T(p)$  в нормальной и аномальной областях: пунктирные линии – для задачи о расширении аномального газа; сплошные линии – для задачи о сжатии нормального газа. Дуговые стрелки указывают направления процессов

# Заключение

Для неоднородного уравнения Монжа – Ампера (1) найдены частные параметрические решения I – XI. Дана газодинамическая интерпретация решения II. Получено аналитическое описание термодинамически устойчивых ударных переходов вида «аномальный газ – нормальный газ» и «нормальный газ – аномальный газ».

# ЛИТЕРАТУРА

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
2. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
3. Хабиров С.В. Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы уравнения Монжа – Ампера // Математический сборник. 1990. Т. 181. № 12. С. 1607–1622.
4. Кушнер А.Г. Контактная линеаризация уравнений Монжа – Ампера и инварианты Лапласа // Докл. РАН. 2008. Т. 422. № 5. С. 1–4.
5. Заславский Б.И. О нелинейном взаимодействии сферической ударной волны, возникшей в результате взрыва заглубленного заряда, со свободной поверхностью воды // ПМТФ. 1964. № 4. С. 57–65.
6. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
7. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 304 с.
8. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука. 1966. 688 с.
9. Borisov A.A., Borisov A.A., Kutateladze S.S., Nakoryakov V.E. Rarefaction shock wave near the critical liquid-vapour point // J. Fluid Mech. 1983. V. 126. P. 59–73.
10. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортков В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996. 408 с.

Статья поступила 22.10.2014 г.

*Shablovskii O.N.* PARAMETRIC SOLUTIONS FOR THE MONGE – AMPERE EQUATION AND GAS FLOW WITH VARIABLE ENTROPY. DOI 10.17223/19988621/33/11

The non-uniform Monge–Ampere equation is considered for an unknown function  $Y = Y(x_1, x_2)$  of two independent variables. We set out an algorithm for building analytical solutions depending on a parameter  $\alpha$ :  $x_1 = \alpha x_2^2 + x_2 C_1 + C_0$ ;  $C_0$  and  $C_1$  are constant. The cases  $C_1 = 0$  and  $C_1 \neq 0$  are studied. Totally, eleven exact partial solutions with arbitrary functions or arbitrary constants were constructed. We also present a gas-dynamical interpretation for one of the solutions, namely, the problem of shock wave propagation in a thermodynamically stable compressible medium with a nonclassic (sign-alternating) convexity in the equation of state. Two examples of gas flowing between movable impermeable pistons are built in the finite form. The first case deals with expansion of the thermodynamically anomalous gas (negative convexity of the state equation): the pistons move in opposite directions; the flow contains a rarefaction shock wave moving from the right piston to the left one; the gas behind the jump front is thermodynamically normal (positive convexity of the state equation); and the process lasts until the rarefaction shock wave front reaches the left piston. In the second case, we consider compression of the thermodynamically normal gas: the pistons move to meet each other, and a compression shock wave propagates in the gas; the gas behind the jump front is thermodynamically anomalous; and the process lasts till the moment the compression shock wave front reaches the left piston. The shock transitions represented are accompanied with emission/absorption of the momentum and energy in the vicinity of the strong jump line.

Keywords: Monge – Ampere equation, thermodynamically anomalous gas, compression shock wave, rarefaction shock wave.

SHABLOVSKY Oleg Nikiphorovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus)

E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

#### REFERENCES

1. Rozhdestvenskiy B.L., Yanenko N.N. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike*. Moscow, Nauka Publ., 1978, 688 p. (in Russian)
2. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. *Metod differentsial'nykh svyazey i ego prilozheniya v gazovoy dinamike*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1984, 272 p. (in Russian)
3. Khabirov S.V. Neizentropicheskie odnomernye dvizheniya gaza, postroennyye s pomoshch'yu kontaktnoy gruppy uravneniya Monzha – Ampera. *Matematicheskiiy sbornik*, 1990, vol. 181, no. 12, pp. 1607–1622. (in Russian)
4. Kushner A.G. Kontaktnaya linearizatsiya uravneniy Monzha – Ampera i invarianty Laplasya. *Doklady RAN*, 2008, vol. 422, no. 5, pp. 1–4. (in Russian)
5. Zaslavskiy B.I. O nelineynom vzaimodeystvii sfericheskoy udarnoy volny, voznikshey v rezul'tate vzryva zaglublennogo zaryada, so svobodnoy poverkhnost'yu vody. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1964, no. 4, pp. 57–65. (in Russian)
6. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy*. Moscow, Nauka Publ., 1973, vol. 1. 536 p. (in Russian)
7. Godunov S.K. *Elementy mekhaniki sploshnoy sredy*. Moscow, Nauka Publ., 1978, 304 p. (in Russian)
8. Zel'dovich Ya.B., Rayzer Yu.P. *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavleniy*. Moscow, Nauka Publ., 1966, 688 p. (in Russian)
9. Borisov A.A., Borisov A.A., Kutateladze S.S., Nakoryakov V.E. Rarefaction shock wave near the critical liquid-vapour point. *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 126, pp. 59–73.
10. Kanel' G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V., Fortov V.E. *Udarno-volnovyye yavleniya v kondensirovannykh sredakh*. Moscow, Yanus-K Publ., 1996, 408 p. (in Russian)