

М.Н. Сиротина**СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛОВ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ НАСТУПЛЕНИЯ СОСЕДНИХ СОБЫТИЙ В МОДУЛИРОВАННОМ СИНХРОННОМ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОМ ПОТОКЕ ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ И УСЛОВИЯ РЕКУРРЕНТНОСТИ ПОТОКА**

Рассматривается модулированный синхронный дважды стохастический поток событий в условиях непродлевающегося мертвого времени. После каждого зарегистрированного события наступает время фиксированной длительности, в течение которого другие события исходного модулированного синхронного потока недоступны наблюдению. По окончании длительности мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени и т.д. В работе получена формула совместной плотности вероятностей значений длительности интервалов между соседними событиями в модулированном синхронном потоке в условиях мертвого времени. Представлены условия рекуррентности рассматриваемого потока, а также его вероятностные характеристики.

Ключевые слова: модулированный синхронный поток событий; мертвое время; совместная плотность вероятностей значений длительности интервала между соседними событиями потока; условия рекуррентности потока.

В настоящей статье проводится дальнейшее исследование модулированного синхронного потока событий, начатое в работах [1–4].

Математические модели систем массового обслуживания широко применяются при описании реальных физических, технических и других процессов и систем. В связи с бурным развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей, телекоммуникационных сетей, объединенных термином «цифровые сети интегрального обслуживания» (ЦСИО) [5].

На практике параметры, определяющие входящий поток событий, изменяются со временем, при этом изменения часто носят случайный характер, последнее приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий. По-видимому, одной из первых работ в этом направлении стала статья [6], в которой дважды стохастический поток определяется как поток, интенсивность которого есть случайный процесс. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Подчеркнем, что потоки второго класса впервые введены в рассмотрение практически одновременно в 1979 г. в [7–9]. В [7, 8] введенные потоки названы МС (Markov chain)-потоками, в [9] – MVP (Markov versatile processes)-потоками. С начала 90-х гг. отечественные и зарубежные авторы в своих работах [10–15] называют введенные в [7–9] потоки событий либо дважды стохастическими потоками событий, либо МАР-потоками, либо МС-потоками. В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, МС-потоки можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки событий [16–21]; 2) асинхронные и обобщенные асинхронные потоки событий [22–27]; 3) полусинхронные и обобщенные полусинхронные потоки событий [28–33]. В [34] введены в рассмотрение МАР-потоки событий первого порядка (собственно, МАР-потоки, введенные в [9]) и МАР-потоки событий второго порядка (суперпозиция двух синхронизированных МАР-потоков первого порядка, отличающихся друг от друга исходными параметрами). В [34] показано, что синхронный МС-поток является частным случаем МАР-потока первого порядка, асинхронный и полусинхронный МС-потоки являются частными случаями МАР-потока второго порядка.

В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще не известны, либо (что еще более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [24, 27, 29, 33, 35]; 2) оценки параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [16–22, 26, 28, 30–32].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [36], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В качестве примера приведем протокол CSMA/CD – протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта, широко используемого в компьютерных сетях. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

В работах [1–4] введен в рассмотрение модулированный синхронный поток событий, являющийся обобщением синхронного потока и относящийся к классу MAP-потоков второго порядка. Синхронный поток событий систематически исследовался в работах [16–21, 37–41]. В настоящей статье, являющейся непосредственным развитием работ [1–4], приведен вывод совместной плотности вероятностей значений длительности интервалов между соседними событиями модулированного синхронного дважды стохастического потока, функционирующего в условиях непродлевающегося мертвого времени. Приводятся условия рекуррентности рассматриваемого потока, а также некоторые его вероятностные характеристики.

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный синхронный поток событий (далее поток), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ (потока) в i -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром $\alpha_i, i = 1, 2$. Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в i -м состоянии, то на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, где Δt – достаточно малая величина, с вероятностью $\alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$ пребывание процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии закончится и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью, равной единице, перейдет из i -го состояния в j -е ($i, j = 1, 2, i \neq j$). В течение временного интервала случайной длительности, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью $\lambda_i, i = 1, 2$. Кроме того, переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1 ; переход осуществляется с вероятностью p ($0 < p \leq 1$); с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое возможен также в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2 ; переход осуществляется с вероятностью q ($0 < q \leq 1$); с вероятностью $1 - q$ процесс $\lambda(t)$ остается во втором состоянии. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. После каждого зарегистрированного события наступает время фиксированной длительности T (далее мертвое время), в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. Рассматривается непродлевающееся мертвое время, т.е. события, наступившие в течение интервала мертвого времени, не вызывают его продления. По окончании длительности периода мертвого времени первое наступившее событие вновь генерирует период мертвого времени длительности T и т.д. Вариант возникающей ситуации приведен на рис.1, где λ_1, λ_2 – состояния процесса $\lambda(t)$, t_1, t_2, \dots – моменты наступления наблю-

даемых событий потока, штриховка – периоды мертвого времени длительности T , ось под номером 1 отображает исходный модулированный поток событий, под номером 2 – схему создания мертвого времени, под номером 3 – наблюдаемые события модулированного синхронного потока.

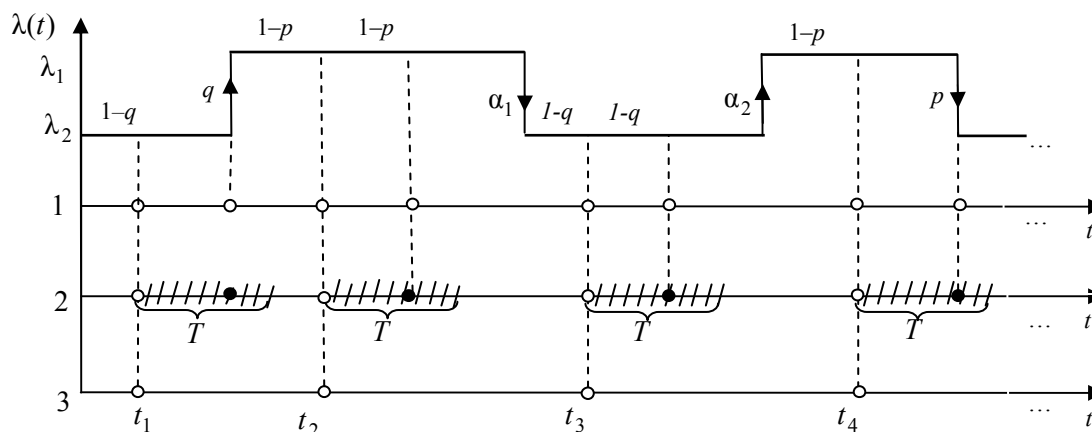


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \left\| \begin{array}{cc|cc} -(\lambda_1 + \alpha_1) & \alpha_1 & (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) & q\lambda_2 & (1-q)\lambda_2 \end{array} \right\| = \|D_0 | D_1\|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если $\alpha_i = 0, i = 1, 2$, то имеет место обычный синхронный поток событий [40].

Подчеркнем, что в постановке задачи принимается первичность наступления события, затем – переход процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние. Данное обстоятельство при получении аналитических результатов является несущественным, так как наступление события и переход процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние происходят мгновенно. При получении же численных результатов путем имитационного моделирования необходима определенность, что первично – наступление события, затем смена состояния либо наоборот.

Процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков с интенсивностями λ_1 либо λ_2) являются принципиально ненаблюдаемыми (в сделанных предпосылках $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только моменты наступления наблюдаемых событий на временной оси t_1, t_2, \dots . Рассматривается стационарный режим функционирования потока. Последовательность моментов $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ наступления событий наблюдаемого потока порождает вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, т.е. поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k (момент наступления события потока), $k = 1, 2, \dots$.

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k, k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока. Так как поток функционирует в стационарном режиме, то плотность вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока $p_T(\tau_k) = p_T(\tau), \tau \geq 0$, для любого k . Таким образом, без потери общности момент наступления события t_k можно положить равным нулю, т.е. $\tau = 0$.

Пусть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, – значения длительностей смежных k -го и $k+1$ -го интервалов между соседними событиями наблюдаемого потока. В силу стационарности потока можно положить $k = 1$ и рассматривать длительности интервалов $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. Тогда $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока, а $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события наблюдаемого потока. При этом соответствующая совместная плотность вероятностей имеет вид $p_T(\tau_k, \tau_{k+1}) = p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

Основной задачей работы является получение явного вида плотности вероятностей $p_T(\tau)$ и явного вида совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$. В ходе исследования находятся условия рекуррентности наблюдаемого потока событий, а также его вероятностные характеристики.

2. Вывод плотности вероятностей $p_T(\tau)$

Пусть τ – значение случайной величины длительности интервала между моментами наступления двух соседних событий наблюдаемого потока (рис. 2).

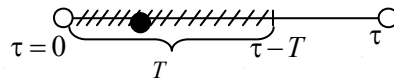


Рис. 2. Интервал между соседними наблюдаемыми событиями потока

Тогда плотность вероятностей $p_T(\tau)$ значений длительности интервала между наступлениями соседних событий модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени, запишется в виде

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau - T), & \tau \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

где $\tilde{p}_{jk}(\tau - T)$ – условная плотность вероятностей того, что на интервале $(\tau - T, \tau)$ нет событий потока и в момент времени τ имеет место $\lambda(\tau) = \lambda_k$ при условии, что в момент времени $\tau - T$ значение процесса $\lambda(\tau - T) = \lambda_j$ ($j, k = 1, 2$); $q_{ij}(T)$ – вероятность того, что за время T процесс $\lambda(t)$ перешел из i -го состояния в j -е, $i, j = 1, 2$; $\pi_i(0|T)$ – условная стационарная вероятность того, что в момент $\tau = 0$ процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии i , событие потока наступило и наступило мертвое время длительности T .

Обозначим $t = \tau - T$, $\tau \geq T$. Введем $p_{jk}(t)$ – переходную вероятность того, что на интервале $(0, t)$ нет событий потока и в момент времени t имеет место $\lambda(t) = \lambda_k$ при условии, что в момент времени $t = 0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_j$ ($j, k = 1, 2$). Тогда для введенных вероятностей $p_{jk}(t)$ имеет место система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} p_{11}'(t) &= -(\lambda_1 + \alpha_1)p_{11}(t) + \alpha_2 p_{12}(t), & p_{12}'(t) &= -(\lambda_2 + \alpha_2)p_{12}(t) + \alpha_1 p_{11}(t), \\ p_{22}'(t) &= -(\lambda_2 + \alpha_2)p_{22}(t) + \alpha_1 p_{21}(t), & p_{12}'(t) &= -(\lambda_1 + \alpha_1)p_{21}(t) + \alpha_2 p_{22}(t), \\ p_{11}(0) &= 1, & p_{12}(0) &= 0, & p_{22}(0) &= 1, & p_{21}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Решая полученную систему дифференциальных уравнений, находим

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= \frac{1}{z_2 - z_1} \left[(\lambda_2 + \alpha_2 - z_1) e^{-z_1 t} - (\lambda_2 + \alpha_2 - z_2) e^{-z_2 t} \right], & p_{12}(t) &= \frac{\alpha_1}{z_2 - z_1} \left[e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t} \right], \\ p_{21}(t) &= \frac{\alpha_2}{z_2 - z_1} \left[e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t} \right], & p_{22}(t) &= \frac{1}{z_2 - z_1} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 - z_1) e^{-z_1 t} - (\lambda_1 + \alpha_1 - z_2) e^{-z_2 t} \right], \\ z_{1,2} &= (\alpha_1 + \lambda_1 + \alpha_2 + \lambda_2) \mp \sqrt{(\alpha_1 + \lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом плотности вероятностей $\tilde{p}_{jk}(t) = \tilde{p}_{jk}(\tau - T)$, $j, k=1,2$, из формулы (1) для плотности вероятностей $p_T(\tau)$ примут вид

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{11}(t) &= p_{11}(t)\lambda_1(1-p) + p_{12}(t)\lambda_2q, \quad \tilde{p}_{12}(t) = p_{11}(t)\lambda_1p + p_{12}(t)\lambda_2(1-q), \\ \tilde{p}_{22}(t) &= p_{22}(t)\lambda_2(1-q) + p_{21}(t)\lambda_1p, \quad \tilde{p}_{21}(t) = p_{22}(t)\lambda_2q + p_{21}(t)\lambda_1(1-p),\end{aligned}\quad (3)$$

где вероятности $p_{jk}(t)$ определены в (2).

Подставляя (2) в (3), затем заменяя t на $\tau - T$, получаем явный вид плотностей вероятностей $\tilde{p}_{jk}(\tau - T)$, $j, k=1,2$:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{11}(\tau - T) &= \\ &= \frac{\lambda_1(1-p)}{z_2 - z_1} \left[(\lambda_2 + \alpha_2 - z_1)e^{-z_1(\tau-T)} - (\lambda_2 + \alpha_2 - z_2)e^{-z_2(\tau-T)} \right] + \frac{\alpha_1\lambda_2q}{z_2 - z_1} \left[e^{-z_1(\tau-T)} - e^{-z_2(\tau-T)} \right], \\ \tilde{p}_{12}(\tau - T) &= \\ &= \frac{\lambda_1p}{z_2 - z_1} \left[(\lambda_2 + \alpha_2 - z_1)e^{-z_1(\tau-T)} - (\lambda_2 + \alpha_2 - z_2)e^{-z_2(\tau-T)} \right] + \frac{\alpha_1\lambda_2(1-q)}{z_2 - z_1} \left[e^{-z_1(\tau-T)} - e^{-z_2(\tau-T)} \right], \\ \tilde{p}_{21}(\tau - T) &= \\ &= \frac{\lambda_2q}{z_2 - z_1} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 - z_1)e^{-z_1(\tau-T)} - (\lambda_1 + \alpha_1 - z_2)e^{-z_2(\tau-T)} \right] + \frac{\alpha_2\lambda_1(1-p)}{z_2 - z_1} \left[e^{-z_1(\tau-T)} - e^{-z_2(\tau-T)} \right], \\ \tilde{p}_{22}(\tau - T) &= \\ &= \frac{\lambda_2(1-q)}{z_2 - z_1} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 - z_1)e^{-z_1(\tau-T)} - (\lambda_1 + \alpha_1 - z_2)e^{-z_2(\tau-T)} \right] + \frac{\alpha_2\lambda_1p}{z_2 - z_1} \left[e^{-z_1(\tau-T)} - e^{-z_2(\tau-T)} \right].\end{aligned}\quad (4)$$

Для введенных вероятностей $q_{ij}(\tau)$, $i, j=1,2$, имеет место система дифференциальных уравнений ($0 \leq \tau \leq T$):

$$\begin{aligned}q_{11}'(\tau) &= -(\alpha_1 + p\lambda_1)q_{11}(\tau) + (\alpha_2 + q\lambda_2)q_{12}(\tau), \\ q_{12}'(\tau) &= -(\alpha_2 + q\lambda_2)q_{12}(\tau) + (\alpha_1 + p\lambda_1)q_{21}(\tau), \\ q_{21}'(\tau) &= -(\alpha_2 + q\lambda_2)q_{22}(\tau) + (\alpha_1 + p\lambda_1)q_{21}(\tau), \\ q_{22}'(\tau) &= -(\alpha_1 + p\lambda_1)q_{21}(\tau) + (\alpha_2 + q\lambda_2)q_{22}(\tau),\end{aligned}$$

с граничными условиями

$$q_{11}(0) = 1, q_{12}(0) = 0, q_{22}(0) = 1, q_{21}(0) = 0.$$

Решая данную систему дифференциальных уравнений и в полученном решении полагая $\tau = T$, находим

$$\begin{aligned}q_{11}(T) &= \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \quad q_{12}(T) = \pi_2 - \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \\ q_{21}(T) &= \pi_1 - \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \quad q_{22}(T) = \pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \\ \pi_1 &= \frac{\alpha_2 + q\lambda_2}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1 + p\lambda_1}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}, \quad z_1 z_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1,\end{aligned}\quad (5)$$

где π_i , $i=1,2$, – априорная стационарная вероятность того, что в произвольный момент времени поток находится в i -м состоянии [2].

Для нахождения вероятностей $\pi_i(0|T)$, $i=1,2$, из исходной формулы (1) введем π_{ij} – вероятность того, что за время, которое пройдет от момента $\tau = 0$ до наступления следующего события наблюдаемого потока и реализации розыгрыша состояния потока, процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния i в состояние j , $i, j=1,2$.

Тогда относительно введенных $\pi_i(0|T)$, $i=1,2$, и π_{ij} , $i, j=1,2$, в силу марковости процесса $\lambda(t)$ будет справедлива следующая система линейных уравнений:

$$\begin{aligned}\pi_1(0|T) &= \pi_1(0|T)\pi_{11} + \pi_2(0|T)\pi_{21}, \\ \pi_2(0|T) &= \pi_1(0|T)\pi_{12} + \pi_2(0|T)\pi_{22}, \\ \pi_1(0|T) + \pi_2(0|T) &= 1,\end{aligned}$$

выражая из которой вероятности $\pi_i(0|T), i=1,2$, получим

$$\pi_1(0|T) = \frac{\pi_{21}}{\pi_{12} + \pi_{21}}, \pi_2(0|T) = \frac{\pi_{12}}{\pi_{12} + \pi_{21}}. \quad (6)$$

При этом для вероятностей π_{ij} в силу марковости процесса $\lambda(t)$ можно записать следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}\pi_{11} &= q_{11}(T)p_{11} + q_{12}(T)p_{21}, & \pi_{21} &= q_{21}(T)p_{11} + q_{22}(T)p_{21}, \\ \pi_{12} &= q_{11}(T)p_{12} + q_{12}(T)p_{22}, & \pi_{22} &= q_{21}(T)p_{12} + q_{22}(T)p_{22}, \\ \pi_{11} + \pi_{12} &= 1, & \pi_{21} + \pi_{22} &= 1,\end{aligned} \quad (7)$$

где вероятности $q_{ij}(T), i, j=1,2$, определены в (5), $p_{jk}, j, k=1,2$, – вероятность того, что в течение интервала между моментом времени $t=0$ и моментом наступления следующего события процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния j в состояние k . Тогда $p_{jk} = \int_0^{\infty} \tilde{p}_{jk}(u) du$.

Интегрируя полученные в (4) плотности вероятностей $\tilde{p}_{jk}(t), j, k=1,2$, получим следующие значения переходных вероятностей $p_{jk}, j, k=1,2$:

$$\begin{aligned}p_{11} &= \lambda_1(1-p) \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{z_1 z_2} + \lambda_2 q \frac{\alpha_1}{z_1 z_2}, & p_{12} &= \lambda_1 p \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{z_1 z_2} + \lambda_2(1-q) \frac{\alpha_1}{z_1 z_2}, \\ p_{22} &= \lambda_2(1-q) \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{z_1 z_2} + \lambda_1 p \frac{\alpha_2}{z_1 z_2}, & p_{21} &= \lambda_2 q \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{z_1 z_2} + \lambda_1(1-p) \frac{\alpha_2}{z_1 z_2},\end{aligned} \quad (8)$$

где $z_1 z_2$ определены в (5).

Подставляя вероятности $p_{jk}, j, k=1,2$, из (8) и вероятности $q_{ij}(T), i, j=1,2$, из (5) в уравнения (7), получим выражения для вероятностей $\pi_{ij}, i, j=1,2$:

$$\begin{aligned}\pi_{11} &= \frac{1}{z_1 z_2} ((1-p)\lambda_1 \alpha_2 + q\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q)(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})), \\ \pi_{12} &= \frac{1}{z_1 z_2} ((1-q)\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1) + p\lambda_1 \alpha_2 - \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q)(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})), \\ \pi_{21} &= \frac{1}{z_1 z_2} (q\lambda_2 \alpha_1 + (1-p)\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2) - \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q)(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})), \\ \pi_{22} &= \frac{1}{z_1 z_2} (p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2) + (1-q)\lambda_2 \alpha_1 + \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q)(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})),\end{aligned} \quad (9)$$

где $\pi_i, i=1,2$, $z_1 z_2$ определены в (5).

После подстановки полученных в (9) вероятностей $\pi_{ij}, i, j=1,2$, в формулы (6) выражения для $\pi_i(0|T), i=1,2$, запишутся в виде

$$\begin{aligned}\pi_1(0|T) &= \frac{q\lambda_2 \alpha_1 + (1-p)\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2) - \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q)(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})}{z_1 z_2 - \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}}, \\ \pi_2(0|T) &= \frac{(1-q)\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1) + p\lambda_1 \alpha_2 - \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q)(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})}{z_1 z_2 - \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},\end{aligned} \quad (10)$$

где $\pi_i, i=1,2$, $z_1 z_2$ определены в (5).

Для нахождения вероятностей $\pi_i(T)$, $i=1,2$, введем $\pi_i(\tau|T)$, $i=1,2$, – вероятность того, что в момент времени τ процесс находится в i -м состоянии, $0 < \tau < T$. Тогда $\pi_i(\tau + \Delta\tau|T)$, $i=1,2$, – вероятность того, что в момент времени $\tau + \Delta\tau$ процесс находится в i -м состоянии, $0 < \tau + \Delta\tau < T$. Рассматривая на интервале $(\tau, \tau + \Delta\tau)$ всевозможные варианты поведения процесса $\lambda(\tau)$ относительно искомых вероятностей $\pi_i(\tau|T)$, $i=1,2$, можно записать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\pi_1'(\tau|T) &= -(p\lambda_1 + \alpha_1)\pi_1(\tau|T) + (q\lambda_2 + \alpha_2)\pi_2(\tau|T), \\ \pi_2'(\tau|T) &= -(q\lambda_2 + \alpha_2)\pi_2(\tau|T) + (p\lambda_1 + \alpha_1)\pi_1(\tau|T),\end{aligned}$$

с граничными условиями $\pi_i(\tau|T) = \pi_i(0|T)$ для $\tau = 0$, $i=1,2$.

Решение данной системы примет вид

$$\begin{aligned}\pi_1(\tau|T) &= \pi_1 - (\pi_1 - \pi_1(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)\tau}, \\ \pi_2(\tau|T) &= \pi_2 - (\pi_2 - \pi_2(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)\tau},\end{aligned}$$

где π_i , $i=1,2$, определены в (5).

Подставив в последней формуле для $\pi_i(\tau|T)$, $i=1,2$, вместо τ значение T и обозначив $\pi_i(T|T)$, $i=1,2$, как $\pi_i(T)$, $i=1,2$, получим

$$\begin{aligned}\pi_1(T) &= \pi_1 - (\pi_1 - \pi_1(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \\ \pi_2(T) &= \pi_2 - (\pi_2 - \pi_2(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T},\end{aligned}\tag{11}$$

где π_i , $i=1,2$, определены в (5), $\pi_i(0|T)$, $i=1,2$, определены в (10).

Несложно показать, что

$$\begin{aligned}\pi_1(T) &= \pi_1(0|T)q_{11}(T) + \pi_2(0|T)q_{21}(T), \\ \pi_2(T) &= \pi_2(0|T)q_{12}(T) + \pi_1(0|T)q_{22}(T).\end{aligned}\tag{12}$$

Подставляя (4), (5) и (10) в (1), учитывая (12) и проделывая достаточно трудоемкие преобразования, получаем формулу для нахождения плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий в модулированном синхронном потоке при непродлеваемом мертвом времени $p_T(\tau)$:

$$\begin{aligned}p_T(\tau) &= 0, 0 \leq \tau < T, \\ p_T(\tau) &= \gamma(T)z_1e^{-z_1(\tau-T)} + (1 - \gamma(T))z_2e^{-z_2(\tau-T)}, \tau \geq T,\end{aligned}\tag{13}$$

где $\gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1}(z_2 - \lambda_1\pi_1(T) - \lambda_2\pi_2(T))$, $1 - \gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1}(-z_1 + \lambda_1\pi_1(T) + \lambda_2\pi_2(T))$, $z_{1,2}$ определены в (2), $\pi_i(T)$, $i=1,2$ определены в (11).

3. Вывод совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$

Пусть τ_1, τ_2 – значения случайной величины длительности смежных интервалов между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока (рис. 3).

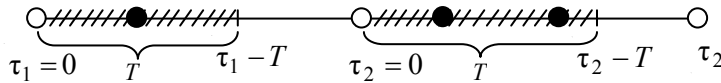


Рис. 3. Смежные интервалы между соседними наблюдаемыми событиями потока

Тогда формула для совместной плотности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ запишется в виде

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) \sum_{s=1}^2 q_{ks}(T) \sum_{n=1}^2 \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), \\ \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T, \end{cases}$$

где $\pi_i(0|T), i=1,2$, определены в (10); $q_{ij}(T), q_{ks}(T), i,j,k,s=1,2$, определены в (5); $\tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T), \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), j,k,s,n=1,2$, определены в (4) (в формулах (4) нужно заменить τ на τ_1 либо на τ_2).

Используя формулу (12) и сделав замены $t_1 = \tau_1 - T, t_2 = \tau_2 - T$, несложно получить формулу для совместной плотности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ в виде

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(T) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(t_1) \sum_{k=1}^2 q_{jk}(T) \sum_{s=1}^2 \tilde{p}_{ks}(t_2), t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \end{cases} \quad (14)$$

при этом согласно формулам (1), (12) запишем

$$p_T(t_1) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(T) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(t_1), t_1 \geq 0,$$

$$p_T(t_2) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(T) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(t_2), t_2 \geq 0.$$

Подставляя значения $q_{jk}(T), j,k=1,2$, (5) в формулу (14) и проделывая достаточно трудоемкие преобразования, получим разность $p_T(t_1, t_2) - p_T(t_1)p_T(t_2)$ в виде

$$p_T(t_1, t_2) - p_T(t_1)p_T(t_2) = e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} \sum_{s=1}^2 (\tilde{p}_{1s}(t_2) - \tilde{p}_{2s}(t_2)) \times \quad (15)$$

$$\times \{ \pi_1(T)(\pi_2(0|T)\tilde{p}_{11}(t_1) - \pi_1(0|T)\tilde{p}_{12}(t_1)) + \pi_2(T)(\pi_2(0|T)\tilde{p}_{21}(t_1) - \pi_1(0|T)\tilde{p}_{22}(t_1)) \},$$

где $\pi_i(0|T), i=1,2$, определены в (10), $\pi_i(T), i=1,2$, определены в (11), $\tilde{p}_{ij}(t_1), \tilde{p}_{is}(t_1), i,j,s=1,2$, определены в (4). Тогда $\sum_{s=1}^2 (\tilde{p}_{1s}(t_2) - \tilde{p}_{2s}(t_2))$ примет вид

$$\sum_{s=1}^2 (\tilde{p}_{1s}(t_2) - \tilde{p}_{2s}(t_2)) = -(\lambda_1 - \lambda_2)(z_1 e^{-z_1 t_2} - z_2 e^{-z_2 t_2}) / (z_2 - z_1). \quad (16)$$

Подставляя $\pi_i(T), i=1,2$, из (11), $\pi_i(0|T), i=1,2$, из (10), $\tilde{p}_{ij}(t_1), i,j=1,2$, из (4) в выражение в фигурной скобке формулы (15), затем подставляя (16) в (15), после чего осуществляя обратную замену $t_1 = \tau_1 - T, t_2 = \tau_2 - T$, получаем формулу для совместной плотности $p_T(\tau_1, \tau_2)$:

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) +$$

$$+ e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1\lambda_2(1-p-q)((\alpha_1 + p\lambda)\pi_1(0) - (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0))((p+q)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1)}{(z_2 - z_1)^2(z_1z_2 - \lambda_1\lambda_2(1-p-q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})^2(\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)^2} \times$$

$$\times \{ z_1z_2 + e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} ((\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(\alpha_1 + \lambda_1 + \alpha_2 + \lambda_2) - 2z_1z_2) +$$

$$+ e^{-2(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} ((\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q)) - z_1z_2) \} \times$$

$$\times (z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)})(z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)}), \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T,$$

где $\pi_i(0), i=1,2$, определены в формуле (10) для $T=0$.

Можно показать, что произведение $\gamma(T)(1-\gamma(T))$ имеет вид

$$\gamma(T)(1-\gamma(T)) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)((\alpha_1 + p\lambda)\pi_1(0) - (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0))((p+q)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1)}{(z_2 - z_1)^2(z_1z_2 - \lambda_1\lambda_2(1-p-q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})^2(\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)^2} \times$$

$$\times \{ z_1z_2 + e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} ((\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(\alpha_1 + \lambda_1 + \alpha_2 + \lambda_2) - 2z_1z_2) +$$

$$+ e^{-2(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} ((\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q)) - z_1z_2) \} \times$$

$$\times (z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)})(z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)})z_1z_2, \quad (17)$$

где $\pi_i(0), i=1,2$, определены в формуле (10) для $T=0$.

Обозначим $f(T)$ выражение в фигурной скобке формулы (17). После преобразования $f(T)$ примет вид

$$f(T) = z_1 z_2 (1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})^2 + (\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} +$$

$$+ (\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q)) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} (1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}),$$

так что для любых $T \geq 0$ имеем $f(T) > 0$.

Тогда окончательно совместная плотность $p_T(\tau_1, \tau_2)$ выпишется в виде

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1) p_T(\tau_2) + e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} \frac{\lambda_1 \lambda_2 (1-p-q)}{z_1 z_2} \gamma(T)(1-\gamma(T)) \times$$

$$\times (z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)})(z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)}), \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T,$$
(18)

где $\gamma(T), 1-\gamma(T)$ определены в (13).

4. Условия рекуррентности наблюдаемого потока событий

Рассмотрим частные случаи, когда модулированный синхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, становится рекуррентным потоком.

1. Из формулы (17) для $p_T(\tau_1, \tau_2)$ следует первое условие рекуррентности наблюдаемого потока. Если $1-p-q=0$, то совместная плотность (17) факторизуется: $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1) p_T(\tau_2)$, $\tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T$.

При этом плотность вероятностей $p_T(\tau)$ (13) примет вид

$$p_T(\tau) = 0, 0 \leq \tau < T,$$

$$p_T(\tau) = \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, \tau \geq T,$$

$$\gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1} (z_2 - \lambda_1 \pi_1 - \lambda_2 \pi_2 + (\lambda_1(\pi_1 - q) + \lambda_2(\pi_2 - p))) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T},$$

$$1 - \gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1} (-z_1 + \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 - (\lambda_1(\pi_1 - q) + \lambda_2(\pi_2 - p))) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T},$$

где $z_{1,2}$ определены в (2), $\pi_i, i=1,2$ определены в (5).

2. Из формулы (18) для произведения $\gamma(T)(1-\gamma(T))$ следует второе условие рекуррентности наблюдаемого потока. Если $(\alpha_1 + p\lambda_1)\pi_1(0) - (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0) = 0$, то совместная плотность (17) факторизуется: $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1) p_T(\tau_2)$, $\tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T$, при этом $\gamma(T) = 1$.

Тогда плотность вероятностей $p_T(\tau)$ (13) примет вид

$$p_T(\tau) = 0, 0 \leq \tau < T,$$

$$p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau-T)}, \tau \geq T,$$

где z_1 определена в (2).

Поскольку последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ порождает вложенную цепь Маркова, то при выполнении одного из вышеперечисленных условий факторизации или их комбинации нетрудно доказать, используя метод математической индукции, что факторизуется и совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ для любого k : $p_T(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = p_T(\tau_1) p_T(\tau_2) \dots p_T(\tau_k)$. Таким образом, наблюдаемый поток является рекуррентным потоком.

При обсуждении условий рекуррентности необходимо использование результатов, полученных в [1].

Для первого условия факторизации потока $1 - p - q = 0$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ в момент времени t_k наступления события потока имеет вид

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = q, k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ не зависит от предыстории, а определяется лишь своим значением в момент наступления события потока. В данной ситуации имеется некоторая близость рассматриваемого потока событий к простейшему потоку в том смысле, что апостериорная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$ в моменты наступления событий потока принимает постоянное значение, равное q .

Для второго условия факторизации потока $(\alpha_1 + p\lambda)\pi_1(0) - (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0) = 0$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ в момент времени t_k запишется в виде

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{q\lambda_2 + [(1-p)\lambda_1 - q\lambda_2]w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)w(\lambda_1 | t_k - 0)}, k = 1, 2, \dots$$

То есть апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$, наоборот, будет зависеть от предыстории, несмотря на то что поток рекуррентный и плотность вероятностей $p_T(\tau)$ имеет экспоненциальное распределение $p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau-T)}$, $\tau \geq T$.

5. Вероятностные характеристики и вероятности типов событий наблюдаемого потока

Нетрудно получить вероятностные характеристики наблюдаемого потока, такие как математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями, дисперсия и ковариация.

$$M(\tau) = T + \frac{\gamma(T)}{z_1} + \frac{1 - \gamma(T)}{z_2}, D(\tau) = 2\left(\frac{\gamma(T)}{z_1^2} + \frac{1 - \gamma(T)}{z_2^2}\right) - \left(\frac{\gamma(T)}{z_1} + \frac{1 - \gamma(T)}{z_2}\right)^2,$$

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = e^{-(\sigma_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)} \gamma(T)(1 - \gamma(T))\lambda_1\lambda_2(1 - p - q) \frac{(z_2 - z_1)^2}{(z_1 z_2)^3}.$$

В рассматриваемом потоке присутствуют события двух типов: 1) события пуассоновского потока интенсивности λ_1 ; 2) события пуассоновского потока интенсивности λ_2 .

Обозначим $q_1^{(i)}(T)$ – стационарная вероятность того, что наступившее событие является событием пуассоновского потока интенсивности λ_i , и процесс $\lambda(t)$ перешел при этом из 1-го состояния в i -е ($i = 1, 2$); $q_2^{(i)}(T)$ – стационарная вероятность того, что наступившее событие является событием пуассоновского потока интенсивности λ_i и процесс $\lambda(t)$ перешел при этом из 2-го состояния в i -е ($i = 1, 2$).

Тогда для введенных вероятностей можно получить следующие явные выражения:

$$q_1^{(1)}(T) = (1 - p)\lambda_1 \frac{\alpha_2 + \lambda_2\pi_1 + \lambda_2(q - \pi_1)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}}{z_1 z_2 - \lambda_1\lambda_2(1 - p - q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

$$q_1^{(2)}(T) = p\lambda_1 \frac{\alpha_2 + \lambda_2\pi_1 + \lambda_2(q - \pi_1)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}}{z_1 z_2 - \lambda_1\lambda_2(1 - p - q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

$$q_2^{(1)}(T) = q\lambda_2 \frac{\alpha_1 + \lambda_1\pi_2 + \lambda_1(p - \pi_2)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}}{z_1 z_2 - \lambda_1\lambda_2(1 - p - q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

$$q_2^{(2)}(T) = (1 - q)\lambda_2 \frac{\alpha_1 + \lambda_1\pi_2 + \lambda_1(p - \pi_2)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}}{z_1 z_2 - \lambda_1\lambda_2(1 - p - q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

где $\pi_i, i = 1, 2$, $z_1 z_2$ определены в (5).

Тогда стационарную вероятность $q_1(T)$ того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности λ_1 , можно представить в виде

$$q_1(T) = q_1^{(1)}(T) + q_1^{(2)}(T) = \lambda_1 \frac{\alpha_2 + \lambda_2 \pi_1 + \lambda_2 (q - \pi_1) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}}{z_1 z_2 - \lambda_1 \lambda_2 (1 - p - q) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

где $\pi_i, i=1,2$, $z_1 z_2$ определены в (5).

Аналогично стационарную вероятность $q_2(T)$ того, что наступившее событие есть событие пуассоновского потока интенсивности λ_2 , можно представить в виде

$$q_2(T) = q_2^{(1)}(T) + q_2^{(2)}(T) = \lambda_2 \frac{\alpha_1 + \lambda_1 \pi_2 + \lambda_1 (p - \pi_2) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}}{z_1 z_2 - \lambda_1 \lambda_2 (1 - p - q) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

где $\pi_i, i=1,2$, $z_1 z_2$ определены в (5).

Отметим, что $\pi_1(0|T) = q_1^{(1)}(T) + q_2^{(1)}(T)$, $\pi_2(0|T) = q_1^{(2)}(T) + q_2^{(2)}(T)$.

Заключение

В ходе исследования получен явный вид $p_T(\tau_1, \tau_2)$ совместной плотности вероятностей значений длительности интервалов между моментами наступления соседних событий модулированного синхронного потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени. Приведены условия рекуррентности потока, а также рассмотрены вероятностные характеристики наблюдаемого потока и приведен явный вид таких характеристик, как типы событий потока.

Данные формулы позволяют произвести оценку параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий потока либо методом максимального правдоподобия, либо методом моментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горцев А.М., Голофастова М.Н. Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 42–53.
2. Сиротина М.Н. Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 63–74.
3. Aleksandr Gortsev and Mariya Sirotina. Joint Probability Density Function of Modulated Synchronous Flow Interval Duration // ITMM 2014: Proceedings 13th International Scientific Conference named after A.F. Terpugov. Anzhero-Sudzhensk. Russia. November 20-22. 2014. Springer. P. 145–152.
4. Сиротина М.Н., Горцев А.М. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями в модулированном синхронном потоке при непродлевающемся мертвом времени // Материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Геннадия Алексеевича Медведева. Белоруссия. Минск. 23–26 февраля. 2015. Минск : Изд-во РИВШ, 2015. С. 299–304.
5. Дудин А.Н., Клименок В.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
6. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No. 4. P. 923–930.
7. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
8. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
9. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
10. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communication in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P.1–46.
11. Lucantoni D.M., Neuts, M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communication in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10. P. 575–598.
12. Лившиц К.Н., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 66–77.
13. Yang Y.W. Woo Shin. BMAP/G/1 queue with correlated arrivals of customers and disasters // Operation Research Letters. 2004. V. 32, Issue 4. P. 364–373.
14. Artalejo Jesus R., Chakravarthy Srinivas R. Computational analysis of the maximal queue length in the MAP/M/c retrival queue // Applied Mathematics and Computation. 2006. V. 183, Issue 2. P. 1399–1409.

15. Best J. Doubly Stochastic Processes: an Approach for Understanding Central Nervous System Activity // Selected Topics on Applied Mathematics, Circuits, Systems and Signals. WSEAS Press, 2009. P. 155–158.
16. Bushalnov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2008. V. 69, No. 9. P. 1517–1533.
17. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow // Radiotekhnika. 2004. No. 10. P. 8–16.
18. Василевская Т.П., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо не проявлением событий // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 9(II). С. 129–138.
19. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 6. С. 232–239.
20. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1(I). С. 24–29.
21. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments // Radiotekhnika. 1995. V. 40, No. 7–8. P. 6–10.
22. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
23. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
24. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного синхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2(19). С. 88–101.
25. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, No. 3. P. 283–290.
26. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров асинхронного потока с иницированием лишних событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 18. С. 267–273.
27. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Shevchenko T.I. Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors // Russian Physics Journal. 1993. V. 36, No. 12. P. 1153–1167.
28. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой рос. конф. с междунар. участием (9–13 июня 2014 г.). Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. С. 96–97.
29. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.
30. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
31. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
32. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1(I). С. 18–23.
33. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
34. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
35. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Died Time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
36. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 254 с.
37. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika). 1996. V. 50, No. 1. P. 56–63.
38. Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний синхронного МС-потока событий // Избранные доклады международной конференции «Весибирские чтения по математике и механике». Томск : Изд-во ТГУ, 1997. Т. 1. С. 97–102.
39. Bushlanov I.V., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2004. V. 65, No. 9. P. 1389–1399.
40. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow // Radiotekhnika. 2004. No. 10. P. 8–16.
41. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Синхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы междунар. конф. Минск : Изд-во БГУ, 2005. С. 60–69.

Sirotina Maria N. (Tomsk State University, Russian Federation).

Joint probability density function of the interval duration between adjacent events of the modulated synchronous flow in conditions of fixed dead time and recurrence conditions of the flow.

Keywords: modulated synchronous flow; dead time; joint probability density function of the interval duration between an adjacent observable flow of events; recurrence condition of a flow.

DOI 10.17223/19988605/31/6

In the paper, the modulated synchronous twice stochastic flow of events is considered, which rate is piecewise constant random process $\lambda(t)$ with two states: λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). The time when process $\lambda(t)$ is staying in i -state has exponential probability distribution function with parameter $\alpha_i, i = 1, 2$. During the time random interval when $\lambda(t) = \lambda_i$, there is a Poisson flow with the rate $\lambda_i, i = 1, 2$. A state transition of process $\lambda(t)$ occurs in arrival moment of the Poisson flow event, moreover, the passing from the first to the second state is realized with probability p , the pas the second to the first state is realized with probability q .

The flow functions in conditions of dead time, which is one of the falsifying factors of state and parameter estimation of the flow. After each registered event there is time of fixed duration T (dead time), during which another flow events is inaccessible for observation. One considers nonextendable dead time, that is all events, which happen during dead time interval, do not arise its prolongation. When duration of dead time period is finished, the first happened event creates dead time period of duration T again, and etc. Note that for the flow, which functions in dead time conditions, events are observable if they did not get into dead time interval (events which cause its approach). For the flow which functions in dead time absence all events are observable.

The derivation of the explicit form of the formula for the joint probability density function of the interval duration between adjacent events of the observable flow is hold. On the base of the joint probability density function as well as the probability density function is obtained before a probability characteristics of the flow such as expectation function, expected mean square and covariance function are given.

A flow characteristic called probability of the observable event type was introduced in the research. There are two types of the considered flow events: 1) the Poisson flow events of the λ_1 intensity; 2) the Poisson flow events of the λ_2 intensity. The formulae for introduced probabilities are derived.

It is proved that the modulated synchronous flow in condition of fixed dead time is a recurrence flow because its joint probability density function is factored under certain conditions.

The obtained formulae will be used in the future investigation to estimate input flow parameters using the method of moment or the maximum likelihood method.

REFERENCES

1. Gortsev, A.M. & Golofastova, M.N. (2013) Optimal state estimation of modulated synchronous twice-stochastic flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 42-53. (In Russian).
2. Sirotina, M.N. (2014) Optimal state estimation of modulated synchronous twice-stochastic flow of events in conditions of fixed dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1 (26). pp. 63-74. (In Russian).
3. Gortsev, A. & Sirotina, M. (2014). Joint Probability Density Function of Modulated Synchronous Flow Interval Duration. *ITMM 2014: Proceedings 13th International Scientific Conference*. Anzhero-Sudzhensk. 20th to 22nd November. pp. 145-152. (In Russian).
4. Sirotina, M.N. & Gortsev, A.M. (2015) [Probability density function of interval duration between two adjacent events of modulated synchronous flow in conditions of fixed dead time]. *Proc. of the International Conference. Minsk. 23rd to 26th February*. Minsk: RIVSh. pp. 299-304. (In Russian).
5. Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BGU.
6. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*. 60 (4). pp. 923-930. DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/S030500410003838X>
7. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi [About the method of renewal of subnetwork computation]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92-99.
8. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi [About the method of renewal of subnetwork computation]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55-61.
9. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764-779. DOI: 10.2307/3213143
10. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 7. pp.1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174

11. Lucantoni, D.M. & Neuts, M.F. (1994) Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 10. pp. 575-598. DOI: 10.1080/15326349408807311
12. Livshits, K.N. & Bublik, Ya.S. (2010) The probability of insurance company collapse with twice stochastic flow of insurance payouts. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 66-77. (In Russian).
13. Yang, Y.W. (2004) BMAP/G/1 queue with correlated arrivals of customers and disasters. *Operation Research Letters*. 32 (4). pp. 364-373. DOI: 10.1016/j.orl.2003.09.005
14. Artalejo, J.R. & Chakravarthy, S.R. (2006) Computational analysis of the maximal queue length in the MAP/M/c retrival queue. *Applied Mathematics and Computation*. 183 (2). pp. 1399-1409.
15. Best, J. (2009) Doubly Stochastic Processes: an Approach for Understanding Central Nervous System Activity. *Selected Topics on Applied Mathematics, Circuits, Systems and Signals. Proceedings of the 3rd International Conference on Circuits, Systems and Signals (CSS'09)*. Vouliagmeni, Athens, Greece. 29th to 31st December. WSEAS Press. pp. 155-158.
16. Bushalnov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya L.A. (2008) Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 69 (9). pp. 1517-1533. DOI: 10.1134/S0005117908090075
17. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 10. pp. 8-16. (In Russian).
18. Vasilevskaya, T.P., Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2004) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka s proyavleniem libo neproyavleniem sobytiy [Dead time and parameters estimation of synchronous alternating flow with or without event manifestation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 9(II). pp. 129-138.
19. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2003) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy [Dead time period and parameter estimation of synchronous alternating flow of events]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 6. pp. 232-239.
20. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. Otsenivanie parametrov sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Parameter estimation of synchronous twice-stochastic flow of events using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1(I). pp. 24-29.
21. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (1995) Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 40 (7–8). pp. 6-10.
22. Leonova, M.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2 (23). pp. 54-63. (In Russian).
23. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2012) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized asynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4 (21). pp. 14-25. (In Russian).
24. Leonova, M.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2 (19). pp. 88-101. (In Russian).
25. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21 (3). pp. 283-290. DOI: 10.1515/dma.2011.017
26. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2006) Otsenivanie parametrov asinkhronnogo potoka s initsirovaniem lishnikh sobytiy metodom momentov [Parameter estimation of asynchronous flow with additional event initiation using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 18. pp. 267-273.
27. Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal*. 36 (12). pp. 1153-1167. DOI: 10.1007/BF00559693
28. Kalyagin, A.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2014) [Dead time period estimation of generic semi-synchronous flow of events]. *Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur* [New Information Technologies In Complex Structure Investigations]. Proc. of the 10th Russian Conference with International Participation. Tomsk. 9th to 13th July. Tomsk: Tomsk State University. pp. 96-97.
29. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2010) Optimum estimation of states in generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2 (11). pp. 66-81. (In Russian).
30. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2008) Semi-synchronous twice-stochastic event flow in conditions of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13 (1). pp. 31-41. (In Russian).
31. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46 (6). pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
32. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Parameter estimation of semi-synchronous twice-stochastic event flow using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1(1). pp. 18-23.
33. Nezhel'skaya, L.A. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobytiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyu-daemosti [Optimal state estimation of semi-synchronous flow in conditions of its incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95-98.

34. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2011) On relationship of MC- flows and MAP- flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 13-21. (In Russian).
35. Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A. & Solov'ev, A.A. (2012) Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Died Time. *Automation and Remote Control*. 73 (8). pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
36. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente [Statistic analysis of stochastic flows in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
37. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (1996) Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method. *Telecommunications and Radio Engineering*. 50 (1). pp. 56-63.
38. Nezhel'skaya, L.A. (1997) [Optimal state estimation of synchronous MC-flow of events]. *Vsesibirskie chteniya po matematike i mekhanike* [Siberian Readings on Mathematics and Mechanics]. Proc. of the International Conference. Tomsk: Tomsk State University. Vol. 1. pp. 97-102. (In Russian).
39. Bushlanov, I.V. & Gortsev, A.M. (2004) Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 65 (9). pp. 1389-1399. DOI: 10.1023/B:AURC.0000041418.09187.63
40. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 10. pp. 8-16. (In Russian).
41. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2005) [Synchronous twice-stochastic flow of events in conditions of fixed dead time]. *Teoriya veroyatnostey, sluchaynye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya* [Probability Theory, stochastic Processes, Mathematical Statistics and Applications]. Proc. of the International Conference. Minsk: BGU. pp. 60-69. (In Russian).