

УДК: 531:66.011

DOI 10.17223/19988621/35/11

И.А. Яковлев, В.А. Скрипняк

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВОЙСТВАМИ НА ПРИМЕРЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ КОНСТРУКЦИИ РЕАКТОРА ФИЛЬТРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ ГАЗОВ¹

Рассмотрен подход к решению сопряженных термомеханических задач для оценки НДС и вязкости разрушения при воздействии высокотемпературного газового потока на конструкцию реакторов фильтрационного горения. Приведены результаты численного решения сопряженных термомеханических задач и расчета прочности элементов конструкций реакторов, когда тепловые поля по элементам конструкции определялись исходя из аналитических теплотехнических расчетов. Показано, что при численном решении сопряженных задач прогнозируемые напряжения распределяются в соответствии с локальными изменениями коэффициента теплоотдачи, обусловленными эффектами турбулентности и неравномерности поля скорости потока высокотемпературного газа.

Ключевые слова: энергетические и нефтегазовые установки, реакторы фильтрационного горения, компьютерный инжиниринг, моделирование работы, расчеты на прочность, сопряженные задачи.

При проведении инжинирингового анализа проектируемых энергетических установок (ЭУ) возникает необходимость решения сопряженных термомеханических задач, обеспечивающих повышение эффективности и безопасности конструкций. Для снижения временных и финансовых затрат на проектирование широко используются системы компьютерного моделирования физико-механических процессов в ЭУ, что позволяет устанавливать и оптимизировать рабочие параметры процессов, прогнозировать надежность и работоспособность конструкций на этапе подготовки проектной документации [1 – 4].

Создание новых и повышение эффективности традиционных технологических процессов в нефтехимической промышленности, тепловой энергетике, сфере утилизации вредных веществ связано с необходимостью использования более высоких рабочих температур и давлений. Указанные экстремальные условия должны поддерживаться в режиме нормального функционирования при эксплуатации устройств.

В связи с необходимостью повышения достоверности прогнозов компьютерного моделирования прочности элементов конструкций энергетических установок и устройств энергетического и нефтегазового машиностроения, актуальной задачей является разработка подходов решения сопряженных термомеханических задач для широкого диапазона температур и давлений.

Решение указанного класса сопряженных термомеханических задач лежит в основе технических решений, нацеленных на обеспечения максимального уровня

¹ Данное научное исследование (8.2.13.2015) выполнено при поддержке Программы «Научный фонд им. Д.И. Менделеева Томского государственного университета».

безопасности эксплуатации энергетических объектов, так как аварии и отказы оборудования приводят не только к материальным потерям, но и к человеческим жертвам и экологическим катастрофам. Особенно это важно при разработке технологических процессов, связанных с достижением сверхadiaбатических температур, высоких давлений, с использованием химически активных, токсичных и агрессивных сред, а также при эксплуатации объектов в сложных метеорологических условиях.

Совершенствование методов компьютерного инжиниринга при создании аппаратов энергетики приводит к закономерному снижению отраслевого коэффициента запаса прочности, что способствует существенному снижению металлоемкости и производственных материальных затрат.

Нормативные документы, регламентирующие нормы и аналитические методы расчета прочности устройств, применяемых в нефтехимической, энергетической и смежных отраслях промышленности, не позволяют в достаточной мере учесть влияние высокотемпературных процессов на реализующееся напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкций [5, 6]. Сложность связана с определением локальных значений температур соответствующих элементов конструкций, так как реальная картина их распределения по конструкции является неоднородной, что вызывает сложности при определении осредненных констант материала в области с большими градиентами температур. Проблема усугубляется тем, что чаще всего неравномерный тепловой прогрев наблюдается в области конструктивных элементов, таких, как отводы, ребра, переходы, соединения и т.п., которые, в свою очередь, являются концентраторами напряжений сложной формы, где применение упрощенных аналитических формул для определения уровня напряжений необоснованно [7]. В конечном итоге это приводит к необходимости повышения соответствующих коэффициентов запаса прочности и удорожанию производства.

Ввиду того, что изменение положения стенок устройства вследствие температурных деформаций не оказывает существенного влияния на процессы, происходящие внутри ЭУ, при математическом моделировании может быть сформулирован подход к решению сопряженной задачи термомеханики, когда задача разбивается на последовательные подзадачи, связанные через граничные условия. Первая подзадача – определение параметров течения среды в реакционной камере устройства и определение контуров температур по элементам конструкции [8]. Вторая – определение НДС конструкции, возникающего в результате действия тепловых деформаций [9].

Отметим, что в энергетическом машиностроении в процессе изготовления устройств наиболее часто в качестве сборочной операции используется сварка. В процессе сварки могут образовываться технологические дефекты в виде трещин, обусловленные как конструкцией, так и образующиеся в результате нарушения технологии или локального перегрева металла. В процессе эксплуатации устройства зона сварки может подвергаться действию напряжений (часто циклических) сложной конфигурации [10], и наличие в этой области дефектов может привести к квазихрупкому разрушению с образованием магистральной трещины вблизи сварного шва [11]. Проблема усугубляется тем, что часто в качестве заготовок при производстве аппаратов подобного класса используются различные профили, получаемые методом деформирования (трубы, листы) и склонные к слоистому растрескиванию вдоль направления проката. Поэтому при исследовании надежности подобных конструкций важно проводить оценку вязкости разрушения с применением методов механики разрушения.

В работе рассматривается реактор фильтрационного горения газов. В реакционной камере данного устройства протекает процесс конверсии метана в стационарной волне горения с достижением сверхадиабатических температур сгорания. Исследуется влияние толщины и степени износа слоя футеровки реакционной области на распределение температур по элементам конструкции, а также на НДС и вязкость разрушения элементов конструкции при наличии технологических трещин в сварных швах реактора фильтрационного горения газов (РФГГ) в рамках комплексного подхода к моделированию сложных технических систем.

Модель реактора фильтрационного горения газов

Рассмотрим конструктивную схему реактора фильтрационного горения. Типовая конструкция реактора включает цилиндрическую камеру сгорания 1 (рис. 1), заполненную керамическими шарами Al_2O_3 диаметром 5 мм. Камера 1 футерована слоем термостойкого бетона 2, заключенного в металлический корпус 3. В камеру распределения 4 подача метановоздушной смеси осуществляется через сопловой патрубок 5. Инициация реакции осуществляется электродом поджига 6. Отвод высокотемпературных продуктов сгорания производится через штуцер 7. С использованием датчиков температуры 8 осуществляется контроль параметров процесса. Реактор дополняется рекуперативной системой активного охлаждения, состоящей из камеры 9, куда хладагент подается через штуцер 10. Через фланец 11 реактор соединяется с последующими узлами комплекса. Опорные кронштейны 12 жестко соединяются с монтажной рамой установки. В качестве реакционной смеси используется смесь метана и воздуха с эквивалентным соотношением $\phi = 2.5$ при давлении p_0 в 2.5 атм. Удельный массовый расход смеси g через реактор составляет $0.2 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. Схема наложения сварных швов по ГОСТ 16037-80 и определяющие габаритные размеры реакторного блока показаны на рис. 1. В качестве материала футеровки используется теплоизоляционная смесь СМКРБТ на основе 70 % пористого алюмосиликатного заполнителя и 30 % гидравлического вяжущего (глиноземного цемента) с физико-механическими характеристиками по ТУ 14-8-567-88. Материал несущих элементов конструкции – хромоникелевая сталь аустенитного класса марки 12Х18Н10Т по ГОСТ 9940-81 и ГОСТ 7350-77.

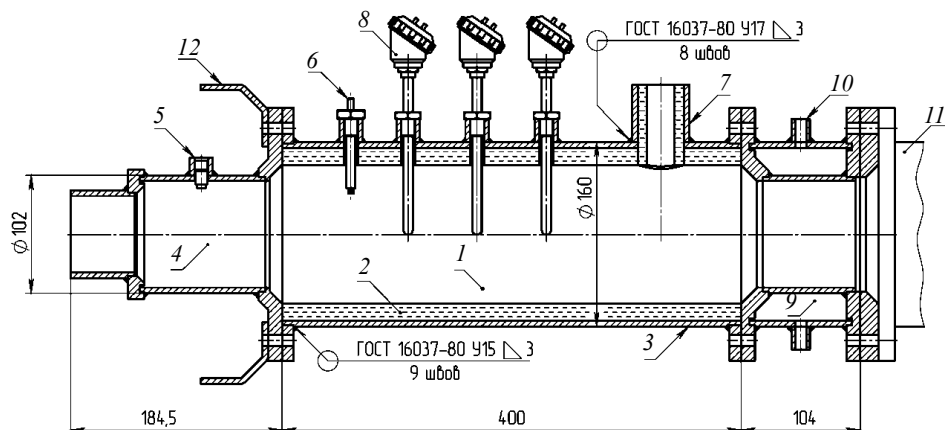


Рис. 1. Схема исследуемого реакторного блока конверсии метана

В конструкции содержится технологическая трещина l в корне углового шва опорного фланца в соответствии со схемой, приведенной на рис. 2.

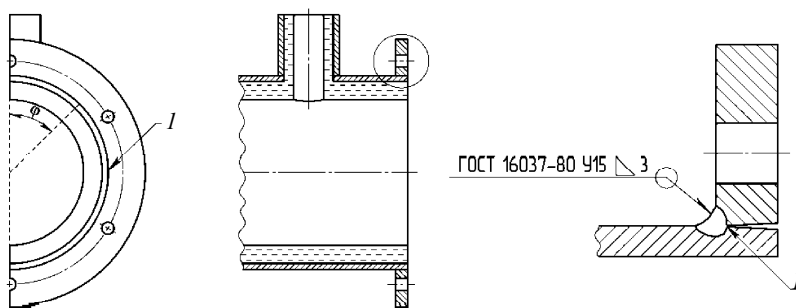


Рис. 2. Схема сварного присоединения опорного фланца к обечайке с кольцевой технологической трещиной

Постановка сопряженной термомеханической задачи для моделирования рабочего процесса реактора фильтрационного горения газов

При формулировании математической модели целесообразно производить декомпозицию расчетной области на пространственные подобласти двух типов. В подобласти первого типа решается система уравнений механики деформируемого твердого тела в лагранжевой системе координат, в подобласти второго решается задача механики жидкости и газа в эйлеровой системе координат.

Система разрешающих уравнений для определения параметров течения многокомпонентной горючей смеси в реакционной и холодильной камерах устройства, а также для определения контуров температур по элементам конструкции имеет следующий вид [12]:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla(\rho_f \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

где ρ_f – плотность газа, \mathbf{v} – вектор массовой скорости, ∇ – оператор Гамильтона, t – время;

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f \mathbf{v}) + \nabla(\rho_f \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla(\boldsymbol{\tau}), \quad (2)$$

где p – давление, $\boldsymbol{\tau}$ – тензор вязких напряжений, определяемый соотношением:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left[(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I} \right].$$

Здесь μ – коэффициент вязкости, \mathbf{I} – единичный тензор, верхний индекс T соответствует операции транспонирования вектора.

Уравнение сохранения энергии записано в форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f E_f) + \nabla(\mathbf{v}(\rho_f E_f + p)) = \nabla \left(k_f \nabla T_f - \sum_j h_j \mathbf{J}_j + (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) \right) + S_c + hA(T_p - T_f), \quad (3)$$

где E_f – полная энергия среды, k_f – теплопроводность, включающая турбулентные эффекты, h_j и \mathbf{J}_j – энтальпия и диффузионный поток j -й компоненты смеси, T_f – температура газовой среды, T_p – температура инертного пористого каркаса; h –

коэффициент межфазной теплоотдачи, A – удельная межфазная поверхность, S_c – источник тепла за счет химических реакций.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f Y_j) + \nabla(\rho_f \mathbf{v} Y_j) = -\nabla \mathbf{J}_j + R_j, \quad (4)$$

где Y_j – массовая доля j -й компоненты смеси, R_j – скорость производства j -й компоненты смеси вследствие химических реакций.

Для учета турбулентности базовая система уравнений (1) – (4) дополняется соотношениями, принятыми в рамках двухпараметрической модели, основанной на рассмотрении кинетической энергии пульсаций скорости k и скорости диссипации энергии ε (k – ε -модель) [13]. В рамках принятой модели турбулентности для определения параметров потока вблизи стенок реактора используется масштабированная пристеночная функция течения с обеспечением соответствующих значений безразмерной толщины слоя y^+ на сеточном уровне.

Для моделирования процесса сгорания богатых смесей в условиях фильтрации через пористую среду в режиме низких скоростей [14] используется двухтемпературная модель. В систему базовых уравнений включается дополнительное связанное уравнение энергии для учета перераспределения тепла по пористому каркасу:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_p E_p = \nabla(k_p \nabla T_p) + hA(T_f - T_p), \quad (1)$$

где ρ_p – плотность пористой среды, k_p – эффективная теплопроводность пористого каркаса, в квазирасселандовском приближении включающая теплопроводность за счет излучения, E_p – полная энергия твердой фазы.

Полная система уравнений со всеми дополнительными соотношениями для учета специфических эффектов, присущих явлению фильтрационного горения газов, в том числе эффектов дисперсии и лучистой теплопередачи по пористому каркасу, рассмотрена в работе [15].

Уравнение состояния использовано в форме

$$\rho_f = \frac{p \sum_j M_j Y_j}{RT_f}, \quad (2)$$

где M_j – молекулярная масса j -й компоненты смеси, R – универсальная газовая постоянная.

Для определения температуры в элементах конструкции решается уравнение теплопереноса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s h_s) = \nabla(k_s \nabla T_s), \quad (3)$$

где ρ_s , h_s , $k_s = k_s(T_s)$, T_s – плотность, энтальпия, теплопроводность и температура материала соответственно.

Схема расчетной области показана на рис. 3.

Система уравнений (1) – (3) замыкается следующими граничными и начальными условиями. В точке $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ входной границы Γ_1 области Ω_1 задается условие (рис. 3)

$$\mathbf{v}(\bar{x}) = g \iint_{\Gamma_1} d\Gamma_1, \quad Y_j(\bar{x}) = Y_j^0, \quad T_f(\bar{x}) = T_0, \quad \frac{\partial T_f(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial T_p(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_1 \subset \Omega_1,$$

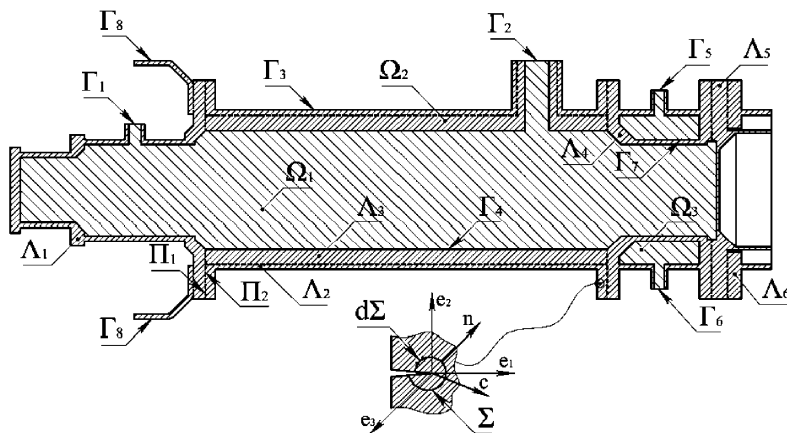


Рис. 3. Схема расчетной области

на выходной Γ_2

$$\frac{\partial Y_j(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial T_f(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial T_p(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_2 \subset \Omega_1.$$

На внешних стенках Γ_3 области Ω_2 , которая соответствует элементам конструкции реактора, задается граничное условие

$$k_s \frac{\partial T_s(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = a(T_s^4 - T_0^4) + b(T_s - T_0), \quad \bar{x} \in \Gamma_3 \subset \Omega_2,$$

где $a = a(T_s)$ – коэффициент излучения поверхности материала, $b = b(T_s)$ – коэффициент теплоотдачи от внешних стенок реактора в окружающую среду.

На внутренних стенках реактора, ограничивающих реакцию камеру Γ_4 , для межфазной поверхности задается условие для теплового потока и температур:

$$T_f(\bar{x}) = T_s(\bar{x}), \quad k_f \frac{\partial T_f(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = k_s \frac{\partial T_s(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{x} \in \Gamma_4 = \Omega_1 \cap \Omega_2,$$

и условие прилипания потока:

$$\mathbf{v}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_4 = \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

В исследуемой конструкции РФГГ в полости, соответствующей движению хладагента Ω_3 , нет пористой засыпки, а в качестве рабочего тела используется атмосферный воздух. В соответствии с этим для расчетной области Ω_3 из системы уравнений (1) – (3) исключаются уравнения (4) и (1), а $\sum_j h_j J_j = 0$, $\sum_j M_j Y_j = M_a$, где M_a – молекулярная масса воздуха.

Граничное условие на входе в камеру теплообменника Γ_5 имеет вид:

$$\mathbf{v}(\bar{x}) = \mathbf{v}_0, \quad T_f(\bar{x}) = T_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_5 \subset \Omega_3,$$

на выходной границе Γ_6

$$\frac{\partial T_f(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_6 \subset \Omega_3,$$

на поверхности раздела областей Γ_7

$$T_f(\bar{x}) = T_s(\bar{x}), \quad k_f \frac{\partial T_f(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = k_s \frac{\partial T_s(\bar{x})}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{x} \in \Gamma_7 = \Omega_2 \cap \Omega_3.$$

Начальные условия записываются в виде

$$p(\bar{x}, 0) = p_0, \quad \bar{x} \in \Omega_1, \Omega_3,$$

$$v(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_1, \Omega_3,$$

$$T(\bar{x}, 0) = F(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega_1,$$

$$T(\bar{x}, 0) = T_0, \quad \bar{x} \in \Omega_2, \Omega_3,$$

где $p_0 = 0.5$ атм, $T_0 = 300$ К, функция $F(\bar{x})$ соответствует распределению температур в виде теплового импульса в области инициации горения.

Система дифференциальных уравнений (1) – (3) с соответствующими граничными и начальными условиями решалась методом конечных элементов, реализованным в программном пакете FLUENT для трехмерной расчетной области в декартовой системе координат. Для реализации специфических физико-математических моделей, характерных для явления фильтрационного горения, использовались возможности встроенных языков программирования C UDF, UDS. Для обеспечения устойчивости численного решения шаг временного интегрирования подбирался из условия Куранта.

Ввиду того, что работа устройства протекает в условиях постоянства расхода, а параметры соответствуют стационарной волне фильтрационного горения, процесс в некотором приближении можно считать стационарным. Следовательно, система уравнений, решаемая в рамках подхода Лагранжа, для определения НДС конструкции с технологическим дефектом в виде трещины может быть записана для статического случая [16]:

$$\nabla_j \sigma_{ij} = 0, \quad (4)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (5)$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, u_i – компоненты вектора перемещений.

Определяющее соотношение записывается в виде

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\Delta T_s]\delta_{ij}, \quad (6)$$

где μ , λ – коэффициенты Ляме, δ_{ij} – символ Кронекера, $\alpha = \alpha(T_s)$ – коэффициент температурного линейного расширения, T_s – значение температуры, рассчитываемое из уравнения (3).

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (7)$$

$\nu = \nu(T_s)$ – коэффициент Пуассона, $E = E(T_s)$ – модуль упругости материала.

В процессе определения НДС конструкции, подверженной температурным деформациям вблизи дефекта в виде трехмерной трещины с учетом конфигурационных сил производится расчет J-интеграла Черепанова – Райса, который отражает некоторую среднюю характеристику поля напряжений и деформаций в окрест-

ности вершины дефекта с неравномерным полем температур [17–19]:

$$J = c_l \int_{\Sigma} (W \delta_{ij} - \sigma_{ij} u_{i,l}) n_j d\Sigma + \iint_S \sigma_{ij} \delta_{ij} \alpha \Delta T_s dS, \quad (8)$$

где Σ – контур, окружающий вершину трещины (рис. 3), S – площадь, охваченная контуром Σ , n_j – единичная нормаль к контуру Σ , c_l – единичный вектор, перпендикулярный фронту трещины, W – плотность энергии деформации, определяемая как $W = 0.5 \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$.

При вычислении интеграла (8) в точке, принадлежащей фронту трещины, строится локальная система координат $\{e_1, e_2, e_3\}$, ориентированная относительно глобальной $\{x_1, x_2, x_3\}$ таким образом, чтобы ось e_1 была перпендикулярна фронту трещины, ось e_2 перпендикулярна плоскости дефекта, а ось e_3 была касательной к фронту (рис. 3).

Система уравнений (4) – (8) замыкается граничными условиями (рис. 3):

$$n_i \sigma_{ij}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_3,$$

для Ω_1 , Ω_3 принимается $p(\bar{x}) = p_0$, тогда:

$$n_i \sigma_{ij}(\bar{x}) = p_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_4 \subset \Omega_2,$$

$$n_i \sigma_{ij}(\bar{x}) = p_0, \quad \bar{x} \in \Gamma_7 \subset \Omega_3.$$

Опорные кронштейны РФГ жестко соединяются с монтажной рамой:

$$u_i(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_8 \subset \Omega_2.$$

Область пространства Ω_2 , занимаемая элементами конструкции, состоит из подобластей Λ , так что $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4 \cup \Lambda_5 = \Omega_2$, тогда на границе подобластей Λ_1 и Λ_2 выполняется условие

$$u_i(\bar{x}) = u_i(\bar{x}'), \quad \bar{x} \in \Pi_1 \subset \Lambda_1, \quad \bar{x}' \in \Pi_2 \subset \Lambda_2.$$

Аналогичное условие задается на границе для любых соседних подобластей Λ .

Для численного решения методом конечных элементов [20, 21] системы уравнений (4) – (8) в декартовых координатах вместе с соответствующими граничными условиями использовался решатель ANSYS Mechanical APDL.

В результате исследования сеточной сходимости установлена оптимальная мелкость пространственного разбиения трехмерных областей Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 , когда дальнейшее измельчение сетки не оказывает существенного влияния на результаты моделирования.

Для верификации сформулированной физико-математической модели был решен ряд тестовых задач с известными аналитическими решениями или достоверными экспериментальными данными.

Проводилось численное моделирование турбулентного течения газа в цилиндрическом канале с обратным уступом с учетом конвективного теплообмена с подогреваемой стенкой. Геометрическая форма и размеры расчетной области, а также параметры течения принимались в соответствии с данными, приведенными в работе [22]. Максимальная разница рассчитанных по (1) – (3) и экспериментально измеренных значений локального числа Нуссельта вблизи теплопроводящей стенки составила 8.5 %.

Решалась тестовая задача определения нормальных и касательных напряжений в трубе с различной температурой на внешней и внутренней стенке. Сравнение результатов моделирования с данными расчетов, приведенными в работе [23] для аналогичной геометрии трубы и условий деформирования, показало различие в 1 %.

Тестирование метода численного определения вязкости разрушения с вычислением интеграла Черепанова – Райса (8) проводилось на задачах определения коэффициентов интенсивности напряжений K_I , K_{II} вблизи фронта полубесконечной поверхностной трещины с частично нагруженными берегами и поверхностной полуэллиптической трещины в бруске при одноосном растяжении. Полученные значения K_I , K_{II} сравнивались со значениями коэффициентов интенсивности напряжений, рассчитанными по формулам в работе [24] для аналогичных конфигураций и размеров трещин. Разница составила не более 5.5 %.

Результаты и обсуждение

Для определения допускаемых напряжений, при расчете на прочность конструкций сварных сосудов и аппаратов с учетом температурных воздействий в качестве расчетной температуры принимается наибольшая температура, полученная в результате теплотехнических расчетов в соответствии с п. 5 ГОСТ Р 52857.1–2007 [5]. При решении сопряженной термомеханической задачи в некотором приближении может быть определено поле температур в элементах конструкции, обусловленное воздействием течения высокотемпературной среды в реакционной зоне и эффектами локального изменения скоростных параметров потока, приводящих к интенсификации или замедлению процессов теплообмена со стенками устройства. Были проанализированы тепловые поля и НДС в конструкции энергетических установок при численном решении сопряженной задачи и при использовании аналитических методов расчета тепловых полей.

На рис. 4 показан контур распределения температур в осевом сечении потока горячего газа и конструкции, полученный решением системы уравнений (1) – (3) при толщине футеровочного слоя 15 мм.

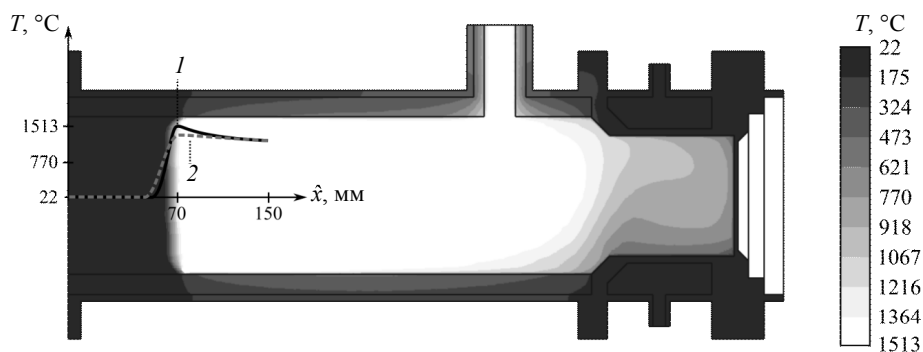


Рис. 4. Контур распределения температур в осевом сечении устройства при толщине слоя футеровки 15 мм

Максимальное значение температуры газа наблюдается в волне горения и составляет 1513 °С, что свидетельствует о достижении в системе сверхадиабатических температур сгорания. Вследствие того, что при моделировании процессов внутри реакционной зоны используется двухтемпературная модель (совместно решаются два уравнения энергии (3) и (1)), для газообразной среды и пористой закладки реактора наблюдается различие тепловых профилей вблизи фронта волны горения. Пересечение графиков функций $T_f(\hat{x})$ и $T_p(\hat{x})$ (линии 1, 2 на рис. 4)

свидетельствует об изменении направления теплового потока «пористый каркас → газ» на противоположное. На расстоянии ~80 мм от фронта горения профили температур выравниваются.

В футеровочном слое наибольший нагрев наблюдается в области выпускного отвода, где скорость высокотемпературных продуктов сгорания в ядре потока достигает 87 м/с и происходит активная теплоотдача.

Важным технологическим параметром работы исследуемого устройства является концентрация H_2 , CO , CO_2 и доля несгоревшего метана на выходе из реактора. В данной работе распределение концентраций продуктов сгорания в реакторе и их зависимость от других параметров рассматриваться не будет, так как это было подробно показано в предшествующей работе [15]. Отметим только, что на расстоянии 110 мм от поперечного сечения, соответствующего максимуму температуры, состав высокотемпературного газа стабилизируется и в молярных долях составляет: H_2 – 14.3 %, CO – 8.6 %, CO_2 – 2.7 %, CH_4 – 2 %.

Контур распределения температур по элементам конструкции реактора фильтрационного горения, полученный решением системы уравнений (1) – (3) для толщины футеровочного слоя 15 мм показан на рис. 5, а. Контур, полученный на основе аналитических теплотехнических расчетов [25, 26] в соответствии с рекомендациями п. 5 нормативного документа [5], показаны на рис. 5, б. При том, что оба расчета проводились для идентичных условий процесса, наблюдается существенное различие картин распределения теплового поля.

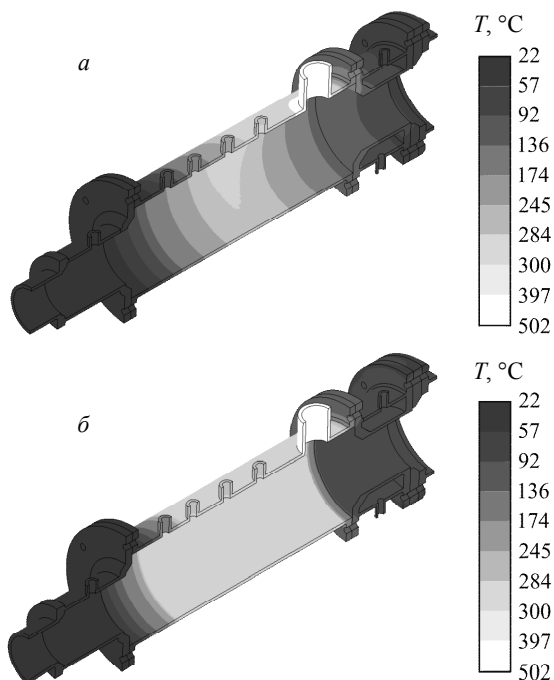


Рис. 5. Контур распределения температур по элементам конструкции, полученные: а – в рамках комплексного подхода; б – на основании теплотехнических расчетов для слоя футеровки толщиной 15 мм (футеровка на рисунке не показана)

Применение аналитических методов дает большую равномерность прогрева элементов конструкции по сравнению с методом вычислительной газодинамики и теплообмена, когда локально учитывается изменение коэффициента теплоотдачи, обусловленное эффектами турбулентности и неравномерности поля скорости потока высокотемпературного газа. Разница полученных разными методами значений температур достигает 35–40 %. Наибольшую тепловую нагрузку конструкция претерпевает вблизи выходного патрубка, где максимальная температура составляет 502 °С, что позволяет сделать вывод о возможности применения в устройстве стали марки 12Х18Н10Т, так как порог ее применяемости по температуре составляет 610 °С.

На рис. 6, *а* показан контур распределения эквивалентных напряжений, полученных в рамках комплексного подхода с использованием единой расчетной модели (1) – (7). Показанные на рис. 6, *б* эквивалентные напряжения рассчитывались с использованием уравнений (4) – (7), с распределением по элементам конструкции тепловых полей, полученных на основании теплотехнических расчетов, проведенных для идентичных условий процесса.

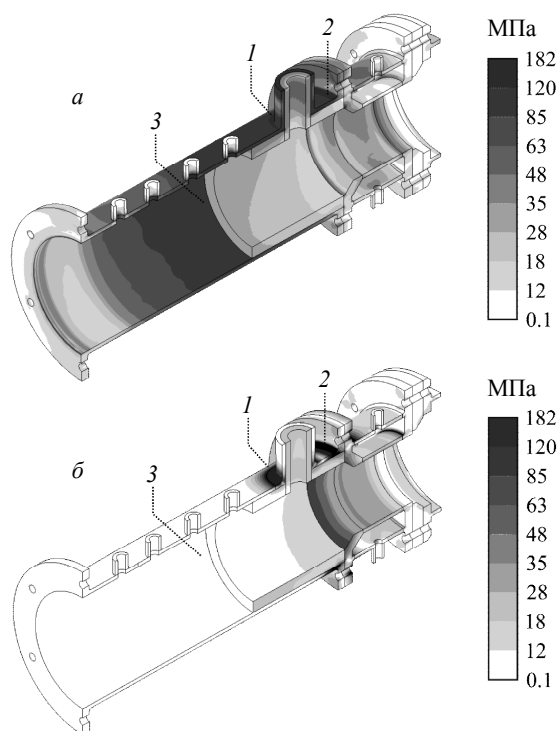


Рис. 6. Контур распределения эквивалентных напряжений по элементам конструкции, полученные: *а* – в рамках комплексного подхода; *б* – на основании теплотехнических расчетов для слоя футеровки толщиной 15 мм (слой показан частично)

При проектировании энергетических установок сжигания топлива для обеспечения условий эксплуатации материала, соответствующих допустимой области

применения, осуществляют футеровку камеры сгорания с целью ее теплоизоляции, а также для защиты несущих металлических стенок реактора от воздействия химически агрессивных сред, часто имеющих в своем составе водород. В процессе эксплуатации под воздействием высоких температур, скоростей потока, химически активных сред, циклической смены температурных режимов и т.д. неизбежно возникает поверхностная эрозия слоя футеровки, приводящая к его утонению. Важно определить значение критической толщины футеровочного слоя, когда температура несущих элементов конструкции может привести к ее разрушению или кораблению. Не менее важной задачей является определение достаточной толщины на этапе проектирования энергетических установок, так как она во многом определяет массогабаритные характеристики устройств и сказывается на стоимости изделия.

На рис. 7, а, 8, а, 9, а показаны зависимости эквивалентных напряжений от толщины футеровочного слоя l в основании отвода (область 1 на рис. 6), опорного фланца (область 2) и в центральном сечении обечайки (область 3). Линия 1 получена при численном решении сопряженной задачи, 2 – на основании теплотехнических расчетов, 3 – при равномерном прогреве конструкции, 4 – уровень допускаемых напряжений в соответствии с ГОСТ Р 52857.1-2007 [5].

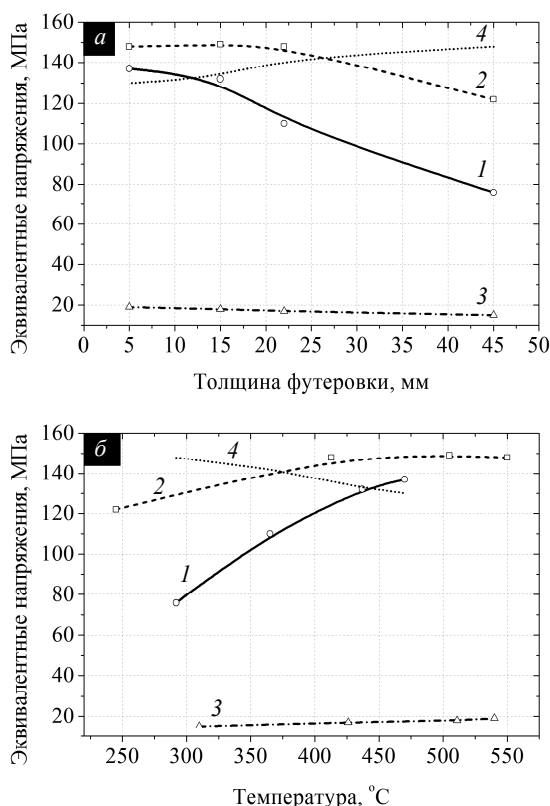


Рис. 7. Зависимость эквивалентных напряжений в основании отвода от толщины футеровочного слоя (а) и от температуры (б)

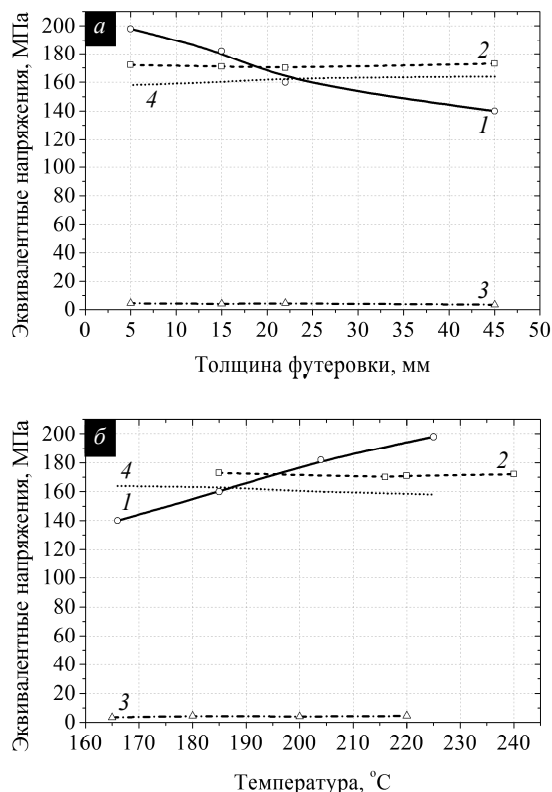


Рис. 8. Зависимость эквивалентных напряжений в основании опорного фланца от толщины футеровочного слоя (а) и от температуры (б)

Наблюдается снижение уровня максимальных эквивалентных напряжений при увеличении толщины футеровки, что может быть связано с повышением термического сопротивления слоя и соответствующим уменьшением уровня термической напряженности конструкции. График функции $\sigma_{\text{eqv}}(l)$, полученный при комплексном подходе (линии 1 на рис. 7, а, 8, а, 9, а), сверху и снизу может быть ограничен некоторыми асимптотами. Наличие нижней асимптоты обуславливается тем, что при увеличении толщины футеровочного слоя тепловое влияние процесса горения снижается и НДС конструкции определяется главным образом влиянием собственной массы установки и давлением среды. Верхняя асимптота при стремлении толщины футеровочного слоя к нулю характеризуется уровнем напряжений, обусловленным температурами, которых способен достичь материал металлического корпуса при заданном уровне конвективных и радиационных потерь в окружающую среду. Разница эквивалентных напряжений, рассчитанных на основании аналитических теплотехнических расчетов и при использовании комплексного подхода, составляет от 7 до 31 %. Уровень прогнозируемых напряжений при допущении идеально равномерного прогрева узлов конструкции минимум в 6.5 раз меньше, чем при использовании двух других рассматриваемых подходов. Для конструкции реактора фильтрационного горения газов, показанной на рис. 1 в качестве рекомендуемого значения минимально допустимой толщины футеровоч-

ного слоя (смесь марки СМКРБТ по ТУ 14-8-567-88), при которой обеспечивается регламентированный коэффициент запаса прочности, может приниматься значение в 23 мм.

На рис. 7, б, 8, б, 9, б показаны расчетные зависимости эквивалентных напряжений от значений температуры. При повышении температуры для всех рассматриваемых областей наблюдается рост эквивалентных напряжений. Это обусловлено деформациями конструкции вследствие теплового расширения стали марки 12Х18Н10Т. В расчетах учитываются зависимости модуля упругости $E = E(T_s)$, и коэффициента Пуассона $\nu = \nu(T_s)$ [5].

Расчетные эквивалентные напряжения в исследуемом интервале температур, полученные в результате численного решения сопряженной термомеханической задачи, показаны линиями 1 на рис. 7, б, 8, б, 9, б. Зависимости эквивалентных напряжений от температуры в рассмотренных случаях являются монотонно возрастающими и могут аппроксимироваться линейными функциями с 5 %-й точностью.

Зависимости эквивалентных напряжений от температуры, полученные при использовании температур, рассчитанных с помощью аналитических методов теплотехники, показаны линиями 2 на рис. 7, б, 8, б, 9, б. Эти зависимости могут быть аппроксимированы функцией вида $\sigma_{eqv} = \text{const}$ в 20 %-м интервале.

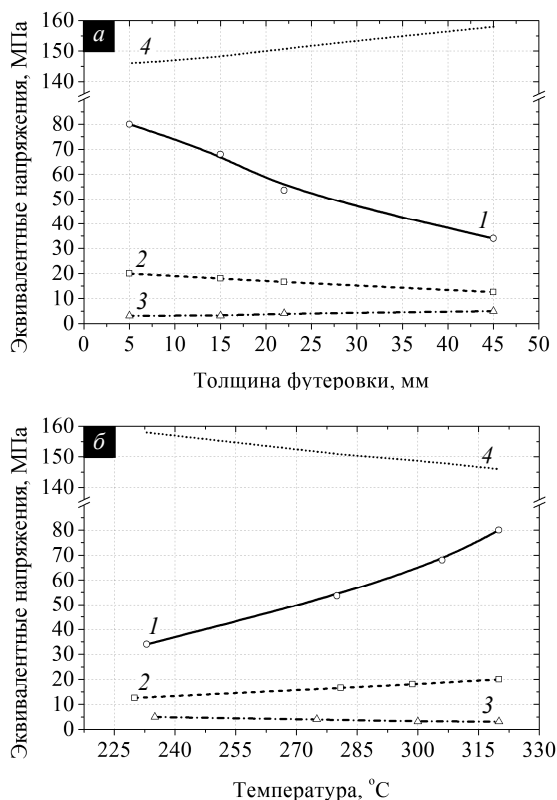


Рис. 9. Зависимость эквивалентных напряжений в центральном сечении обечайки от толщины футеровочного слоя (а) и от температуры (б)

Вблизи фронта трещины расчетная температура не превышает 220°C для всего исследуемого диапазона изменения толщин слоя футеровки. Распределение рассчитанных значений J -интеграла вдоль фронта кольцевой технологической трещины (рис. 2) в полярных координатах показано на рис. 10 для различных толщин футеровочного слоя. Оно получено с использованием комплексного подхода (кривая с индексом 1) и при определении поля температур аналитическими методами теплотехники (кривая 2). Оценка значений вязкости разрушения по упрощенной методике дает распределение параметра J вдоль фронта трещины, укладывающееся в 47 %-й диапазон, а при комплексном подходе прогнозируются большие градиенты величины J и разница достигает 79 % и 910 Дж/м^2 .

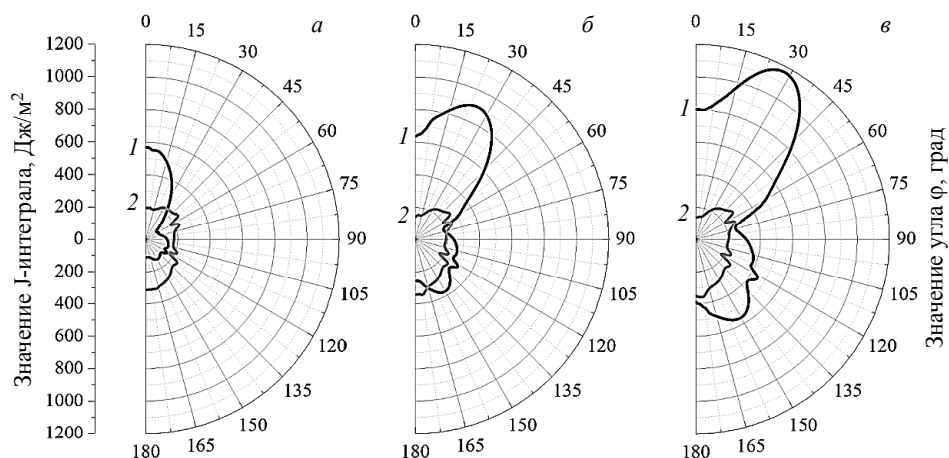


Рис. 10. Распределение значений J -интеграла вдоль фронта трещины при использовании футеровки толщиной 45 мм (а), 15 мм (б), 5 мм (в) в полярных координатах

Различие в величине прогнозируемых значений для используемых подходов лежит в интервале 30–73 % на участке вблизи концентратора напряжений в зависимости от тепловой напряженности конструкции обусловленной толщиной футеровочного слоя или степенью его износа. Максимальное значение J -интеграла при толщине футеровки в 5 мм составляет 1265 Дж/м^2 , что соответствует 17-кратному запасу вязкости разрушения до начала роста трещины [27].

Заключение

В работе рассмотрен подход к решению сопряженных термомеханических задач для оценки НДС, реализующемуся в результате воздействия высокотемпературных процессов на конструкцию энергетических установок и аппаратов переработки нефти и газа.

Сформулирована физико-математическая постановка сопряженной термомеханической задачи, позволяющая получать прогнозы деформаций, прочности и распределения температуры в элементах конструкции реакторов фильтрационного горения с максимальной температурой в рабочей зоне $\sim 1500^\circ\text{C}$.

На основе численного решения сопряженной термомеханической задачи проведено трехмерное моделирование технологического процесса и прочности конструкции реактора фильтрационного горения для конверсии метана.

Получен контур тепловых полей по реакционной области и элементам конструкции реакторного блока с различной толщиной футеровки зоны горения. Показано, что для исследуемых толщин футеровки при нормальном функционировании реактора в элементах конструкции реализуется сложное НДС. Установлены области концентрации напряжений вблизи геометрических неоднородностей (отводы, фланцы, выступы и т.д.) в условиях формирующихся градиентов температур.

Установлена нелинейная зависимость реализующихся максимальных эквивалентных напряжений от толщины футеровочного слоя. При уменьшении толщины футеровки происходит рост максимальных эквивалентных напряжений в элементах конструкции.

Показано, что на основании результатов решения сопряженной термомеханической задачи может быть определено рациональное значение толщины футеровки, при которой обеспечивается нормативный коэффициент запаса прочности.

Проведено сравнение температур и напряжений в элементах конструкций реакторов фильтрационного горения, полученных при использовании численного решения сопряженных задач и с применением результатов аналитических теплотехнических расчетов в соответствии с ГОСТ Р 52857.1–2007 [5] и рекомендациями [25, 26].

Сравнение расчетных НДС, полученных при использовании обсуждаемых методов, показало, что прогнозируемые максимальные эквивалентные напряжения могут различаться до 30 %. На величину напряжений в элементах конструкций влияют локальные изменения коэффициента теплоотдачи, обусловленные эффектами турбулентности и неравномерности поля скорости потока высокотемпературного газа.

В рамках рассмотренного в работе подхода к решению сопряженных задач термомеханики может быть проведена теоретическая оценка энергетических затрат вблизи фронта пространственных трещин сложной формы с помощью вычисления J -интеграла (8) по огибающему замкнутому контуру.

Для аналогичных режимов работы реактора проводилась оценка вязкости разрушения корпуса реактора при наличии кольцевой технологической трещины. Распределение значений J -интеграла вдоль фронта трещины неравномерно вследствие неравномерности локального поля напряжений вблизи дефекта, обусловленной наличием конструктивных и температурных неоднородностей.

Показана возможность теоретического прогнозирования трещиностойкости элементов конструкций с трещинами и определения критических условий эксплуатации энергетических установок, при которых наступает хрупкое разрушение, путем сравнения расчетных значений J с критическими значениями J_c , определяемыми экспериментально для широкого круга конструкционных сталей (метод Бигли – Ландеса) [27, 28].

Сравнение расчетных значений вязкости разрушения, полученных в рамках решения сопряженной термомеханической задачи и при использовании аналитических методов теплотехники, показало, что различие значений J -интеграла для идентичных условий нагружения достигает 73 %.

Предложенный в работе подход к решению сопряженных термомеханических задач может использоваться для получения данных о реализующемся НДС и вязкости разрушения элементов конструкций энергетических установок с учетом влияния на уровень достигаемых напряжений параметров течения высокотемпературных сред и режимов функционирования устройства. При использовании предложенной комплексной методики расчета на 25–30 % может быть снижен от-

раслевой коэффициент запаса прочности, что с учетом использования в аппаратах подобного класса дорогостоящих хромоникелетитановых сталей аустенитного класса позволит снизить материальные затраты на производство на 5–10 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковеня В.М. Некоторые тенденции развития математического моделирования // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7. № 2. С. 59–73.
2. Слесаренко А.П., Кобринович Ю.О., Марченко А.А. Математическое моделирование тепловых процессов в пространственных конструкциях энергетических устройств // Восточно-европейский журнал передовых технологий. 2012. Т. 5. № 4. С. 4–9.
3. Кузнецов Г.В., Санду С.Ф. Математическое моделирование работы высокотемпературных тепловых труб в теплопередающих устройствах современных энергетических установок // Известия вузов. Ядерная энергетика. 2004. № 2. С. 102–109.
4. А. да Роза. Возобновляемые источники энергии: физико-технические основы: учеб. пособие: пер. с англ. Долгопрудный; Москва: МЭИ; Интеллект, 2010. 704 с.
5. ГОСТ Р 52857.1-2007. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Общие требования. М.: Стандартиформ, 2008. 24 с.
6. ГОСТ Р 52630-2012. Сосуды и аппараты стальные сварные. Общие технические условия. М.: Стандартиформ, 2013. 83 с.
7. Данилов А.М., Гарькина И.А. Математическое моделирование сложных систем: состояние, перспективы, пример реализации // Вестник гражданских инженеров. 2012. № 2. С. 333–337.
8. Кузнецов Г.В., Крайнов А.Ю., Коришунов А.В. Сопряженный теплоперенос и гидродинамика при движении вязкой несжимаемой неизотермической жидкости в открытой полости с учётом охлаждения внешнего контура // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 4(12). С. 102–108.
9. Hoky Moon, Kyung Min Kimb, Yun Heung Jeonc, Sangwoo Shina, Jun Su Parka, Hyung Hee Cho. Effect of thermal stress on creep lifetime for a gas turbine combustion liner // Engineering Failure Analysis. 2015. V. 47A. P. 34–40.
10. Кректулева Р.А., Черепанов О.И., Черепанов Р.О. Численное решение квазистатической задачи расчета остаточных напряжений в сварных швах с учетом фазовых превращений // Физическая мезомеханика. 2013. Т. 16. № 6. С. 51–57.
11. Леонов В.П., Мизецкий А.В. Влияние локальных остаточных сварочных напряжений на начальную стадию развития трещин в сварных соединениях // Вопросы материаловедения. 2008. № 4. С. 54–65.
12. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов. 7-е изд., испр. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
13. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы: курс лекций. Часть I. Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 1998. 108 с.
14. Dobrego K.V., Gnezdilov N.N., Lee S.H., Choi H.K. Partial oxidation of methane in a reverse flow porous media reactor // Int. J. Hydrogen Energy. 2008. V. 33. P. 5535–5544.
15. Яковлев И.А., Замбалов С.Д., Скрипняк В.А. Математическое моделирование процесса получения синтез-газа в реакторе фильтрационного горения при повышенных давлениях // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 6(32). С. 103–120.
16. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 310 с.
17. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Учебное пособие. Самара: Самарский университет, 2001. 562 с.
18. Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения. М.: Мир, 1986. 334 с.
19. Hongjun Yu, Linzhi Wu, Licheng Guo, Huaping Wu, Shanyi Du. An interaction integral method for 3D curved cracks in nonhomogeneous materials with complex interfaces // International Journal of Solids and Structures. 2010. V. 47. P. 2178–2189.

20. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. Запорожье: ООО «ИПО Запорожье», 2009. 400 с.
21. Рояк М.Э. и др. Сеточные методы решения краевых задач математической физики. Новосибирск: НГТУ, 1998. 120 с.
22. Vogel J.C., Eaton J.K. Combined Heat Transfer and Fluid Dynamic Measurements Downstream of a Backward-Facing Step // Journal of Heat Transfer. 1985. V. 107. P. 922–929.
23. Timoshenko S. Strength of Materials, Part I, Elementary Theory and Problems. N.Y.: D. Van Nostrand Company, 1955. 234 p.
24. Мураками Ю. (ред.) Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1990. 448 с.
25. Тымчак В.М., Гусовский В.Л. Расчёт нагревательных и термических печей. Справ. изд. М.: Металлургия, 1983. 480 с.
26. Нащокин В.В. Техническая термодинамика и теплопередача: учебник. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1975. 497 с.
27. Москвичев В.В., Махутов Н.А., Черняев А.П. и др. Трещиностойкость и механические свойства конструкционных материалов. Новосибирск: Наука, 2002. 334 с.
28. Begley J.R., Landes J.D. The J-integral as a fracture criterion // Fracture analysis. ASTM STP. 1972. No. 514. P. 1–20.

Статья поступила 03.04.2015 г.

Yakovlev I. A., Skripnyak V.A. MATHEMATICAL MODELING OF COMPLEX TECHNICAL OBJECTS WITH NONLINEAR PROPERTIES ILLUSTRATED BY THE INVESTIGATION OF POROUS MEDIA REACTOR RELIABILITY

DOI 10.17223/19988621/35/11

The paper considers the approach to solving coupled thermomechanical problems for investigation of stresses, strains and crack resistance of high-temperature porous media combustion reactors and others energy setups. A coupled physical-mathematical model for definition of strains, stresses and temperatures in porous media reactors is formulated. In this paper, the three-dimensional simulation of technological process and reliability of a methane conversion reactor in filtrating mode is carried out. Thermal contours of the reaction region and structural elements of the reactor unit are obtained for different thicknesses of combustion zone lining. Structural elements of the reactor have a complex strain-stress state under normal operation conditions. Stress concentrators are detected near geometrical and thermal gradients. Results of numerical solution of coupled thermomechanical problems and calculation of structural elements strength where thermal contours were determined on the basis of analytical thermal calculations were analyzed. The comparison of the calculated strain-stress states shows that the maximum equivalent stress may differ to 30 % for considered methods. In the numerical solution of coupled problems, predicted stresses are distributed according to local changes of the heat transfer coefficient due to the effects of turbulence and non-uniformity of the hot gas velocity field.

The considered approach to solving coupled thermomechanical problems can be used for analyzing strain-stress states and crack resistance of energy setups. The influence of the parameters of high-temperature gas flow and modes of device operation on the stress level can be taken into account.

Keywords: energy and oil-gas setups, porous media combustion reactors, computer-aided engineering, simulation of setups operation, strength analysis, coupled problems

YAKOVLEV Igor Aleksandarovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: yakovlev-i-a@yandex.ru

SKRIPNYAK Vladimir Albertovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: skrp@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Kovenya V.M. Nekotorye tendentsii razvitiya matematicheskogo modelirovaniya. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 59–73. (in Russian)
2. Slesarenko A.P., Kobrinovich Yu.O., Marchenko A.A. Matematicheskoe modelirovanie teplovykh protsessov v prostranstvennykh konstruktivnykh energeticheskikh ustroystv. *Vostochno-evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 4–9. (in Russian)
3. Kuznetsov G.V., Sandu S.F. Matematicheskoe modelirovanie raboty vysokotemperaturnykh teplovykh trub v teploperedayushchikh ustroystvakh sovremennykh energeticheskikh ustanovok. *Izvestiya vuzov. Yadernaya energetika*, 2004, no. 2, pp. 102–109. (in Russian)
4. A. da Roza. *Vozobnovlyаемые источники энергии: физико-технические основы: Учебное пособие*. Dolgoprudnyy, Moscow, MEI Publ.; Intellect Publ., 2010. 704 p. (in Russian)
5. GOST R 52857.1-2007. *Sosudy i apparaty. Normy i metody rascheta na prochnost'*. Obshchie trebovaniya. Moscow, Standartinform Publ., 2008. 24 p. (in Russian)
6. GOST R 52630-2012. *Sosudy i apparaty stal'nye svarnye. Obshchie tekhnicheskie usloviya*. Moscow, Standartinform Publ., 2013. 83 p. (in Russian)
7. Danilov A.M., Gar'kina I.A. Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh sistem: sostoyanie, perspektivy, primer realizatsii. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*, 2012, no. 2, pp. 333–337. (in Russian)
8. Kuznetsov G.V., Kraynov A.Yu., Korshunov A.V. Sopryazhennyy teploperenos i gidrodinamika pri dvizhenii vyazkoy neszimaemoy neizotermicheskoy zhidkosti v otkrytoy polosti s uchedom okhlazhdeniya vneshnego kontura. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2010, no. 4(12), pp. 102–108. (in Russian)
9. Hoky Moon, Kyung Min Kim, Yun Heung Jeon, Sangwoo Shin, Jun Su Park, Hyung Hee Cho. Effect of thermal stress on creep lifetime for a gas turbine combustion liner. *Engineering Failure Analysis*, 2015, vol. 47A, pp. 34–40.
10. Krekuleva R.A., Cherepanov O.I., Cherepanov R.O. Chislennoe reshenie kvazistaticheskoy zadachi rascheta ostatochnykh napryazheniy v svarnykh shvakh s uchedom fazovykh prevrashcheniy. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2013, vol. 16, no. 6, pp. 51–57. (in Russian)
11. Leonov V.P., Mizetskiy A.V. Vliyaniye lokal'nykh ostatochnykh svarochnykh napryazheniy na nachal'nuyu stadiyu razvitiya treshchin v svarnykh soedineniyakh. *Voprosy materialovedeniya*, 2008, no. 4, pp. 54–65. (in Russian)
12. Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza: ucheb. dlya vuzov*. Moscow, Drofa Publ., 2003. 840 p. (in Russian)
13. Frik P.G. *Turbulentnost': modeli i podkhody: kurs lektsiy. Part I*. Perm': Perm St. Tech. Univ. Publ., 1998. 108 p. (in Russian)
14. Dobrego K.V., Gnezdilov N.N., Lee S.H., Choi H.K. Partial oxidation of methane in a reverse flow porous media reactor. *Int. J. Hydrogen Energy*, 2008, vol. 33, pp. 5535–5544. (in Russian)
15. Yakovlev I.A., Zambalov S.D., Skripnyak V.A. Matematicheskoe modelirovanie protsessa polucheniya sintez-gaza v reaktore fil'tratsionnogo goreniya pri povyshennykh davleniyakh. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 6(32), pp. 103–120. (in Russian)
16. Meyz Dzh. *Teoriya i zadachi mekhaniki sploshnykh sred*. Moscow, Mir Publ., 1974. 310 p. (in Russian)
17. Astaf'ev V.I., Radaev Yu.N., Stepanova L.V. *Nelineynaya mekhanika razrusheniya. Uchebnoe posobie*. Samara, Samara St. Univ. Publ., 2001. 562 p. (in Russian)
18. Siratori M., Miesi T., Matsusita Kh. *Vychislitel'naya mekhanika razrusheniya*. Moscow, Mir Publ., 1986. 334 p. (in Russian)
19. Hongjun Yu, Linzhi Wu, Licheng Guo, Huaping Wu, Shanyi Du. An interaction integral method for 3D curved cracks in nonhomogeneous materials with complex interfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, vol. 47, pp. 2178–2189.
20. Klovaniy S.F. *Metod konechnykh elementov v nelineynykh zadachakh inzhenernoy mekhaniki*. Zaporozh'e, OOO «IPO Zaporozh'e» Publ., 2009. 400 p. (in Russian)

21. Royak M.E. et al. *Setochnye metody resheniya kraevykh zadach matematicheskoy fiziki*. Novosibirsk: NGTU Publ., 1998. 120 p. (in Russian)
22. Vogel J.C., Eaton J.K. Combined Heat Transfer and Fluid Dynamic Measurements Downstream of a Backward-Facing Step. *Journal of Heat Transfer*, 1985, vol. 107, pp. 922–929.
23. Timoshenko S. *Strength of Materials, Part I, Elementary Theory and Problems*. N.Y.: D. Van Nostrand Company, 1955. 234 p.
24. Murakami Yu. (ed.) *Spravochnik po koeffitsientam intensivnosti napryazheniy, vol. 1*. Moscow, Mir Publ., 1990. 448 p. (in Russian)
25. Tymchak V.M., Gusovskiy V.L. *Raschet nagrevatel'nykh i termicheskikh pechey. Sprav. izd.* Moscow, Metallurgiya Publ., 1983. 480 p. (in Russian)
26. Nashchokin V.V. *Tekhnicheskaya termodinamika i teploperedacha: uchebnik*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1975. 497 p. (in Russian)
27. Moskvichev V.V., Makhutov N.A., Chernyaev A.P., et al. *Treshchinostoykost' i mekhanicheskie svoystva konstruktsionnykh materialov*. Novosibirsk, Nauka Publ., 2002. 334 p. (in Russian)
28. Begley J.R., Landes J.D. The J-integral as a fracture criterion. *Fracture analysis. ASTM STP*, 1972, no. 514, pp. 1–20.