УДК 519.6 DOI 10.17223/2226308X/8/7

О СТЕПЕННОЙ СТРУКТУРЕ ГРАФОВ

В. М. Фомичев

Представлены свойства степенной структуры различных классов графов, описана степенная структура минимальных примитивных орграфов с числом вершин n и числом дуг $n+1$ и $n+2$. При любом $n \geqslant 5$ и при $k = 2, \ldots, n-3$ показано существование n-вершинного минимального примитивного орграфа с числом дуг $n+k$ и со степенной структурой $\{(1,1)^{n-1}, (k+1,k+1)^1\}$.

Ключевые слова: *минимальный примитивный граф, степенная структура графа.*

В [1] введено мультимножество, называемое степенной структурой графа. Укажем определяющие свойства степенной структуры графов.

1. Ориентированные графы

Для n-вершинного орграфа Γ обозначим $n_{r,s}$ число вершин с полустепенью захода r и полустепенью исхода s, где $0 \leqslant r, s, n_{r,s} \leqslant n$. Целое неотрицательное число $n_{r,s}$ называется кратностью пары (r,s) полустепеней вершин в орграфе Γ. Мультимножество всех пар (r,s) полустепеней вершин в орграфе Γ называется степенной структурой орграфа Γ, обозначается $D(\Gamma)$. Таким образом, $D(\Gamma) = \{(r,s)^{n_{r,s}}\}$, где, как правило, пары с нулевой кратностью не записаны в мультимножестве $D(\Gamma)$.

Например, степенная структура контура K длины n имеет вид $D(K) = \{(1,1)^n\}$, степенная структура полного n-вершинного орграфа Γ имеет вид $D(\Gamma) = \{(n,n)^n\}$.

Для степенной структуры n-вершинного орграфа Γ, заданной мультимножеством $D(\Gamma) = \{(r,s)^{n_{r,s}}\}$, выполнен ряд свойств.

1) Для орграфа Γ с числом вершин $n > 1$ и с числом дуг m

$$\sum_{(r,s)} n_{r,s} = n; \tag{1}$$

$$\sum_{(r,s)} (r+s) n_{r,s} = 2m. \tag{2}$$

Равенство (2) есть запись одной из первых теорем теории графов, доказанных Эйлером, в терминах степенной структуры орграфа.

2) Если орграфы Γ и Γ' изоморфны, то $D(\Gamma) = D(\Gamma')$.

3) В орграфе Γ:
   - $n_{0,0}$ есть число изолированных вершин;
   - $\sum\limits_{s} n_{0,s}$ есть число вершин с полустепенью захода 0;
   - $\sum\limits_{r} n_{r,0}$ есть число вершин с полустепенью исхода 0;
   - если орграф Γ сильносвязный, то $n_{0,s} = n_{r,0} = 0$ при любых s и r;
   - число ациклических неизолированных вершин не меньше $\sum\limits_{s>0} n_{0,s} + \sum\limits_{r>0} n_{r,0}$;
   - число циклических вершин не превышает $n - \sum\limits_{s} n_{0,s} - \sum\limits_{r} n_{r,0}$.

4) Пусть X есть n-множество, $\Gamma(g)$ — граф преобразования g множества X, тогда
   - $n_{r,s} = 0$ при любом $s \neq 1$, r любое;

— равенства (1) и (2) имеют вид

$$n_{0,1} + n_{1,1} + \ldots + n_{n,1} = n; \tag{3}$$

$$\sum_{r=0}^{n} (r+1) n_{r,1} = 2n; \tag{4}$$

— $n_{0,1}$ есть число элементов X, не имеющих прообразов относительно g;
— число ациклических вершин не меньше $n_{0,1}$;
— число циклических вершин не превышает $n - n_{0,1}$.

2. Неориентированные графы

Для n-вершинного графа Γ обозначим $q(r)$ число вершин степени r, $0 \leqslant r$, $q(r) \leqslant n$ (кратность степени r). Мультимножество допустимых натуральных чисел r назовём степенной структурой графа Γ (обозначим её $\Delta(\Gamma)$); таким образом, $\Delta(\Gamma) = \{r^{[q(r)]}\}$, при $q(r) = 0$ элемент r опускается.

Например, степенная структура цикла C длины n имеет вид $\Delta(C) = \{2^{[n]}\}$, степенная структура полного n-вершинного графа Γ имеет вид $\Delta(\Gamma) = \{n^{[n]}\}$.

Для степенной структуры n-вершинного графа Γ, заданной мультимножеством $\Delta(\Gamma) = \{r^{[q(r)]}\}$, выполнен ряд свойств.

1) Для графа Γ с числом вершин $n > 1$ и с числом рёбер m

$$q(0) + q(1) + \ldots + q(n) = n; \tag{5}$$

$$\sum_{r} r q_r = 2m. \tag{6}$$

2) Если графы Γ и Γ' изоморфны, то $\Delta(\Gamma) = \Delta(\Gamma')$.
3) $q(0)$ есть число изолированных вершин.

3. Описание степенной структуры минимальных примитивных орграфов

Примитивный орграф называется минимальным, если любая его n-вершинная часть не является примитивным графом. Обозначим $\Gamma^P_{\min}(n, m)$ множество всех минимальных примитивных n-вершинных орграфов с числом дуг $m > n$.

Теорема 1 [1]. При $n \geqslant 3$ орграф $\Gamma \in \Gamma^P_{\min}(n, n+1)$, если и только если Γ есть объединение двух простых контуров взаимно простых длин l и λ, общая часть которых есть путь длины q, где $0 \leqslant q \leqslant n-2$, $l > \lambda$, $l + \lambda - q = n + 1$; при $q = 0$ общая часть контуров есть вершина.

Следствие 1. Для $\Gamma \in \Gamma^P_{\min}(n, n+1)$, где $n \geqslant 3$, или $D(\Gamma) = \{(1,1)^{n-2}, (1,2), (2,1)\}$, или $D(\Gamma) = \{(1,1)^{n-1}, (2,2)\}$.

Теорема 2 [1]. Если $\Gamma \in \Gamma^P_{\min}(n, n+2)$, то $D(\Gamma)$ принадлежит следующим 9 классам при указанных n:

№	$n \geqslant \ldots$	$D(\Gamma)$	№	$n \geqslant \ldots$	$D(\Gamma)$
1	5	$(1,1)^{n-1}, (3,3)^1$	6	6	$(1,1)^{n-3}, (2,1)^2, (1,3)^1$
2	5	$(1,1)^{n-2}, (2,1)^1, (2,3)^1$	7	6	$(1,1)^{n-3}, (1,2)^2, (3,1)^1$
3	5	$(1,1)^{n-2}, (1,2)^1, (3,2)^1$	8	6	$(1,1)^{n-3}, (1,2)^1, (2,1)^1, (2,2)^1$
4	5	$(1,1)^{n-2}, (2,2)^2$	9	6	$(1,1)^{n-4}, (1,2)^2, (2,1)^2$
5	4	$(1,1)^{n-2}, (1,3)^1, (3,1)^1$			

Лемма 1. Пусть a, b — взаимно простые натуральные числа, тогда любое натуральное $n > ab$ представимо линейной комбинацией $n = la + \lambda b$, где $l, \lambda > 0$.

Теорема 3. Для любого $n \geqslant 5$ и $k = 2, \ldots, n-3$ имеется орграф $\Gamma \in \Gamma^P_{\min}(n, n+k)$ со степенной структурой $D(\Gamma) = \{(1,1)^{n-1}, (k+1, k+1)^1\}$.

В силу леммы любое число, не меньшее 7, представимо линейной комбинацией $2l + 3\lambda$, где $l, \lambda > 0$. Значит, при $n \geqslant 5$ и $k = 2, \ldots, n-3$ множество дуг орграфа (порядка $n+k$) можно разделить на l контуров длины 2 и λ контуров длины 3 с единственной общей вершиной, что обеспечивает примитивность и минимальность орграфа. Для данного орграфа $n + k = 2l + 3\lambda$, $n = l + 2\lambda + 1$, отсюда $k = l + \lambda - 1$. Значит, степенная структура имеет требуемый вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фомичев В. М.* Свойства минимальных примитивных орграфов // Прикладная дискретная математика. 2015. №2(28). С. 86–96.