

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3

DOI 10.17223/19988621/36/1

М.С. Бухтяк, А.В. Соломина

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСКРОЯ СЕТЕПОЛОТНА  
ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РЕФЛЕКТОРА. ЧАСТЬ 2

Исследована методика раскроя, основанная на использовании плоских клиновидных лепестков для формирования вырезки из параболоида вращения. Решалась следующая задача: указать конфигурацию лепестка, исходя из параметров рефлектора и требования сохранения (насколько это возможно) существенных геометрических характеристик. К ним отнесены длины определенных линий на параболоиде. Обоснована целесообразность прогиба во вне боковых граничных линий лепестка, вычислены параметры прогиба. Для чрезмерно сложных функций, примененных при построении модели, построены аппроксимации и оценена их надежность.

**Ключевые слова:** *параболическая антенна, сетеполотно, лепесток, прогиб, конфигурация, аппроксимация.*

## 1. Постановка задачи

Данная работа является продолжением [1]. Как и в указанной публикации, термин «раскрой» означает и «выкройку» листа сетеполотна и некоторый способ прикрепления его к несущим конструкциям. Оптимизация раскроя трактуется как уменьшения локальных деформаций сетеполотна. Как и в [1, 2], определяется *раскрой как точечное соответствие между временно плоским листом и областью на параболоиде*. Вопросы, связанные с СКО (средним квадратичным отклонением реальной поверхности сетеполотна от идеального параболоида), здесь не рассматриваются по соображениям, изложенным в [1].

В упомянутой первой части речь шла о прикреплении к несущим конструкциям плоского диска, тем или иным способом сшитого из сетеполотна. Решалась вариационная задача: если раскрой именно таков, то каким должно быть соответствие между диском и куском параболоида, чтобы степень равномерности натяжения сетеполотна в различных его точках была как можно более высокой – при дополнительном требовании повышенного внимания к центральной области рефлектора как наиболее важной для улучшения радиофизических характеристик антенны. Применению вариационного подхода предшествовали некоторые соображения не вполне строгого характера, которые, однако, сыграли свою (эвристическую) роль при уточнении вариационной задачи.

В предложенной статье рассмотрена иная схема раскроя, основанная на использовании нескольких одинаковых лепестков сетеполотна, которые сшиваются между собой, а затем прикрепляются к несущим конструкциям рефлектора. Модель строится на основе довольно естественных «эвристических» соображений,

облегчающих постановку вариационной задачи, но размеры статьи заставляют отложить этот вопрос до третьей части.

Действуя как в [1, 3], мы вводим в рассмотрение две параметризованные поверхности

$$\Sigma_1 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_1(u, v), \quad \Sigma_2 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_2(u, v).$$

Точки  $A = \mathbf{r}_1(u, v)$  и  $A' = \mathbf{r}_2(u, v)$  как раз и являются соответствующими. Локальная метрика каждой из поверхностей определяется соответствующим метрическим тензором. Матрицы этих тензоров составлены из коэффициентов первых квадратичных форм

$$M_1 = \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}.$$

Сами же первые квадратичные формы [4] имеют вид

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2, \quad ds_2^2 = E_2 du^2 + 2F_2 dudv + G_2 dv^2.$$

Мерой локального искажения длин (точнее, их квадратов) является величина

$$\lambda = \frac{ds_2^2}{ds_1^2}.$$

Экстремальные значения  $\lambda$  суть совместные инварианты матриц  $M_1$  и  $M_2$ , равные корням уравнения

$$m \equiv \det(M_2 - \lambda M_1) = E_1 G_1 - F_1^2 + \lambda(2F_1 F_2 - E_1 G_2 - E_2 G_1) + \lambda^2(E_2 G_2 - F_2^2) = 0. \quad (1.1)$$

Важно отметить, что положительная определенность симметричных матриц  $M_1$  и  $M_2$  гарантирует вещественность корней уравнения (1.1). Коэффициенты уравнения (1.1) обозначим

$$a = E_2 G_2 - F_2^2, \quad b = 2F_1 F_2 - E_1 G_2 - E_2 G_1, \quad c = E_1 G_1 - F_1^2.$$

## 2. Построение модели

Данная схема составлена в предположении, что сетеполотно слабо подвержено сдвиговым деформациям, и, следовательно, деформации в малой степени нарушают изначальную ортогональность нитей. Принцип раскроя пояснен рис. 1 и 2.

Родительский параболоид принято задавать уравнением

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4F}.$$

Нас интересует некоторая его осесимметричная часть, для задания которой мы применяем вектор-функцию

$$\mathbf{R} = \left\{ u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{4F} \right\}, \quad (0 \leq u \leq R), \quad (2.1)$$

Здесь  $R$  – радиус вырезающего цилиндра. Ввиду симметрии полагаем, что достаточно изучить один лепесток, симметричный относительно плоскости  $Oxz$ . Пусть  $n$  – количество лепестков, составляющих рефлектор. Тогда к (2.1) следует добавить

$$\left( -\frac{\pi}{n} \leq v \leq \frac{\pi}{n} \right).$$

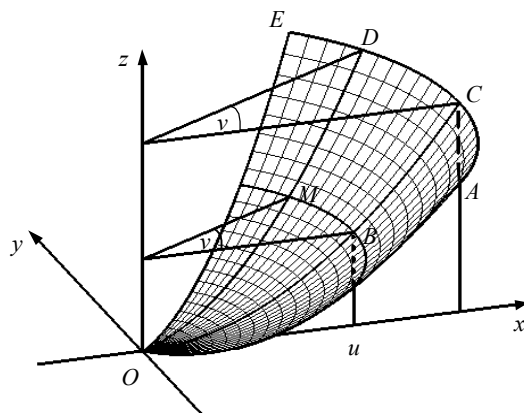


Рис. 1. Геометрический смысл криволинейных координат  $u, v$

Параболоид рассечен плоскостью  $xOz$ . В сечении – парабола  $OBC$ . Переменному значению  $u$  на оси  $Ox$  отвечает переменная точка  $B$  на параболе. Длина дуги  $\widehat{OB}$  параболы обозначена  $s$ . Из параболоида вырезается сектор, ограниченный плоскостями  $y = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$  и  $y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ . Положение текущей точки  $M$  на лепестке определяется значениями криволинейных координат  $u$  и  $v$ .

Выкройкой для параболического сектора ( $OACE$ ) служит плоский лепесток ( $OA_1C_1E_1$ ) (рис. 2). Соответствие между сектором параболоида и плоским лепестком устанавливается следующим образом.

$$|OM_1| = |\widehat{OM}| = s,$$

В частности,

$$|OB_1| = |\widehat{OB}| = s.$$

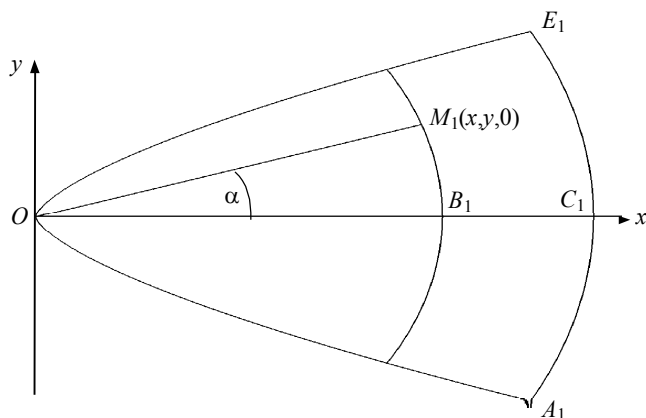


Рис. 2. Геометрический смысл параметризации плоского лепестка сетеполотна

Поскольку  $s$  есть длина линии  $(OB)$ , то есть куска параболы, то

$$s = \frac{1}{4F} \left( -4F^2 \ln 2 - 4F^2 \ln(F) + u\sqrt{4F^2 + u^2} + 4F^2 \ln \left( u + \sqrt{4F^2 + u^2} \right) \right).$$

Наибольшая из длин

$$|OC_1| = \frac{1}{4F} \left( -4F^2 \ln 2 - 4F^2 \ln(F) + R\sqrt{4F^2 + R^2} + 4F^2 \ln \left( R + \sqrt{4F^2 + R^2} \right) \right).$$

Таким образом, параметрическое задание плоской области имеет вид

$$r = \{x, y, 0\}, \quad (2.2)$$

где  $x = s \cdot \cos \alpha$ ,  $y = s \cdot \sin \alpha$ ,  $\alpha = \frac{uv}{s}$ ,

$$\left( 0 \leq u \leq R, -\frac{\pi}{n} \leq v \leq \frac{\pi}{n} \right)$$

Эффект «бочкообразности», видимый на рис. 2, прослеживаем для половины лепестка, отрезав её по оси  $Ox$  (рис. 3).

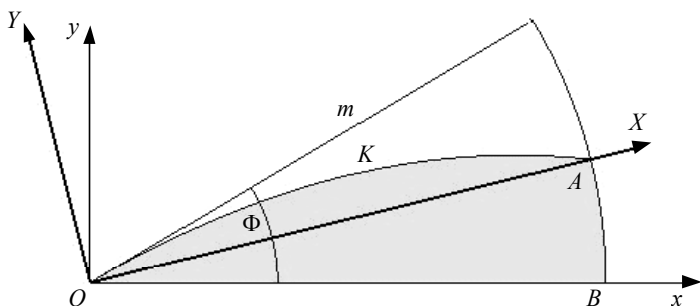


Рис. 3. Эффект «бочкообразности» лепестка

На рис. 3 граничный край лепестка, которым он примыкает к соседнему лепестку – дуга  $OKA$ . Прямолинейный отрезок  $m$  соответствует такому положению вещей, когда имеется намерение пренебречь «бочкообразностью» лепестка и замостить рефлектор прямолинейными клиньями, вместе составляющими плоский круг. Принимая в качестве новой системы координат  $XOY$ , мы можем записать уравнения указанной дуги. Это, однако, задача, которая, хотя в принципе допускает решение в общем (символьном) виде, но оно чрезвычайно громоздко, и приближение формулой Тэйлора не спасает положения. Вместо этого построена Марпл-процедура, которая по входным параметрам  $F$  и  $R$  позволяет записать уравнение граничной линии  $OKA$  в системе координат  $XOY$ .

Примем для иллюстрации следующие параметры.

Фокальный параметр  $F = 2(m)$ ,

Радиус вырезающего цилиндра  $R = 3.3(m)$ ,

Число лепестков  $n = 12$ .

Половина угла расхождения лепестка в начале координат в градусах  $\varphi = 15^\circ$ .

Половина угла расхождения лепестка в начале координат в радианах  $\Phi = \frac{\pi}{12}$ .

Для этого примера в системе координат  $XOY$  получаем изображение граничной линии лепестка (рис. 4).

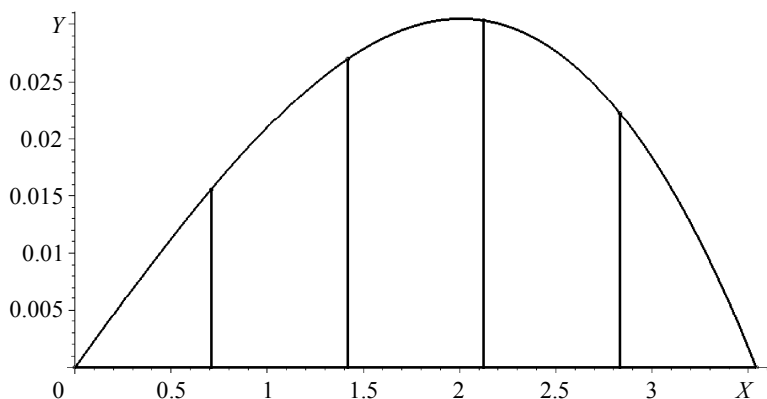


Рис. 4. Граничная линия лепестка в системе координат  $XOY$   
(размеры в  $m$ )

Уравнение этой линии (приближенно)

$$Y = 0.02286 + 0.0003574X - 0.00641907X^2 + 0.000242556X^3 + 0.000020817X^4.$$

Сам же лепесток имеет вид, показанный на рис. 5.

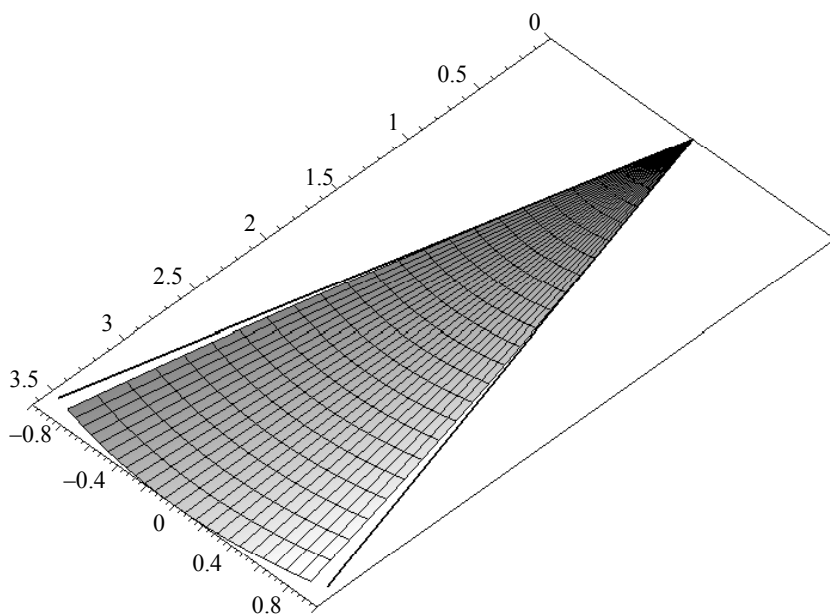


Рис. 5. Лепесток с «бочкообразными» краями.  
Видны линии, соответствующие линиям  $m$  (рис. 3)

### 3. Аппроксимация

Для оценки качества раскроя следует вычислить экстремальные значения локальных искажений длин, то есть корни уравнения (1.1). Задача чрезмерно осложняется крайней громоздкостью вектор-функции (2.2). Полиномиальное приближение исправит ситуацию – если оно достаточно надежно. Для  $x$  и  $y$  из (2.2) применяем формулу Маклорена до 10-го порядка по каждой переменной. Тогда каждая из этих функций аппроксимируется полиномом от  $u$  и  $v$ . Указанные полиномы допускают матричную запись, приведенную ниже.

$$x = \begin{pmatrix} u & u^3 & u^5 & u^7 & u^9 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \begin{matrix} -0.50000 & 0.041667 & -0.001389 & 0.000025 \\ 0.020833 & -0.005208 & 0.000289 & -0.72338 \cdot 10^{-5} \\ 0.001649 & 0.000629 & -0.000047 & 0.14769 \cdot 10^{-5} \\ 0.000171 & -0.00008 & 0.71979 \cdot 10^{-5} & -0.265335 \cdot 10^{-6} \\ 0.000021 & 0.000011 & -0.10994 \cdot 10^{-5} & 0.453648 \cdot 10^{-7} \end{matrix} \\ \begin{matrix} F^2 & F^2 & F^2 & F^2 \\ F^4 & F^4 & F^4 & F^4 \\ F^6 & F^6 & F^6 & F^6 \\ F^8 & F^8 & F^8 & F^8 \end{matrix} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} v^2 \\ v^4 \\ v^6 \\ v^8 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$y = \begin{pmatrix} u & u^3 & u^5 & u^7 & u^9 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -0.166667 & 0.008333 & -0.000198 \\ 0 & 0.013889 & -0.001389 & 0.000050 \\ 0 & -0.001389 & 0.000197 & -0.909392 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0.000160 & -0.000028 & 0.151237 \cdot 10^{-5} \\ 0 & -0.000021 & 0.397285 \cdot 10^{-5} & -0.244571 \cdot 10^{-6} \end{matrix} \\ \begin{matrix} F^2 & F^2 & F^2 & F^2 \\ F^4 & F^4 & F^4 & F^4 \\ F^6 & F^6 & F^6 & F^6 \\ F^8 & F^8 & F^8 & F^8 \end{matrix} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v^3 \\ v^5 \\ v^7 \\ v^9 \end{pmatrix}.$$

Для определения качества приближения построены графики отклонений приближенных значений координат от истинных. В частности, для координаты  $x$  получаем следующий график. Ось, градуированная от 0 до 3.3 – ось переменной  $u$ , вторая горизонтальная ось – ось переменной  $v$ . Вертикальная ось – расхождение в процентах исходной функции  $x(u, v)$  и её приближения (3.1). Верхний график получен для  $F = 1.9m$ , средний – для  $F = 2.0m$ , нижний – для  $F = 2.1m$

Соответственно для координаты  $y$  график представлен на рис. 7, и описание его соответствует описанию рис. 6.

Вычисляя корни уравнения (1.1), получаем пространственную диаграмму распределения значений меньшего корня вдоль одного лепестка для значения  $F = 2.0m$  (горизонтальная ось, градуированная от 0 до 3.5 – ось  $Ox$ , ортогональная ей горизонтальная ось – ось  $Oy$ , вертикальная ось – значение меньшего корня).

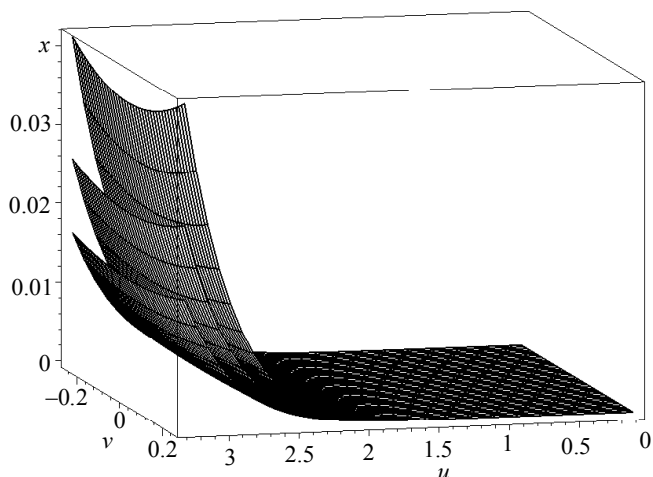


Рис. 6. Отклонения в процентах точного представления функции  $x(u, v)$  от полиномиального приближения (3.1) для трех значений фокального параметра  $F$

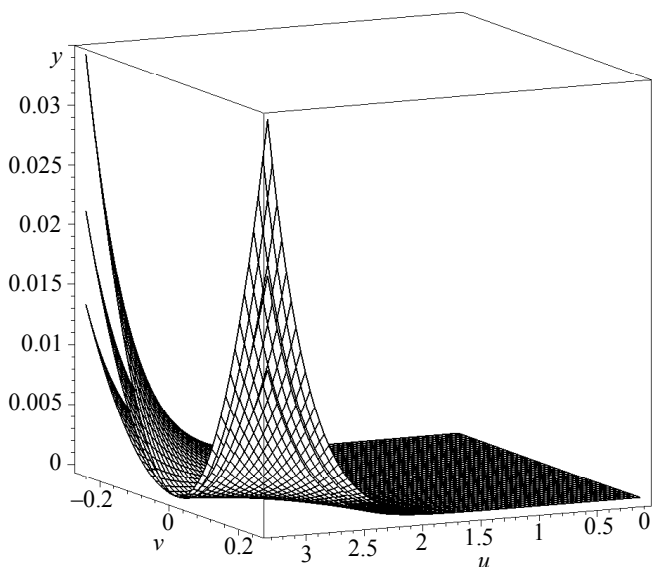


Рис. 7. Отклонения в процентах точного представления функции  $y(u, v)$  от полиномиального приближения (3.1) для трех значений фокального параметра  $F$

Если из 12 «бочкообразных» лепестков смонтирован рефлектор, то каждый лепесток испытывает локальные искажения длин, отраженное на диаграмме рис. 8. Спроецировав четвертую часть рефлектора на плоскость  $xOy$ , мы получаем контурную карту, изолинии которой показывают значения меньшего корня уравнения (1.1). Карта представлена на рис. 9. Толстые черные линии изображают проекции лепестков на горизонтальную плоскость.

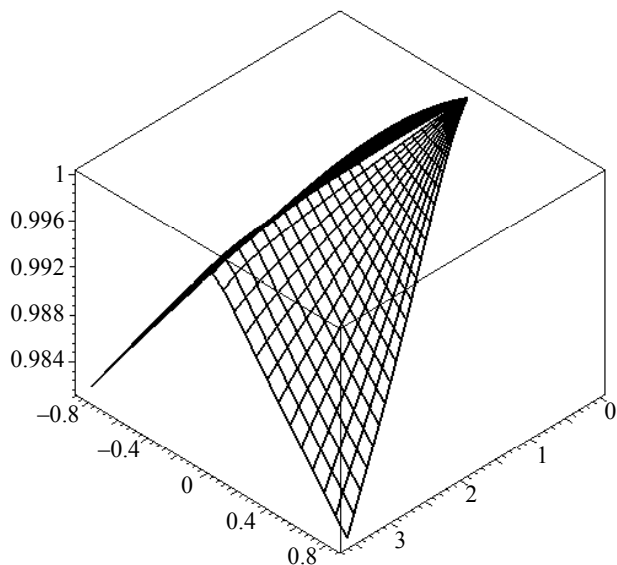


Рис. 8. Диаграмма распределения значений  
меньшего корня уравнения (3.1)

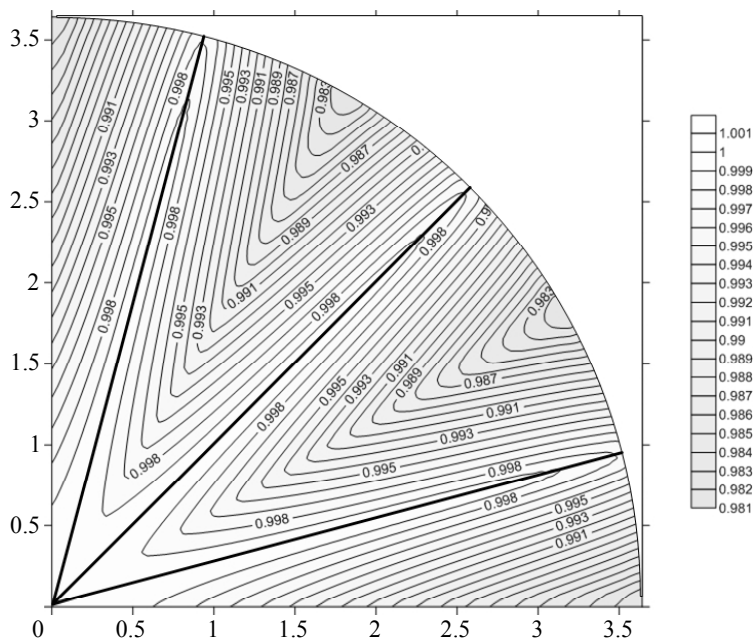


Рис. 9. Карта изолиний меньшего корня уравнения (3.1)  
в проекции на горизонтальную плоскость

Соответственно для искажений локальных длин в большую сторону получаем рис. 10. Наконец, диаграмма искажений локальных площадей (то есть произведения корней уравнения (3.1)) представлена на рис. 11.



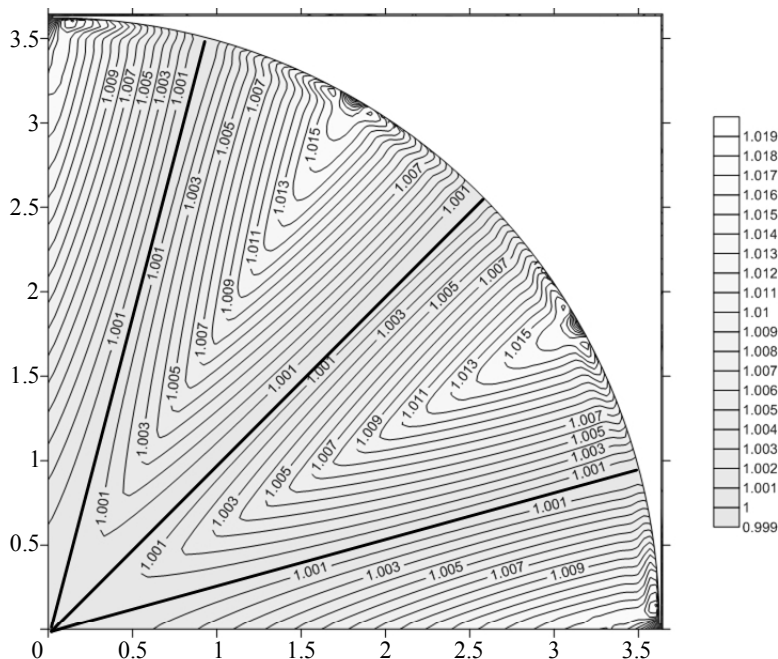


Рис. 10. Карта изолиний большего корня уравнения (3.1) в проекции на горизонтальную плоскость

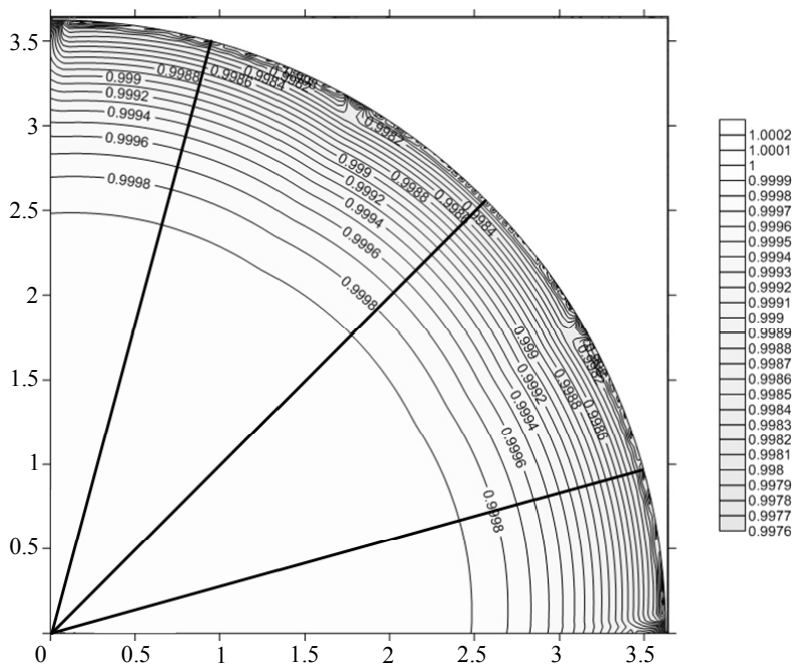


Рис. 11. Карта изолиний произведения корней уравнения (3.1) в проекции на горизонтальную плоскость

#### 4. Заключение

Методика раскроя сетеполотна опирается на свойство металлических сетеполотен – слабое влияние свиговых деформаций. Поэтому в математической модели законно считать, что деформации несущественно нарушают изначальную ортогональность нитей. В [1] определен функционал, значение которого есть мера качества рассматриваемой схемы раскроя. Схема раскроя, рассмотренная здесь, подвергается испытанию в следующей, третьей части нашей работы. Есть основания полагать, что минимизация упомянутого функционала позволит улучшить результат, полученный в предложенной здесь работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя метеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 5–17.
2. Бухтяк М.С., Самылкина О.А. О раскрое сетеполотна для осесимметричного рефлектора // Всероссийская конференция по математике и механике: тез. докл. 2–4 октября 2013 г. Томск: ТГУ, 20013. С. 93.
3. Бухтяк М.С., Никульчиков А.В. Моделирование деформации сотовой панели // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 2(22). С. 5–16.
4. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.

Статья поступила 15.04.2015 г.

*Bukhtyak M.S., Solomina A.V. GEOMETRIC MODELLING OF METALLIC MESH TAILORING FOR AXISYMETRIC REFLECTOR. PART 2*

DOI 10.17223/19988621/36/1

A method of tailoring has been examined. It is based on using flat wedge-shaped petals to make a cut-out from a paraboloid of revolution. The following problem has been solved. Specify a configuration of the patch based on reflector's parameters and a requirement to retain (as far as possible) the existing geometrical characteristics. Among them are the lengths of certain lines on the paraboloid. An expediency of deflection outwards the lateral boundary lines of the petal is proved. For excessively complex functions used in the model, approximations are built and their reliability is estimated.

Keywords: parabolic antenna, metallic mesh, petal, deflection, configuration, approximation.

*BUKHTYAK Mikhail Stepanovich* (Candidate of Physics and Mathematics,  
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail bukhtyakm@mail.ru

*SOLOMINA Anna Vladimirovna* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail annavladimirovna483@mail.ru

#### REFERENCES

1. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. Geometricheskoe modelirovanie raskroya metepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 1. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 2(34), pp. 5–17. (in Russian)
2. Bukhtyak M.S., Samylkina O.A. O raskroe setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. *Vserossiyskaya konferentsiya po matematike i mekhanike: tez. dokl. 2013 October 2–4*. Tomsk, Tomsk St. Univ. Publ., 20013, pp. 93. (in Russian)
3. Bukhtyak M.S., Nikul'chikov A.V. Modelirovanie deformatsii sotovoy paneli. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2013, no. 2(22), pp. 5–16. (in Russian)
4. Rashevskiy P.K. *Kurs differentsial'noy geometrii*. Moscow, Leningrad, GITTL Publ., 1950. 428 p. (in Russian)