УДК 512.552+512.643.8
DOI 10.17223/19988621/36/4

Ц.Д. Норбосамбуев

О СУММАХ ДИАГОНАЛЬНЫХ И ОБРАТИМЫХ ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЦ

Исследованы свойства хороших колец обобщенных матриц. Показано, что любая обобщенная матрица есть сумма диагональной и обратимой обобщенных матриц. Получено одно условие k-хорошести произвольного кольца обобщенных матриц.

Ключевые слова: *кольцо, обобщенная матрица, формальная матрица, k-хорошее кольцо.*

1. Введение

Числовые матрицы используются во многих областях математики и в различных её приложениях. В алгебре часто встречаются и имеют большое значение так называемые обобщенные матрицы. Их называют также формальными матрицами. Элементы этих матриц могут принимать значения в нескольких кольцах и бимодулях. Обобщенные матрицы складываются и умножаются по стандартным правилам матричного сложения и умножения. В результате получается кольцо – кольцо обобщенных (или формальных) матриц.

Это кольцо представляет собой важный алгебраический объект. Например, кольцо эндоморфизмов разложимого в прямую сумму модуля и любое кольцо с нетривиальным идемпотентом являются кольцами обобщенных матриц. Кольца обобщенных матриц играют важную роль в изучении ряда классов артиновых колец и алгебр. Исследование колец обобщенных матриц – это актуальное направление в современной теории колец и модулей. Оно имеет большое научное значение. В настоящее время эта тематика привлекает повышенное внимание зарубежных специалистов. С определением и основными свойствами колец обобщенных матриц можно познакомиться в статьях [1–3]. Напомним, что K_n обозначает некоторое кольцо обобщенных матриц порядка n

$$K_n = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n \end{pmatrix},$$

где $R_1, \dots, R_n$ – некоторые кольца, M_{ij} – R_i–R_j-бимодуль, $i, j=1,\dots,n$.

Пусть k – натуральное число, $k \geq 2$, R – произвольное кольцо. Элемент a кольца R называется k-хорошим, если его можно записать в виде суммы k обратимых элементов кольца R. Кольцо называется k-хорошим, если каждый его элемент является k-хорошим. Изучение колец, порождаемых аддитивно своими обратимыми элементами, началось в 1953–1954 годах, когда Вольфсон [4] и Зелинский [5] независимо друг от друга показали, что всякое линейное отображение векторного пространства V над телом D есть сумма двух обратимых линейных отображений, кроме случая, когда $\dim(V) = 1$ и $D = \boldsymbol{Z}_2$. Это значит, что кольцо линейных преобразований End(V) порождается аддитивно своими обратимыми элементами. В 1958 году Скорняков [6] поставил задачу описания такого рода колец. В [7] Рафаэль, отвечая на вопрос Скорнякова, дал начало систематическому изучению таких колец, которые он назвал S-кольцами. Независимо от предыдущих работ к этой проблеме пришел Фукс. В [8] он сформулировал вопрос: «Когда автоморфизмы абелевой группы порождают аддитивно её кольцо эндоморфизмов?» За этим последовал ряд статей Стрингалла [9], Фридмана [10], Хилла [11] и Кастаньо [12]. В 1973 г. Хенриксен [13] описал два широких класса колец, порождаемых своими обратимыми элементами. Позже с этими кольцами работали Вамос [14] (он ввел понятие k-хорошего кольца), Сривастава [15]. Имеется несколько статей, посвященных различным k-хорошим кольцам. Так, например, в [14] и [15] получены результаты по k-хорошести регулярных колец фон Неймана, правых самоинъективных колец.

2. Одно условие *k*-хорошести произвольного кольца обобщенных матриц

Теорема 1. Кольцо K_n является k-хорошим, если все R_i – k-хорошие кольца для некоторого $k > 1$, $i = 1,\ldots,n$.

Доказательство. Пусть все R_i – k-хорошие кольца, $k > 1$, $i = 1,\ldots,n$ и $X \in K_n$. Запишем матрицу X в полном виде:

$$X = \begin{pmatrix} r_1 & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & r_2 & \ldots & m_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & r_n \end{pmatrix}.$$

Зададим матрицы A, B и C следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & m_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & r_n \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ m_{21} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $X=A+B+C$.

Так как все R_i – k-хорошие кольца, то

$$B = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^1 + u_1^2 + \ldots + u_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u_2^1 + u_2^2 + \ldots + u_2^k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u_n^1 + u_n^2 + \ldots + u_n^k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u_2^1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u_n^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u_2^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u_n^2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} u_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u_2^k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u_n^k \end{pmatrix} =$$

$$= U_1 + U_2 + \ldots + U_k,$$

где U_1, U_2, …, U_k – обратимые матрицы.

Определим теперь матрицы A' и C' следующим образом:

$$A' = A + U_1 = \begin{pmatrix} u_1^1 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ 0 & u_2^1 & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_n^1 \end{pmatrix},$$

$$C' = C + U_2 = \begin{pmatrix} u_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & u_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & u_n^2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что A' и C' – обратимые матрицы как треугольные матрицы с обратимыми элементами на главной диагонали.

Таким образом, имеем $X = A+B+C = A'+C'+U_3+\dots U_k$ – сумма k обратимых матриц.

Итак, K_n является k-хорошим кольцом. Что и требовалось доказать.

3. О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц

Через $\mathrm{M}(n, R)$ будем обозначать обычное кольцо квадратных матриц порядка n над кольцом R. Хенриксеном [5] было показано, что $\mathrm{M}(n, R)$ – 3-хорошее кольцо. А именно, он доказал, что всякая матрица из этого кольца представима в виде суммы диагональной и обратимой матриц. Диагональная же матрица всегда может быть записана как сумма двух обратимых матриц. Кольцо $\mathrm{M}(n, R)$, конечно, является кольцом обобщенных матриц. На главной диагонали матриц из $\mathrm{M}(n, R)$ находятся элементы кольца R. На остальных местах – элементы R–R-бимодуля R. Умножение задается с помощью тождественных гомоморфизмов.

Докажем, что обобщенная матрица также есть сумма диагональной и обратимой обобщенных матриц.

Доказательство следующей леммы элементарно.

Лемма 2. Пусть R – кольцо, $x \in R$, $p, q \in U(R)$ – множеству обратимых элементов кольца R. Если $p \cdot x \cdot q = 1$, то $x \in U(R)$ и $x^{-1} = q \cdot p$.

Лемма 3. Пусть U' – блочная матрица порядка 2 (обобщенная матрица порядка $n+1$)

$$U' = \begin{pmatrix} U & B \\ C & 1 + CU^{-1}B \end{pmatrix},$$

где U – обратимая обобщенная матрица порядка n, B – вектор-столбец длины n, C – вектор-строка длины n. Тогда U' – обратимая матрица и

$$(U')^{-1} = \begin{pmatrix} U^{-1} + (-U)^{-1}B(-C)U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Положим

$$P = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} \text{ и } Q = \begin{pmatrix} U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где E_n – единичная матрица кольца K_n обобщенных матриц порядка n. Убедимся, что P и Q – обратимые матрицы в кольце K_{n+1}.

Действительно, утверждаем, что

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} \text{ и } Q^{-1}=\begin{pmatrix} U & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем следующие равенства:

$$PP^{-1}=\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ CU^{-1} & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} E_n * E_n + 0*(CU^{-1}) & E_n*0+0*1 \\ (-CU^{-1})*E_n+1*(CU^{-1}) & (-CU^{-1})*0+1*1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}P=\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ CU^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} E_n * E_n + 0*(-CU^{-1}) & E_n*0+0*1 \\ (CU^{-1})*E_n+1*(-CU^{-1}) & (CU^{-1})*0+1*1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

И далее имеем равенства

$$QQ^{-1}=\begin{pmatrix} U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} U^{-1}*U+(-U^{-1}B)*0 & U^{-1}*B+(-U^{-1}B)*1 \\ 0*U+1*0 & 0*B+1*1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^{-1}Q=\begin{pmatrix} U & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} U*U^{-1}+B*0 & U*(-U)^{-1}B+B*1 \\ 0*U^{-1}+1*0 & 0*(-U)^{-1}B+1*1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем теперь обратимость матрицы U'. Вычислим произведение

$$PU'=\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & B \\ C & 1+CU^{-1}B \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} E_n*U+0*C & E_n*B+0*1+CU^{-1}B) \\ (-CU^{-1})*U+1*C & (-CU^{-1})*B+1*(1+CU^{-1}B) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=Q^{-1}.$$

Теперь имеем равенства

$$(P\cdot U')Q=Q^{-1}Q=E_{n+1}.$$

Итак, $(P\cdot U')Q=E_{n+1}$ и P, Q – обратимые матрицы в K_{n+1}. Тогда по лемме 2 U' – обратимая матрица и

$$(U')^{-1}=QP=\begin{pmatrix} U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} U^{-1}+(-U)^{-1}B(-C)U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 4. Любая матрица из K_n может быть записана как сумма диагональной и обратимой матриц.

Доказательство. Проведем индукцию по n. Так как $a = (a-1)+1$ для любого элемента a из любого кольца R, то теорема верна для $n=1$.

Пусть она верна для кольца K_n, для некоторого $n \geq 1$. Покажем, что она верна и для кольца K_{n+1}.

Пусть $X \in K_{n+1}$. Напомним, что

$$K_{n+1} = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1,n+1} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n+1,1} & M_{n+1,2} & \dots & R_{n+1} \end{pmatrix},$$

где $R_1, \ldots, R_{n+1}$ – некоторые кольца, M_{ij} – R_i–R_j-бимодуль, $i,j=1,\ldots,n+1$. Тогда можем записать

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & d \end{pmatrix},$$

где $A \in K_n$, B – вектор-столбец длины n, C– вектор-строка длины n, $d \in R_{n+1}$.

По предположению индукции A – сумма диагональной и обратимой матриц, $A = D+U$, где D – диагональная, U – обратимая матрицы.

Тогда если положить

$$D' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & d-1-CU^{-1}B \end{pmatrix},$$

$$U' = \begin{pmatrix} U & B \\ C & 1+CU^{-1}B \end{pmatrix},$$

то будет верно равенство $X = D'+U'$, где D' – диагональная матрица, U' – обратимая матрица (по лемме 3).

Что и требовалось доказать.

Таким образом, задача описания k-хороших колец обобщенных матриц сведена к задаче описания $(k-1)$-хороших диагональных матриц. В общем случае диагональная обобщенная матрица 2-хорошей не будет. Таким образом, встает вопрос – при каких условиях обеспечивается k-хорошесть диагональной обобщенной матрицы?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов П.А.*, *Туганбаев А.А.* Модули над кольцами формальных матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15. № 8. С. 145–211.
2. *Крылов П.А.* О группе K_0 кольца обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2013. Т. 52. № 3. С. 370–385.
3. *Tang G.*, *Zhou Y.* A class of formal matrix rings // Linear Algebra and Appl. 2013. V. 428. P. 4672–4688.
4. *Wolfson K.G.* An ideal theoretic characterization of the ring of all linear transformations // Amer. J. Math. 1953. V. 75. P. 358–386.
5. *Zelinsky D.* Every linear transformation is a sum of non-singular ones // Proc. Amer. Math. Soc. 1954. V. 5. P. 627–630.
6. *Skornyakov L.* Complemented modular lattices and regular rings. London: Oliver&Boyd, 1958. 182 p.

7. *Raphael R.M.* Rings which are generated by their units // J. Algebra. 1974. V. 28. P. 199–204.
8. *Fuchs L.* Recent results and problems on Abelian groups // Topics in Abelian groups (Proc. Sympos., New Mexico State University). 1962. Scott, Foresman, Chicago. P. 9–40.
9. *Stringall R.W.* Endomorphism rings of Abelian groups generated by automorphism groups // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1967. V. 18. P. 401–404.
10. *Freedman H.* On endomorphisms of primary Abelian groups // J. London Math. Soc. 1968. V. 43. P. 305–307.
11. *Hill P.* Endomorphism ring generated by units // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 141. P. 99–105.
12. *Castagna F.* Sums of automorphisms of a primary Abelian group // Pacific J. Math. 1968. V. 27. P. 463–473.
13. *Henriksen M.* Two classes of rings generated by their units // J. Algebra. 1974. V. 31. P. 182–193.
14. *Vamos P.* 2-good rings // Quart. J. Math. 2005. V. 56. P. 417–430.
15. *Srivastava A.K.* A survey of rings generated by units // Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse Mathatiques. 2010. V. 19. P. 203–213.

Статья поступила 03.06.2015 г.

Norbosambuev T.D. ON SUMS OF DIAGONAL AND INVERTIBLE FORMAL MATRICES

DOI 10.17223/19988621/36/4

This paper concerns properties of k-good formal matrix rings K_n of order n with rings R_1, R_2, …, R_n on the main diagonal and R_i-R_j-bimodules M_{ij} on other places. In the ring theory, various matrix rings play an important role. Above all I mean formal matrix rings. Formal matrix rings generalize a notion of matrix ring of order n over a given ring. Every ring with nontrivial idempotents is isomorphic to some formal matrix ring. The endomorphism ring of a decomposable module also is a formal matrix ring. The studies of such rings are quite useful for solving some problems on endomorphism rings of Abelian groups. In this paper I show that every matrix form K_n is the sum of diagonal matrix and invertible matrix. Also I give one condition when K_n is the k-good ring.

Keywords: ring, generalized matrix, formal matrix, k-good ring

NORBOSAMBUEV Tsyrendorji Dashatsyrenovich (Tomsk State University,
Tomsk, Russian Federation)
E-mail: NsTsdDts@yandex.ru

REFERENCES

1. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. Moduli nad kol'tsami formal'nykh matrits. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, 2009, vol. 15, no. 8, pp. 145–211. (in Russian)
2. Krylov P.A. O gruppe K_0 kol'tsa obobshchennykh matrits. *Algebra i logika*, 2013, vol. 52, no. 3, pp. 370–385. (in Russian)
3. Tang G., Zhou Y. A class of formal matrix rings. *Linear Algebra and Appl.*, 2013, vol. 428, pp. 4672–4688.
4. Wolfson K.G. An ideal theoretic characterization of the ring of all linear transformations. *Amer. J. Math.*, 1953, vol. 75, pp. 358–386.
5. Zelinsky D. Every linear transformation is a sum of non-singular ones. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1954, vol. 5, pp. 627–630.
6. Skornyakov L. *Complemented modular lattices and regular rings*. London, Oliver&Boyd, 1958. 182 p.
7. Raphael R.M. Rings which are generated by their units. *J. Algebra*, 1974, vol. 28, pp. 199–204.

8. Fuchs L. Recent results and problems on Abelian groups. *Topics in Abelian groups* (*Proc. Sympos.*, *New Mexico State University*). Scott, Foresman, Chicago, 1962, pp. 9–40.
9. Stringall R.W. Endomorphism rings of Abelian groups generated by automorphism groups. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 1967, vol. 18, pp. 401–404.
10. Freedman H. On endomorphisms of primary Abelian groups. *J. London Math. Soc.*, 1968, vol. 43, pp. 305–307.
11. Hill P. Endomorphism ring generated by units. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, vol. 141, pp. 99–105.
12. Castagna F. Sums of automorphisms of a primary Abelian group. *Pacific J. Math.*, 1968, vol. 27, pp. 463–473.
13. Henriksen M. Two classes of rings generated by their units. *J. Algebra*, 1974, vol. 31, pp. 182– 193.
14. Vamos P. 2-good rings. *Quart. J. Math.*, 2005, vol. 56, pp. 417–430.
15. Srivastava A.K. A survey of rings generated by units. *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse Mathatiques*, 2010, vol. 19, pp. 203–213.