

УДК 531.62
DOI 10.17223/19988621/36/9

Ю.И. Дорогов

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕПЯТСТВИЙ ВЫПУЧИВАНИЮ

Исследуется потеря устойчивости прямолинейного упругого стержня при наличии препятствий выпучиванию и различных способах закрепления концов стержня. В качестве физических препятствий рассмотрены поперечные силы и моменты. В качестве геометрического препятствия рассматриваются жёсткие стенки, расположенные вблизи стержня. Показано, что поперечные силы и моменты оказывают существенное влияние на значение критической силы. Установлена величина критической силы, при которой происходит вторичная потеря устойчивости стержня, расположенного вблизи абсолютно жёсткой стенки.

Ключевые слова: *устойчивость стержня, изопериметрическое условие, потеря устойчивости.*

1. Введение

В данной работе исследуется устойчивость прямолинейного упругого стержня длины L , сжимаемого продольной силой P , при наличии препятствий выпучиванию. Рассматриваются два типа препятствий: физические и геометрические. К физическим препятствиям отнесена сосредоточенная сила F , приложенная в срединном или концевом сечениях и противодействующая изгибу стержня при потере устойчивости, а также распределённая по длине стержня нагрузка с интенсивностью q и моменты M , приложенные на концах стержня. В качестве геометрических препятствий рассматриваются жёсткие стенки, расположенные вблизи стержня и мешающие изгибу стержня при потере устойчивости. Предполагается, что стенки абсолютно жёсткие и смещение стержня за их пределы невозможно.

Рассматриваются стержни с шарнирными и заделанными закреплениями концов. При этом один конец стержня остаётся неподвижным при изгибе вследствие потери устойчивости, а другой смещается. Длина l проекции стержня на его прямолинейную первоначальную ось изменяется в процессе изгиба стержня. Граничные условия, выражающие условия закрепления стержня, устанавливаются в соответствии с этим изменением.

При решении задачи используются линейные дифференциальные уравнение 3-го и 4-го порядков. При этом краевые задачи имеют решения, определённые лишь с точностью до некоторого неопределённого множителя [1–4]. Для определения этого множителя используется изопериметрическое условие [5], выражающее неизменность длины стержня при изгибе.

Стержень с грузом и упругой опорой посередине рассматривался в [6]. Устойчивость тяжёлого горизонтального стержня, лежащего на абсолютно жёсткой поверхности исследовалась в [7]. Различные случаи препятствий и несовершенств закреплений представлены в [8–14].

2. Стержень на двух шарнирных опорах

Рассмотрим стержень, шарнирно опёртый на концах (рис. 1) и сжимаемый продольной силой P . В середине пролёта к стержню приложена сосредоточенная сила F .

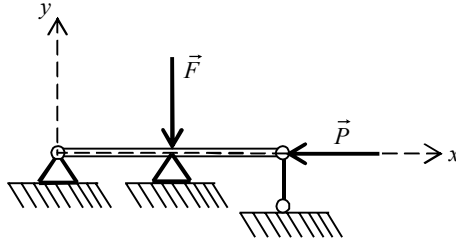


Рис. 1

Традиционно при исследовании стержня на устойчивость под действием продольной и поперечной сил полагают, что поперечная сила направлена в сторону выпуклости стержня и способствует потере устойчивости и последующему изгибу. Строго говоря, в этом случае, стержень изогнут уже при самых малых значениях поперечной силы F . Это задача о продольно-поперечном изгибе стержня, а не задача об устойчивости прямолинейной формы равновесия.

Для исследования устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня предположим, что стержень изгибается в сторону, противоположную направлению действия поперечной силы F . Такой изгиб становится возможным, если среднее сечение подпирается с противоположной стороны жёсткой опорой, например стенкой, которая препятствует изгибу стержня в её направлении. Стержень может изгибаться только в противоположную от стенки сторону. В этом случае стержень остаётся прямолинейным при начальных значениях продольной сжимающей силы. Так как поперечная сила F противодействует изгибу, то критическая сила превосходит значение силы Эйлера.

Поместим начало системы координат в неподвижной опоре. Ось Ox совместим с неизогнутой осью стержня и направим в сторону подвижного конца, а ось Oy направим перпендикулярно оси Ox в сторону выпуклости стержня.

Рассмотрим условия, при которых становится возможной изогнутая форма равновесия. На концах стержня действуют реакции опор R . Уравнение равновесия моментов имеет вид

$$EJy'' + Py - Rx = 0 \quad \text{при } x \leq \frac{l}{2},$$

$$EJy'' + Py - Rx + F\left(x - \frac{l}{2}\right) = 0 \quad \text{при } x > \frac{l}{2}.$$

Здесь E – модуль упругости материала стержня; J – минимальное значение момента инерции поперечного сечения стержня.

Дифференцируя оба уравнения дважды, приведём их к линейному дифференциальному уравнению четвёртого порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'''' + \alpha^2 y'' = 0. \quad (1)$$

Здесь $\alpha = \sqrt{P/EJ}$ – коэффициент.

При этом граничные условия, определяемые условиями закрепления, запишутся в виде

$$y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0. \quad (2)$$

Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x.$$

Нетривиальное частное решение дифференциального уравнению (1), удовлетворяющее граничным условиям (2), становится возможным при $\alpha = \pi/l$ и определяется с точностью до произвольного постоянного коэффициента C .

$$y(x) = C \sin \alpha x. \quad (3)$$

Неизвестный коэффициент C определим из условия постоянства длины изогнутой оси стержня

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + (y')^2} dx = \text{const}.$$

Полагая, что на начальном этапе процесса потери устойчивости $y'(x) \ll 1$, разложим подынтегральное выражения в ряд Маклорена с двумя первыми членами:

$$L \approx \int_0^l \left[1 + \frac{(y')^2}{2} \right] dx. \quad (4)$$

Подставляя производную функции (3) в подынтегральное выражение, после интегрирования и преобразования получим

$$C(l) = \frac{2}{\pi} \sqrt{l(L-l)}. \quad (5)$$

Таким образом, уравнение изогнутой оси

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{l(L-l)} \sin \frac{\pi x}{l},$$

и изогнутая форма равновесия стержня становится возможной при значении нагрузки

$$P_e = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (6)$$

Значение нагрузки (6) остаётся неопределённым, так как не определена длина проекции l , при которой происходит потеря устойчивости.

Линейная плотность упругой энергии стержня в сжато-изогнутом состоянии

$$\tau = \frac{P^2}{2ES} + \frac{EJ(y'')^2}{2}.$$

Здесь S – площадь поперечного сечения стержня.

Интегрируя последнее выражение по длине стержня, получим значение упругой энергии, накопленной стержнем в изогнутом состоянии:

$$W = \frac{P_e^2 L}{2ES} + P_e (L-l).$$

При отсутствии поперечных нагрузок работа сжимающей силы P равна упругой энергии сжато-изогнутого стержня $A_p = W$. Поэтому при действии поперечной силы F , препятствующей изгибу, суммарная работа сил P и F оказывается меньше, чем необходимая упругая энергия стержня. Работы сжимающей силы оказывается недостаточно для изгиба стержня и преодоления действия поперечной силы. Дополнительная упругая энергия должна быть накоплена в стержне на этапе его сжатия, то есть до потери устойчивости.

Работа поперечной сосредоточенной силы F

$$A_F = -Fy\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{2F}{\pi}\sqrt{l(L-l)} \approx -\frac{2F}{\pi}\sqrt{L(L-l)},$$

так как потеря устойчивости происходит при значении $l \approx L$.

Предположим, что стержень нагружается перемещением до значения абсолютной деформации равного Δx . После смены прямолинейной формы равновесия стержня на изогнутую форму смещение концов стержня не изменится. Это смещение равно сумме деформации сжатия стержня εL , оставшейся после изгиба стержня, и смещения конца стержня $L-l$, возникшей в результате изгиба:

$$\Delta x = \varepsilon L + L - l.$$

Здесь $\varepsilon = P_e / (ES)$ – относительная остаточная деформация сжатия стержня.

С учётом этого и согласно закону Гука, сжимающая сила

$$P = \frac{ES\Delta x}{L} = P_e + ES \frac{(L-l)}{L}. \quad (7)$$

Работа сжимающей силы P равна

$$A_p = \frac{P\Delta x}{2} = \frac{P_e^2 L}{2ES} + P_e(L-l) + \frac{ES}{2L}(L-l)^2.$$

Работа внешних сил равна упругой энергии, накопленной стержнем, то есть

$$A_p + A_F = W. \quad (8)$$

Подставляя в последнее равенство найденные выражения для A_p, A_F, W , преобразуем его к виду

$$L-l = L \left(\frac{4F}{\pi ES} \right)^{2/3}.$$

Подставляя полученное значение $L-l$ в формулу (7), после преобразования получим

$$P = P_e + \sqrt[3]{\left(\frac{4F}{\pi} \right)^2 ES}. \quad (9)$$

При точечной подпорке в середине пролёта возможен двусторонний изгиб стержня, при котором конфигурация изогнутой оси стержня становится двояковыпуклой. Стержень изгибается так, как будто он закреплён шарнирно в срединном сечении. Потеря устойчивости стержня с последующим двусторонним изгибом оси, становится возможной при значении сжимающей силы равном $4P_e$. Для определения пограничного значения поперечной силы, при котором потеря устойчивости стержня происходит с последующим двусторонним изгибом стержня, приравняем выражение (9) значению $4P_e$ и разрешим полученное уравнение отно-

сительно F . После преобразования получим

$$F = \frac{3\sqrt{3}\pi^2}{4\Lambda} P_e. \quad (10)$$

Здесь $\Lambda = L/i$ – гибкость стержня, $i = \sqrt{J/S}$ – минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня.

Значение поперечной силы (10) может быть использовано для оценки нижней границы реакции срединной опоры при потере устойчивости стержня, закреплённого тремя шарнирными опорами.

Рассмотрим стержень, опирающийся всей своей длиной на абсолютно жёсткую плоскость и закреплённый на концах при помощи шарниров. В случае, когда поперечная нагрузка распределена по длине стержня с интенсивностью q (рис. 2), уравнение моментов имеет вид

$$EJy'' + \frac{qx^2}{2} - Rx + Py = 0.$$

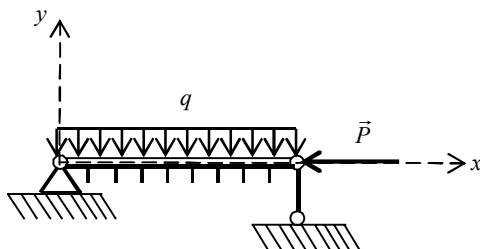


Рис. 2

Дифференцируя уравнение моментов дважды по переменной x , перепишем его в виде

$$y^{(4)} + \alpha^2 y'' + \beta = 0. \quad (11)$$

Здесь $\beta = q/EJ$. Граничные условия, определяемые условиями закрепления, запишутся в виде (2).

Общее решение дифференциального уравнения (11) имеет вид

$$y(x) = -\frac{\beta x^2}{2\alpha^2} + C_1 x + C_2 + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x.$$

Вычисляя производную второго порядка и подставляя выражение для прогибов и их вторую производную в граничные условия (2), после преобразования получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_1 = 0, 5\beta l \alpha^{-2}, \quad C_2 = -C_3 = \beta \alpha^{-4}, \\ \beta \alpha^{-4} (1 - \cos \alpha l) + C_4 \sin \alpha l = 0. \end{aligned} \right\}$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$\sin \frac{\alpha l}{2} \left(\beta \alpha^{-4} \sin \frac{\alpha l}{2} + C_4 \cos \frac{\alpha l}{2} \right) = 0.$$

Отсюда либо $\alpha l = 2\pi k$, либо $C_4 = -\beta \alpha^{-4} \operatorname{tg}(\alpha l/2)$.

В первом случае, при $\alpha = 2\pi k/l$, минимальное значение критической силы равно $P = 4P_e$. Это значение получается при $k = 1$.

Во втором случае для прогибов получаем формулу

$$y(x) = \frac{\beta x(l-x)}{2\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha^4}(1 - \cos \alpha x) - \frac{\beta}{\alpha^4} \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha x.$$

При $\alpha l \leq \pi$ стержень остаётся прямолинейным и $y(x) = 0$. При $\alpha l \rightarrow \pi + 0$ первыми двумя слагаемыми можно пренебречь по сравнению со слагаемым $-\beta \alpha^{-4} \operatorname{tg}(\alpha l/2) \sin \alpha x$, которое становится бесконечно большим. Поэтому уравнение изогнутой оси стержня может быть принято в виде (3). При этом коэффициент C определяется формулой (5).

Работа распределённой нагрузки

$$A_q = \int_0^l qy(x) dx = \frac{qC}{\alpha}(1 - \cos \alpha l) = \frac{2qlC}{\pi} \approx \frac{4qL^{3/2}}{\pi^2}(L-l)^{1/2}.$$

Составим уравнение энергетического баланса (8) и преобразуем его к виду

$$L-l = 4L^{5/3} \left(\frac{q}{\pi^2 ES} \right)^{2/3}.$$

Тогда для критической силы получим

$$P = P_e + 4\sqrt[3]{\frac{(qL)^2 ES}{\pi^4}}.$$

Здесь P_e – сила Эйлера для стержня с шарнирно закреплёнными концами, определяемая формулой (6).

В случае, когда на концах стержня приложены одинаковые моменты, препятствующие повороту концевых сечений, дифференциальное уравнение изгиба имеет вид (1). При этом граничные условия, определяемые условиями закрепления, запишутся в виде

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y''(0) = y''(l) = \frac{M}{EJ}. \quad (12)$$

Нетривиальное частное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (12) становится возможным при $\alpha = \pi/l$ и определяется формулой (3) с точностью до произвольного постоянного коэффициента C .

Коэффициент C , определённый из условия постоянства длины изогнутой оси стержня (4), также выражается формулой (5).

Повторим вышеизложенные рассуждения об энергии. Составляя уравнение энергетического баланса, преобразуем его к виду

$$L-l = 4L^{1/3} \left(\frac{M}{ES} \right)^{2/3}.$$

Тогда

$$P = P_e + 4\sqrt[3]{\frac{M^2 ES}{L^2}}.$$

Здесь P_e – сила Эйлера для стержня с шарнирно закреплёнными концами, определяемая формулой (6).

3. Стержень с заделанными концами

Рассмотрим стержень с одним заделанным и одним свободным концом. К свободному концу стержня приложены две сосредоточенные силы: продольная сила P и поперечная сила F , направленная перпендикулярно к P (рис. 3).

Выберем подвижную систему координат с началом в свободном конце. Ось Ox направим параллельно первоначальной неизогнутой оси стержня в сторону заделанного конца, а ось Oy направим перпендикулярно оси Ox в сторону, противоположную смещению свободного конца (рис. 3).

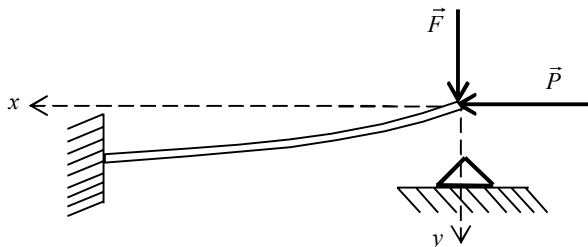


Рис. 3

Уравнение моментов запишется в виде

$$y''' + \alpha^2 y' - \beta = 0. \quad (13)$$

Здесь $\beta = F/EJ$.

Граничные условия, соответствующие условиям закрепления,

$$y(0) = y''(0) = y'(l) = 0. \quad (14)$$

Общее решение дифференциального уравнения (13) имеет вид

$$y(x) = C_1 + \frac{\beta}{\alpha^2} x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x.$$

Граничным условиям (14) удовлетворяет решение

$$y(x) = \frac{\beta}{\alpha^2} x + C_4 \sin \alpha x, \quad (15)$$

где $C_4 = -\frac{\beta}{\alpha^3 \cos \alpha l}$.

Физическому смыслу задачи отвечают положительные значения прогибов y , которые становятся возможными при значениях нагрузки, соответствующих неравенству $\alpha l > \pi/2$. Следовательно, изогнутая форма равновесия стержня становится возможной при нагрузке, соответствующей значению $\alpha l = \pi/2$. При этом критическое значение нагрузки равно $0,25P_e$.

При значениях величины αl , близких к значению $\pi/2$, коэффициент C_4 становится неограниченно большим. Первым конечным слагаемым в выражении (15) можно пренебречь в сравнении со вторым бесконечным слагаемым и принять выражение прогибов в виде (3) при соответствующем значении $\alpha = \pi/2l$.

Неограниченность прогибов является следствием применения линеаризованного дифференциального уравнения прогибов, при составлении которого кривизна изогнутой оси стержня заменялась второй производной y'' от функции прогибов. На практике прогибы не могут быть бесконечными, так как длина стержня остаётся почти неизменной. Полученный результат, скорее, позволяет пренебречь конечными слагаемыми в выражении (15) и представить конфигурацию изогнутой оси стержня, на начальном этапе изгиба, в виде синусоиды

$$y(x) = C \sin \frac{\pi x}{2l}. \quad (16)$$

Неопределённый коэффициент C найдём из условия (4). Для функции прогибов $y(x)$, определяемой выражением (16), получим

$$C(l) = \frac{4}{\pi} \sqrt{l(L-l)}. \quad (17)$$

Повторим рассуждения второй главы и составим уравнение энергетического баланса (8). Выражая из получающегося уравнения $L-l$ и подставляя найденную разность в формулу (7), после преобразования получим

$$P = 0,25P_e + 4\sqrt[3]{\frac{F^2 ES}{\pi^2}}.$$

Рассмотрим стержень с двумя заделанными концами, в срединном сечении которого приложена сосредоточенная сила F . В этом случае дифференциальное уравнение изгиба имеет вид (1). При этом граничные условия, определяемые условиями закрепления (рис. 4), запишутся в виде

$$y(0) = y(l) = y'(0) = y'(l) = 0. \quad (18)$$

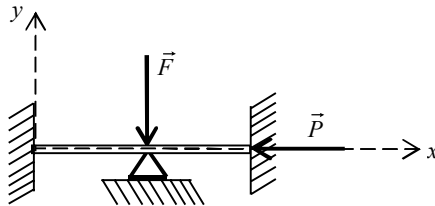


Рис. 4

Нетривиальное частное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (18), становится возможным при $\alpha = 2\pi/l$ и определяется с точностью до произвольного постоянного коэффициента C :

$$y(x) = C(1 - \cos \alpha x).$$

Неизвестный коэффициент C , определённый из условия постоянства длины изогнутой оси стержня (4), равен

$$C(l) = \frac{1}{\pi} \sqrt{l(L-l)}. \quad (19)$$

Составим уравнение энергетического баланса (8) и преобразуем его к виду

$$L - l = L \left(\frac{2F}{\pi ES} \right)^{2/3}.$$

Тогда

$$P = 4P_e + 3 \sqrt[3]{\frac{4F^2 ES}{\pi^2}}.$$

4. Потеря устойчивости стержня вблизи жёсткой стенки

Рассмотрим прямолинейный стержень, закреплённый шарнирно на малом расстоянии δ от жёсткой стенки и параллельный ей (рис. 5). При значении силы равном силе Эйлера стержень отклонится от прямолинейного положения и, изгибаясь, упрётся в жёсткую стенку. Предполагается, что при потере устойчивости, стержень начнёт отклоняться в сторону стенки. Вначале стержень коснётся стенки в крайних точках срединного сечения. По мере увеличения прогиба область контакта стержня и стенки начнёт увеличиваться. При этом часть стержня, касающегося стенки, остаётся прямолинейной. При некотором критическом значении нагрузки прямолинейная часть стержня вновь изогнётся и стержень оторвётся от стенки, изгибаясь по всей длине в противоположную сторону. Происходит вторичная потеря устойчивости стержня.

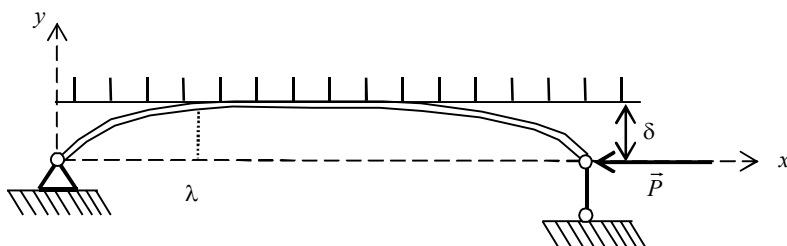


Рис. 5

Кроме продольной сжимающей силы P на стержень действуют сосредоточенные поперечные реакции со стороны шарнирных опор и распределённая реакция со стороны жёсткой стенки.

Обозначим абсцисс сечения стержня, ближайшего к началу координат и касающегося стенки, через λ . Тогда длина области контакта стержня и стенки равна $l - 2\lambda$.

Дифференциальное уравнение изгиба стержня на участке $x \in [0, \lambda]$ может быть записано в виде (1). Граничные условия для данного участка запишутся в виде

$$y(0) = y''(0) = 0, \quad y(\lambda) = \delta, \quad y'(\lambda) = 0. \quad (20)$$

Предполагая, что стержень прямолинеен по всему участку контакта со стенкой, получим дополнительное условие

$$y''(\lambda) = 0. \quad (21)$$

Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1) в граничные условия (20) и (21), получим систему уравнений относительно произвольных по-

стоянных C_1, C_2, C_3, C_4 . Нетривиальное решение этой системы возможно, если

$$\alpha\lambda = \pi. \quad (22)$$

При этом $C_1 = \frac{\delta}{\lambda}$, $C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 1$.

Уравнение изогнутой оси стержня

$$y(x) = \frac{\delta}{\lambda}x + \sin \alpha x.$$

Учитывая определение коэффициента α , из условия (22) найдём выражение зависимости сжимающей силы P и координаты λ :

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{\lambda^2}, \quad (23)$$

или $\lambda = \pi\sqrt{\frac{EJ}{P}}.$ (24)

Рассматривая устойчивость прямолинейного участка стержня, соприкасающегося с жёсткой стенкой, найдём критическое значение силы, при котором начнётся изгиб этого участка и его отрыв от стенки. Это значение определяется формулой Эйлера для данного участка

$$P = \frac{4\pi^2 EJ}{(l - 2\lambda)^2}. \quad (25)$$

Приравняв выражения силы, определяемые формулами (23) и (25), найдём λ из полученного уравнения

$$\lambda = \frac{l}{4}.$$

Тогда критическое значение сжимающей силы, при котором произойдёт вторичная потеря устойчивости и отрыв стержня от стенки,

$$P = \frac{16\pi^2 EJ}{l^2} = 16P_e.$$

Рассмотрим стержень, находящийся посередине между двумя жёсткими стенками. Когда сжимающая сила достигнет критического значения равного $16P_e$, стержень начнёт отрываться от стенки и менять форму равновесия с односторонней выпуклостью на форму равновесия с двусторонней выпуклостью. Одна половина стержня останется выпуклой в ту же сторону, в которую стержень был изогнут до достижения критической силы, а другая половина стержня изогнётся в противоположную сторону.

При дальнейшем увеличении сжимающей силы наступит момент, когда установившаяся конфигурация изогнутой оси стержня с двумя полуволнами перестанет быть устойчивой и стержень сменит её на конфигурацию с тремя полуволнами. Выясним, при каком значении сжимающей силы это произойдёт.

Для крайнего изогнутого участка стержня $x \in [0, \lambda]$ справедливы те же граничные условия (20), (21) и уравнение изогнутой оси стержня имеет вид (1). При этом значение сжимающей силы P и координаты λ связаны соотношениями (23), (24).

В силу симметрии, участки стержня с односторонней выпуклостью имеют одинаковую длину. Рассматривая устойчивость прямолинейного участка, касающегося жёсткой стенки, для критической силы, при которой происходит потеря устойчивости установившейся двусторонней конфигурации изогнутой оси стержня, получим

$$P = \frac{4\pi^2 EJ}{\left(\frac{l}{2} - 2\lambda\right)^2}. \quad (26)$$

Приравнявая значения силы P , определяемые по формулам (23) и (26), получим уравнение относительно λ , из которого найдём $\lambda = l/8$.

Подставляя λ в формулу (23), найдём значение критической силы, при котором изогнутая форма стержня с двумя полуволнами потеряет устойчивость:

$$P = \frac{64\pi^2 EJ}{l^2} = 64P_e.$$

Аналогично, далее найдём значение критической силы, при котором форма равновесия изогнутой оси стержня с n полуволнами перестает быть устойчивой и стержень принимает форму равновесия с $n+1$ полуволнами:

$$P = \frac{16n^2\pi^2 EJ}{l^2} = 16n^2 P_e.$$

В случае жёсткого закрепления граничные условия для части стержня, соответствующей $x \in [0, \lambda]$, запишутся в виде

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(\lambda) = \delta, \quad y'(\lambda) = 0.$$

Справедливо также дополнительное граничное условие, выражающее условие прямолинейности стержня на участке контакта со стенкой

$$y''(\lambda) = 0.$$

Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1) в эти граничные условия, получим

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= C_2 + C_3 = 0, \\ y'(0) &= C_1 + \alpha C_4 = 0, \\ y(\lambda) &= C_1\lambda + C_2 + C_3 \cos \alpha\lambda + C_4 \sin \alpha\lambda = \delta, \\ y'(\lambda) &= C_1 - \alpha C_3 \sin \alpha\lambda + \alpha C_4 \cos \alpha\lambda = 0, \\ y''(\lambda) &= -\alpha^2 C_3 \cos \alpha\lambda - \alpha^2 C_4 \sin \alpha\lambda = 0. \end{aligned} \right\}$$

Выражая C_1, C_3 из первых двух уравнений системы через C_2, C_4 и подставляя их в последние три уравнения системы, преобразуем систему к виду

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= -C_2, \quad C_1 = -\alpha C_4, \\ C_2(1 - \cos \alpha\lambda) - C_4(\alpha\lambda - \sin \alpha\lambda) &= \delta, \\ C_2 \sin \alpha\lambda - C_4(1 - \cos \alpha\lambda) &= 0, \\ C_2 \cos \alpha\lambda - C_4 \sin \alpha\lambda &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Нетривиальное решение полученной системы возможно, если

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha \lambda & \cos \alpha \lambda - 1 \\ \cos \alpha \lambda & -\sin \alpha \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

то есть $\cos \alpha \lambda = 1$ или $\alpha \lambda = 2\pi$. При этом значение сжимающей силы

$$P = \frac{4\pi^2 EJ}{\lambda^2}. \quad (27)$$

Коэффициенты $C_1 = \delta/\lambda$, $C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = -\delta/\alpha\lambda$.

Уравнение изогнутой оси стержня на участке $x \in [0, \lambda]$

$$y(x) = \frac{\delta}{\lambda}x - \frac{\delta}{\alpha\lambda} \sin \alpha x.$$

Рассмотрим устойчивость прямолинейного участка стержня, соприкасающегося со стенкой. Критическая сила, при которой этот участок потеряет устойчивость прямолинейной формы, выражается формулой (25). Приравнявая значения критической силы, получаемые по формулам (25), (27) и разрешая полученное уравнение относительно λ , найдём $\lambda = l/3$. Тогда значение критической силы, при которой произойдёт вторичная потеря устойчивости, равно

$$P = \frac{36\pi^2 EJ}{l^2} = 36P_e.$$

Выводы

1. Предложенный метод позволяет учитывать влияние поперечных сил и моментов, препятствующих выпучиванию стержня при потере устойчивости, на критическую силу, при которой происходит потеря устойчивости. Показано, что поперечные и моментные нагрузки оказывают существенное влияние на значение критической силы.

2. Получено значение критической силы, при которой происходит вторичная потеря устойчивости стержня, расположенного вблизи абсолютно жёсткой стенки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней пластин и оболочек. М.: Наука, 1971.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
5. Дорогов Ю.И. Применение изопериметрического условия в задачах потери устойчивости стержня // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 4(30). С. 71–81.
6. Дорогов Ю.И. Потеря устойчивости горизонтального стержня с грузом и упругой опорой посередине // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 2 С. 31–39.
7. Дорогов Ю.И. Об устойчивости горизонтального стержня, лежащего на жёстком основании // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 1 С. 58–65.
8. Дорогов Ю.И. Об устойчивости формы незакрепленного упругого стержня с жёсткими полками на концах // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 462–473.

9. Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня с жесткими окончаниями // Строительная механика и расчет сооружений. 2013. № 3 С. 16–21.
10. Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня с искривленными торцами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. № 2. С. 255–266.
11. Дорогов Ю.И. Устойчивость упругого стержня с разрушающейся опорой // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. № 1. С. 84–96.
12. Дорогов Ю.И. Продольный изгиб стержня с разрушающимися заделками // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. № 4. С. 575–586.
13. Дорогов Ю.И. О нисходящей ветви диаграммы деформирования // Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. № 2. С. 281–288.
14. Дорогов Ю.И. О потере устойчивости абсолютно жесткого стержня с разрушающейся опорой // Механика композиционных материалов и конструкций. 2006. № 3. С. 300–311.

Статья поступила 07.05.2015 г.

Dorogov Yu. I. STABILITY OF A COLUMN IN THE PRESENCE OF OBSTACLES TO BUCKLING

DOI 10.17223/19988621/36/9

Loss of stability of the rectilinear elastic column in the presence of obstacles to a buckling is investigated. Various ways of fixing the ends of the column are considered. For the physical obstacles, transverse forces and the moments are considered. As a geometrical obstacle, the rigid walls located near the column are considered. It is shown that transverse forces and the moments have essential impact on value of critical force. The critical force with at which there occurs a secondary loss of stability of the column located near absolutely rigid wall is established.

Keywords: buckling of a column, isoperimetric condition, loss of stability

DOROGOV Yury Ivanovich (Candidate of Technical Sciences, Branch of Moscow Power Engineering Institute (National Research University, Volzhskiy, Russian Federation)
E-mail: ydorogov@yandex.ru

REFERENCES

1. Timoshenko S.P. *Ustoychivost' sterzhney plastin i obolochek*. Moscow, Nauka Publ., 1971. (in Russian)
2. Vol'mir A.S. *Ustoychivost' deformiruemyykh sistem*. Moscow, Nauka Publ., 1967. (in Russian)
3. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. *Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh sistem*. Moscow, Nauka Publ., 1987. (in Russian)
4. Rabortnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela*. Moscow, Nauka Publ., 1988. (in Russian)
5. Dorogov Yu.I. Primenenie izoperimetriceskogo usloviya v zadachakh poteri ustoychivosti sterzhnya. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2014, no. 4(30), pp. 71–81. (in Russian)
6. Dorogov Yu.I. Poterya ustoychivosti gorizontalnogo sterzhnya s gruzom i uprugoy oporoy posredine. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, 2014, no. 2 S. 31–39. (in Russian)
7. Dorogov Yu.I. Ob ustoychivosti gorizontalnogo sterzhnya, lezhashchego na zhestkom osnovanii. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, 2015, no. 1 S. 58–65. (in Russian)
8. Dorogov Yu. I. The stability of the shape of an unattached elastic rod with stiff flanges on its ends. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, no. 3, pp. 338–345.
9. Dorogov Yu.I. Ustoychivost' sterzhnya s zhestkimi okonchaniyami. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, 2013, no. 3 S. 16–21. (in Russian)
10. Dorogov Yu.I. Ustoychivost' sterzhnya s iskrivlennymi tortsami. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*, 2012, no. 2, pp. 255–266. (in Russian)
11. Dorogov Yu.I. Ustoychivost' uprugogo sterzhnya s razrushayushchey oporoy. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*, 2010, no. 1, pp. 84–96. (in Russian)

12. Dorogov Yu.I. Prodol'nyy izgib sterzhnya s razrushayushchimisya zadelkami. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*, 2010, no. 4, pp. 575–586. (in Russian)
13. Dorogov Yu.I. O niskhodyashchey vetvi diagrammy deformirovaniya. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*, 2009, no. 2, pp. 281–288. (in Russian)
14. Dorogov Yu.I. O potere ustoychivosti absolyutno zhestkogo sterzhnya s razrushayushcheysya oporoy. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*, 2006, no. 3, pp. 300–311. (in Russian)