

А.А. Калягин, Л.А. Нежелская

**СРАВНЕНИЕ МП- И ММ-ОЦЕНОК ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ  
В ОБОБЩЕННОМ ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ**

*Работа выполнена в рамках государственного заказа Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Национальном исследовательском Томском государственном университете на 2014–2016 годы.*

Изучается обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок в цифровых сетях интегрального обслуживания. Поток функционирует в условиях непродлевающегося мертвого времени, когда длительность мертвого времени – неизвестная фиксированная величина. Проводится сравнение качества получаемых (по наблюдениям за моментами наступления событий потока) оценок длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия (МП-оценки) и методом моментов (ММ-оценки).

**Ключевые слова:** обобщенный полусинхронный поток событий; непродлевающееся мертвое время; МП-оценки; ММ-оценки; длительность мертвого времени.

Настоящая статья является непосредственным продолжением исследований обобщенного полусинхронного потока событий (далее – поток), начатых в статьях [1–5]. Изучаемый поток относится к классу дважды стохастических потоков событий и является одной из адекватных математических моделей информационных потоков сообщений, функционирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦСИО) [6]. Дважды стохастические потоки делятся на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Вторым класс потоков в настоящее время принято называть МС-потоками либо МАР-потоками событий. В [7] приведена классификация МС-потоков событий и установлена связь между МС-потоками и МАР-потоками событий. Наиболее полная литература по изучаемым типам МС-потоков приведена в [1, 8].

В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще не известны, либо (что еще более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. В подобных случаях наиболее рациональным является применение адаптивных систем массового обслуживания, которые в процессе функционирования оценивают неизвестные параметры либо состояния входящих потоков событий и изменяют дисциплины обслуживания в соответствии с полученными оценками [9]. Вследствие этого возникают задачи оценки состояний [10, 11] и оценки параметров [12, 13] потока по наблюдениям за моментами наступления событий.

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [14], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В качестве примера приведем CSMA/CD – протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта, широко используемого в компьютерных сетях. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

Для того чтобы оценить потери сообщений потока, возникающие из-за эффекта мертвого времени, необходимо оценить его длительность.

Подчеркнем, что задачи оценки параметров и длительности мертвого времени рассматривались в статьях [15–18] в рамках полусинхронного потока событий, который является частным случаем обобщенного полусинхронного потока событий, изучаемого в настоящей статье.

Для оценки длительности мертвого времени, как правило, используются два метода оценивания: метод максимального правдоподобия [19, 20] и метод моментов [16, 17]. На основании сравнения [21] по тем или иным критериям получаемых МП-оценок и ММ-оценок делается вывод о применимости в конкретных условиях упомянутых методов.

В настоящей статье производится сравнение оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий, полученных методом моментов и методом максимального правдоподобия.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный полусинхронный поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный процесс  $\lambda(t)$  с двумя состояниями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ ). В течение временного интервала, когда  $\lambda(t) = \lambda_i$ , имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ . Переход из первого состояния процесса  $\lambda(t)$  во второе возможен только в момент наступления события, при этом переход осуществляется с вероятностью  $p$  ( $0 < p \leq 1$ ); с вероятностью  $1 - p$  процесс  $\lambda(t)$  остается в первом состоянии. Тогда длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  в первом состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения  $F_1(\tau) = 1 - e^{-p\lambda_1\tau}$ . Переход из второго состояния процесса  $\lambda(t)$  в первое может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону:  $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$ . При переходе процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое инициируется с вероятностью  $\delta$  ( $0 \leq \delta \leq 1$ ) дополнительное событие. При этом блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \begin{vmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ (1-\delta)\alpha & -(\lambda_2 + \alpha) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \delta\alpha & \lambda_2 \end{vmatrix} = \|D_0 | D_1\|.$$

Элементами матрицы  $D_1$  являются интенсивности переходов процесса  $\lambda(t)$  из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы  $D_0$  – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы  $D_0$  – интенсивности выхода процесса  $\lambda(t)$  из своих состояний, взятые с противоположенным знаком.



Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

В сделанных предположениях  $\lambda(t)$  – скрытый марковский процесс. После каждого зарегистрированного в момент времени  $t_k$  события наступает время фиксированной длительности  $T$  (мертвое время), в

течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. События, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода (непродлеваемое мертвое время). По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени  $T$  и т.д. Вариант возникающей ситуации показан на рис. 1, где 1, 2 – состояния случайного процесса  $\lambda(t)$ ; дополнительные события, которые могут наступать в момент перехода процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое, помечены буквой  $\delta$ ; штриховка – периоды мертвого времени длительности  $T$ ;  $t_1, t_2, \dots$  – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

Подчеркнем, что если  $\delta = 0$ , то имеет место обычный полусинхронный поток событий [15–18]. Отметим также, что в соответствии с классификацией МАР-потоков событий, приведенной в [7], обобщенный полусинхронный поток относится к классу МАР-потоков событий второго порядка.

Процесс  $\lambda(t)$  и типы событий (события пуассоновских потоков и дополнительные события) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий  $t_1, t_2, \dots$  наблюдаемого потока. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения  $(t_0, t)$ , где  $t_0$  – начало наблюдений,  $t$  – окончание наблюдений, пренебрегаем. Необходимо в момент окончания наблюдений (в момент времени  $t$ ) осуществить методом максимального правдоподобия и методом моментов оценку  $\hat{T}$  длительности мертвого времени и произвести сравнение полученных оценок.

## 2. МП-оценка длительности мертвого времени

Обозначим  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) – значение длительности  $k$ -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ( $\tau_k > 0$ ). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности  $k$ -го интервала  $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$ ,  $\tau \geq 0$ , для любого  $k$  (индекс  $T$  подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент  $t_k$  без потери общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события наблюдаемого потока есть  $\tau = 0$ . Тогда [4] плотность вероятностей примет вид

$$\begin{aligned} p_T(\tau) &= 0, \quad 0 \leq \tau < T; \quad p_T(\tau) = [1 - f(T)]\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + f(T)(\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau-T)}, \\ f(T) &= \frac{p(\alpha + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)[\lambda_1 + (\alpha + p\lambda_1 - \lambda_1)e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}]}{(\alpha + p\lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)F(T)}, \\ F(T) &= (\alpha + \lambda_2) - [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, \quad 0 \leq T \leq \tau, \quad \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) функция  $F(T) > 0$  для любых  $T$  ( $0 \leq T \leq \tau$ ). Рассматривается общий случай, т.е.  $(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha) \neq 0$ . Подчеркнем, что (1) – одномерная плотность вероятностей.

Пусть  $\tau_1 = t_2 - t_1$ ,  $\tau_2 = t_3 - t_2$ , ...,  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  – последовательность измеренных (в результате наблюдения за потоком в течение интервала наблюдения  $(0, t)$ ) значений длительностей интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины  $\tau_1, \dots, \tau_k$  по возрастанию:  $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(k)}$ . В силу предпосылок наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать начиная с момента наступления события (с момента  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ). Тогда [22] функция правдоподобия, с учетом (1), запишется в виде

$$\begin{aligned} L(\lambda_i, p, \alpha, \delta, T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) &= 0, \quad 0 \leq \tau_{\min} < T; \\ L(\lambda_i, p, \alpha, \delta, T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) &= \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}), \quad \tau_{\min} \geq T. \end{aligned}$$

Так как поставленная задача заключается в построении оценки  $\hat{T}$  длительности мертвого времени (в предположении, что остальные параметры потока  $\lambda_i, p, \alpha, \delta$  известны), то, согласно методу максимального правдоподобия, её реализация есть решение оптимизационной задачи

$$\begin{aligned} L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) &= \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}) = \prod_{j=1}^k \{ [1 - f(T)]\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau^{(j)}-T)} + \\ &+ f(T)(\alpha + \lambda_2)e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau^{(j)}-T)} \} \Rightarrow \max_T, \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}, \quad \tau_{\min} > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $f(T)$  определена в (1).

Значение  $T$ , при котором (2) достигает своего глобального максимума, есть  $\hat{T}_{МП}$  – оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени.

В [5] аналитически строго решена оптимизационная задача (2): при любых значениях параметров потока  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$  ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ),  $0 < p \leq 1$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$ ,  $\alpha > 0$  МП-оценка  $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$ . Таким образом, в процессе наблюдения (в течение временного интервала  $(t_0, t)$ ) потока событий вычисляются величины  $\tau_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , после чего находится  $\tau_{\min} = \min \tau_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и полагается  $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$ .

### 3. ММ-оценка длительности мертвого времени

В [4] показано, что обобщенный полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, в общем случае является коррелированным потоком. Только в частных случаях поток становится рекуррентным.

Пусть  $(t_k, t_{k+1})$ ,  $(t_{k+1}, t_{k+2})$  – два смежных интервала в наблюдаемом потоке с соответствующими значениями длительностей:  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$ ; их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда можно положить  $k = 1$  и рассматривать соседние интервалы  $(t_1, t_2)$ ,  $(t_2, t_3)$  с соответствующими значениями длительностей:  $\tau_1 = t_2 - t_1$ ,  $\tau_2 = t_3 - t_2$ ;  $\tau_1 \geq 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ . При этом  $\tau_1 = 0$  соответствует моменту  $t_1$  наступления события наблюдаемого потока,  $\tau_2 = 0$  – моменту  $t_2$  наступления следующего события наблюдаемого потока.

Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть  $p_T(\tau_1, \tau_2)$ ,  $\tau_1 \geq 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$  [4]:

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0; \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(\alpha + p\lambda_1)T} f(T)[1 - f(T)] \frac{\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)}{\alpha + \lambda_2} \times$$

$$\times \left[ \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_1 - T)} - (\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau_1 - T)} \right] \left[ \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_2 - T)} - (\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha + \lambda_2)(\tau_2 - T)} \right], \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T,$$

где  $f(T)$ ,  $p_T(\tau_k)$  определены в (1) для  $\tau = \tau_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Теоретическая ковариация значений  $\tau_1$  и  $\tau_2$  имеет вид

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \int_T^\infty \int_T^\infty \tau_1 \tau_2 p_T(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \left[ \int_T^\infty \tau p_T(\tau) d\tau \right]^2.$$

Подставляя в последнюю формулу  $p_T(\tau_1, \tau_2)$  из (3),  $p_T(\tau)$  из (1), находим явный вид теоретической ковариации:

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = f(T)[1 - f(T)](\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)^2 \frac{\lambda_2 - (\lambda_2 + \alpha\delta)p}{\lambda_1^2(\alpha + \lambda_2)^3} e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, \quad (4)$$

где  $f(T)$  определена в (1).

Пусть за время наблюдения (в течение временного интервала  $(t_0, t)$ ) реализовалось  $n$  интервалов  $(t_k, t_{k+1})$  длительности  $\tau_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Введем статистику

$$\widehat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \tau_{k+1} - \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k \right)^2, \quad (5)$$

являющуюся оценкой теоретической ковариации (4). Тогда, согласно методу моментов [22], уравнение моментов, учитывающее коррелированность потока событий, запишется в виде

$$f(T)[1 - f(T)](\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)^2 \frac{\lambda_2 - (\lambda_2 + \alpha\delta)p}{\lambda_1^2(\alpha + \lambda_2)^3} e^{-(\alpha + p\lambda_1)T} = \widehat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2). \quad (6)$$

Подставляя в (6) выражение  $f(T)$  из (1), вводя новую переменную  $x = e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}$  и проделывая при этом необходимые преобразования, находим (6) в виде

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

$$a = h\{\lambda_1(\alpha + \lambda_2) - (\alpha + p\lambda_1)[\lambda_1(1 - p) + \lambda_2]\};$$

$$\begin{aligned}
b &= -\left\{ h[2\lambda_1(\alpha + \lambda_2) - (\alpha + p\lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha)] + [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]^2 C_0 \right\}; \\
c &= (\alpha + \lambda_2) \left\{ \lambda_1 h + 2[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] C_0 \right\}; \\
d &= C_0(\alpha + \lambda_2)^2; \\
h &= \frac{p\alpha(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)[\lambda_1(1 - p + p\delta) - (\alpha + \lambda_2)][\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]}{[\lambda_1(\alpha + \lambda_2)(\alpha + p\lambda_1)]}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Решение уравнения (7) определит три корня  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , которые, в свою очередь, определяют три ММ-оценки длительности мертвого времени

$$\hat{T}_{MM}^{(i)} = -\frac{1}{\alpha + p\lambda_1} \ln x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Алгоритм нахождения единственной оценки  $\hat{T}_{MM}$  следующий [21]:

1) для определенного набора параметров  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\alpha$ ,  $p$ ,  $\delta$ ,  $T$  ед. времени осуществляется в течение  $T_m$  ед. времени имитационное моделирование наблюдаемого потока событий;

2) результатом работы имитационной модели является оценка теоретической ковариации (5), где  $n$  принимает одно из целых значений ( $n \geq 2$ );

3) решается кубическое уравнение (7), т.е. находятся корни  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ;

4) если все корни комплексные, то  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ ;

5) выделяются вещественные корни; здесь возможны три случая:

5.1) вещественный корень один –  $x_1$ , тогда:

а) если  $x_1 \leq 0$ , то  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ ;

б) если  $x_1 > 0$ , то: б.1)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(1)} > \tau_{\min}$ , б.2)  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$ ,

б.3)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0$ ;

5.2) вещественных корней два –  $x_1$ ,  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), тогда:

а) если  $x_1 < x_2 \leq 0$ , то  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ ;

б) если  $x_1 \leq 0 < x_2$ , то: б.1)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(2)} > \tau_{\min}$ , б.2)  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min}$ ,

б.3)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0$ ;

в) если  $0 < x_1 < x_2$ , то: в.1)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ , в.2)  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ , в.3)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(1)}$ , в.4)  $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)})/2$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$ , в.5)  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$ , в.6)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0$ ;

5.3) вещественных корней три –  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  ( $x_1 < x_2 < x_3$ ), тогда:

а) если  $x_1 < x_2 < x_3 \leq 0$ , то  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ ;

б) если  $x_1 < x_2 \leq 0 < x_3$ , то: б.1)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} > \tau_{\min}$ , б.2)  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min}$ ,

б.3)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0$ ;

в) если  $x_1 \leq 0 < x_2 < x_3$ , то: в.1)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)}$ , в.2)  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)}$ , в.3)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)}$ , в.4)  $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)})/2$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min}$ , в.5)  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min}$ , в.6)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0$ ;

г) если  $0 < x_1 < x_2 < x_3$ , то: г.1)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ , г.2)  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ , г.3)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ ,

г.4)  $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)})/2$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ , г.5)  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ , г.6)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ , г.7)  $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)})/3$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$ , г.8)  $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)})/2$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$ , г.9)  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$ , г.10)  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0 \leq \tau_{\min}$ .

В результате работы алгоритма осуществляется один из описанных вариантов, тем самым определяется единственная ММ-оценка  $\hat{T}_{MM}$  длительности мертвого времени.

#### 4. Численное сравнение МП- и ММ-оценок

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления МП- и ММ-оценок. Программа расчета реализована на языке программирования C++ в среде Builder 6. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование (при заданных значениях параметров  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\alpha$ ,  $p$ ,  $\delta$ ,  $T$  ед. времени и заданном времени моделирования  $T_m$  ед. времени) наблюдаемого потока событий. Описание алгоритма имитационного моделирования здесь не приводится, так как никаких принципиальных трудностей алгоритм не содержит. Результатом работы имитационной модели является последовательность значений длительностей временных интервалов  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ). Второй этап расчета – непосредственное вычисление МП- и ММ-оценок. Коротко опишем второй этап: 1) находится оценка  $\hat{T}_{MP} = \tau_{\min}(\tau_{\min} = \min \tau_k, k = \overline{1, n})$ ; 2) вычисляется оценка (5); 3) решается уравнение (7); 4) осуществляется алгоритм нахождения единственной оценки  $\hat{T}_{MM}$ ; 5) вычисляются величины  $\Delta\hat{T}_{MP} = (\hat{T}_{MP} - T)^2$ ,  $\Delta\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM} - T)^2$ , где  $T$  – истинное значение длительности мертвого времени, заданное на первом этапе расчета при осуществлении имитационного моделирования.

Для сравнения качества МП- и ММ-оценок проведен статистический эксперимент, состоящий из следующих этапов: 1) для заданного набора параметров  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\alpha$ ,  $p$ ,  $\delta$ ,  $T$  ед. времени осуществляется моделирование наблюдаемого потока событий для заданного  $T_m$  ед. времени (отдельный  $j$ -й эксперимент,  $j = 1, 2, \dots$ ); 2) осуществляется расчет оценок  $\hat{T}_{MP}^{(j)}$ ,  $\hat{T}_{MM}^{(j)}$  для  $j$ -го эксперимента; 3) вычисляются величины  $\Delta\hat{T}_{MP}^{(j)}$ ,  $\Delta\hat{T}_{MM}^{(j)}$  для  $j$ -го эксперимента; 4) осуществляется повторение  $N$  раз ( $j = \overline{1, N}$ ) шагов 1–3.

Результатом выполнения описанного алгоритма являются две выборки  $(\hat{T}_{MP}^{(1)}, \hat{T}_{MP}^{(2)}, \dots, \hat{T}_{MP}^{(N)})$ ,  $(\hat{T}_{MM}^{(1)}, \hat{T}_{MM}^{(2)}, \dots, \hat{T}_{MM}^{(N)})$ , на основании которых вычисляются выборочные вариации полученных оценок:

$$\hat{V}_{MP} = (1/N) \sum_{j=1}^N \Delta\hat{T}_{MP}^{(j)}, \hat{V}_{MM} = (1/N) \sum_{j=1}^N \Delta\hat{T}_{MM}^{(j)}.$$

Путем сравнения значений выборочных вариаций устанавливается, какая из оценок при заданных параметрах лучше, какая хуже: если  $\hat{V}_{MP} \leq \hat{V}_{MM}$ , то МП-оценка лучше ММ-оценки, если наоборот, то ММ-оценка лучше МП-оценки. Отметим, что по определению МП-оценка при конечных  $T_m$  будет всегда смещенная ( $\tau_{\min} > T$ ); ее несмещенность реализуется только в асимптотическом случае при  $T_m \rightarrow \infty$ .

Результаты статистического эксперимента приведены в табл. 1–8. В первой строке таблиц указана длительность имитационного моделирования  $T_m$  ( $T_m = 10, 20, \dots, 50$  ед. времени в табл. 1–4;  $T_m = 600, 700, \dots, 1000$  ед. времени в табл. 5–8). Во второй и третьей строках таблиц для каждой длительности имитационного моделирования  $T_m$  приведены численные значения для  $\hat{V}_{MP}$  и  $\hat{V}_{MM}$  соответственно. В четвертой строке таблиц для каждой длительности имитационного моделирования приведены численные значения разности  $\hat{V}_{MP} - \hat{V}_{MM}$ . Численные результаты во всех таблицах получены для  $N = 100$ .

Т а б л и ц а 1

**Результаты статистического эксперимента**  
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,7, \alpha = 0,01, p = 0,02, \delta = 0,2, T = 0,4$

$T_m$	30	40	50	60	70
$\hat{V}_{MM}$	0,02186	0,00421	0,00369	0,00314	0,00253
$\hat{V}_{МП}$	0,02208	0,00447	0,00371	0,00314	0,00253
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{MM}$	0,00022	0,00025	$2,62960 \cdot 10^{-5}$	0	0

Т а б л и ц а 2

**Результаты статистического эксперимента**  
 $\lambda_1 = 0,7, \lambda_2 = 0,2, \alpha = 0,1, p = 0,2, \delta = 0,2, T = 1$

$T_m$	30	40	50	60	70
$\hat{V}_{MM}$	0,29872	0,09011	0,08394	0,07245	0,04156
$\hat{V}_{МП}$	0,29988	0,09965	0,10131	0,07568	0,04156
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{MM}$	0,00115	0,00953	0,01737	0,00323	0

Т а б л и ц а 3

**Результаты статистического эксперимента**  
 $\lambda_1 = 0,9, \lambda_2 = 0,2, \alpha = 0,1, p = 0,2, \delta = 0,2, T = 1$

$T_m$	30	40	50	60	70
$\hat{V}_{MM}$	0,47389	0,06118	0,05562	0,04330	0,04432
$\hat{V}_{МП}$	0,4759	0,06667	0,05884	0,04336	0,04432
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{MM}$	0,00201	0,00549	0,00322	$6,38402 \cdot 10^{-5}$	0

Т а б л и ц а 4

**Результаты статистического эксперимента**  
 $\lambda_1 = 0,7, \lambda_2 = 0,3, \alpha = 0,1, p = 0,2, \delta = 0,7, T = 0,4$

$T_m$	30	40	50	60	70
$\hat{V}_{MM}$	0,06944	0,05062	0,01856	0,01747	0,012561
$\hat{V}_{МП}$	0,06957	0,05288	0,01942	0,01747	0,012561
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{MM}$	0,00012	0,00226	0,00085	0	0

Т а б л и ц а 5

**Результаты статистического эксперимента**  
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,7, \alpha = 0,01, p = 0,02, \delta = 0,2, T = 0,4$

$T_m$	600	700	800	900	1 000
$\hat{V}_{MM}$	$3,4325 \cdot 10^{-5}$	0,0011	0,0017	$2,9796 \cdot 10^{-5}$	$9,2298 \cdot 10^{-5}$
$\hat{V}_{МП}$	$2,6118 \cdot 10^{-5}$	$2,0686 \cdot 10^{-5}$	$1,1477 \cdot 10^{-5}$	$1,0959 \cdot 10^{-5}$	$9,2298 \cdot 10^{-5}$
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{MM}$	$-8,2068 \cdot 10^{-6}$	-0,001	-0,0017	$-1,8837 \cdot 10^{-5}$	0

Т а б л и ц а 6

**Результаты статистического эксперимента**  
 $\lambda_1 = 0,7, \lambda_2 = 0,2, \alpha = 0,1, p = 0,2, \delta = 0,2, T = 1$

$T_m$	600	700	800	900	1 000
$\hat{V}_{MM}$	0,0094	0,0327	0,0116	0,0376	0,0238
$\hat{V}_{МП}$	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{MM}$	-0,0091	-0,0325	-0,0115	-0,0375	-0,0237

## Результаты статистического эксперимента

$$\lambda_1 = 0,9, \lambda_2 = 0,2, \alpha = 0,1, p = 0,2, \delta = 0,2, T = 1$$

$T_m$	600	700	800	900	1 000
$\hat{V}_{MM}$	0,01542	0,0354	0,05089	0,03118	0,06874
$\hat{V}_{МП}$	0,00017	0,0002	0,00011	0,00013	0,0001
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{MM}$	-0,01524	-0,0352	-0,05078	-0,03105	-0,0686

## Результаты статистического эксперимента

$$\lambda_1 = 0,7, \lambda_2 = 0,3, \alpha = 0,1, p = 0,2, \delta = 0,7, T = 0,4$$

$T_m$	600	700	800	900	1 000
$\hat{V}_{MM}$	0,00093	$9,5221 \cdot 10^{-5}$	0,0007	0,00146	0,00481
$\hat{V}_{МП}$	0,00012	$7,9655 \cdot 10^{-5}$	0,0001	$4,6246 \cdot 10^{-5}$	$5,4977 \cdot 10^{-5}$
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{MM}$	-0,00081	$-1,5566 \cdot 10^{-5}$	-0,0006	-0,0014	-0,0047

Анализ приведенных численных результатов показывает что: 1) при малых временах наблюдения за потоком (при малых  $T_m = 30, 40, \dots, 70$  ед. времени) ММ-оценки лучше МП-оценок (табл. 1–4) либо, по крайней мере, не хуже МП-оценок (когда разность  $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{MM}$  равна 0), что является вполне естественным, так как при малых временах наблюдения оценка  $\hat{T}_{МП}$  может быть достаточно сильно смещенной относительно  $T$ ; 2) при больших временах наблюдения за потоком (при больших  $T_m = 600, 700, \dots, 1\,000$  ед. времени) МП-оценки лучше ММ-оценок (табл. 5–8) либо не хуже ММ-оценок (когда разность  $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{MM}$  равна 0), что также является естественным, так как при больших временах наблюдения смещение оценки  $\hat{T}_{МП}$  относительно  $T$  уменьшается.

### Заключение

Результаты проведенного исследования МП-оценок и ММ-оценок длительности мертвого времени  $T$  показывают общую тенденцию, что при малых временах наблюдения за потоком предпочтительнее применять оценку  $\hat{T}_{MM}$ , при больших временах наблюдения – оценку  $\hat{T}_{МП}$ . Границу применимости той или иной оценки (при заданных значениях параметров  $\lambda_i, i = 1, 2, \alpha, p, \delta$ ) можно определить только численно путем имитационного моделирования.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.
2. Горцев А.М., Калягин А.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий в условиях непродлевающего мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 4(13). С. 50–60.
3. Горцев А.М., Калягин А.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2(19). С. 80–87.
4. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающем мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2(27). С. 19–29.



- 5 Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1(30). С. 27–37.
6. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
7. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
- 8 Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного МАР-потока событий и условия рекуррентности потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1(30). С. 57–67.
9. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск : Изд-во ТГУ, 1978. 208 с.
10. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Соловьев А.А. Оптимальная оценка состояний МАР-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Автоматика и телемеханика. 2012. № 8. С. 49–63.
11. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Шевченко Т.Н. Оценка состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Известия высших учебных заведений. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.
12. Бушланов И.В., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 76–93.
13. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. 2004. №10. С. 8–16.
14. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 254 с.
15. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
16. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание периода мертвого времени и параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий // Измерительная техника. 2003. № 6. С. 7–13.
17. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1 (I). С. 18–23.
18. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
19. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка длительности непродлевающегося мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Известия вузов. Физика. 2013. Т. 56, № 9/2. С. 220–222.
20. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
21. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
22. Шулягин В.П. Математическая статистика. Часть 1. Томск: Изд-во НТЛ, 2012. 540 с.

**Калягин Алексей Андреевич.** E-mail: redall@inbox.ru

**Нежелская Людмила Алексеевна,** кандидат технических наук, доцент. E-mail: ludne@mail.ru  
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 12 мая 2015 г.

*Kalyagin Aleksey A., Nezhel'skaya Lyudmila A. (Tomsk State University, Russian Federation).*

**The comparison of maximum likelihood method and moments method by estimation of dead time in a generalized semisynchronous flow of events.**

**Keywords:** generalized semisynchronous flow of events; unprolonging dead time; maximum likelihood method; method of moments, dead time.

DOI 10.17223/19988605/32/3

We consider generalized semisynchronous flow of events, which intensity is piecewise constant stochastic process  $\lambda(t)$  with two states  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ) and unprolonging dead time. During the time interval when  $\lambda(t) = \lambda_i$ , the Poisson flow of events takes place with the intensity  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ . The transition from the first state of process  $\lambda(t)$  into the second one (from the second state into the first one) is carried out at any moment. The sojourn time in the  $i$ -th state is exponentially distributed with the parameter  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ . The transition of  $\lambda(t)$  from the first state into the second one initiates with probability  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ) extra event in the second state. Also, the transition of  $\lambda(t)$  from the second state into the first one initiates with probability  $q$  ( $0 \leq q \leq 1$ ) extra event in the second state.

The flow is functioning in conditions of unprolonging dead time (the value of dead time is fixed). We solve the problem of estimation of dead time by using the likelihood function and the method of moments.

## REFERENCES

1. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2011) Optimal states estimation of integrated semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2 (11). pp. 66-81. (In Russian).
2. Gortsev, A.M. & Kalyagin, A.A. (2010) Optimal states estimation of integrated semisynchronous flow of events in condition of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4 (13). pp. 50-60. (In Russian).
3. Gortsev, A.M. & Kalyagin, A.A. (2012) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2 (19). pp. 80-87. (In Russian).
4. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2 (27). pp. 19-29. (In Russian).
5. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1 (30). pp. 27-37. (In Russian).
6. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BGU.
7. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2011) On connection of MC flows and MAP flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 13-21. (In Russian).
8. Nezhel'skaya, L.A. (2015) Joint probability density of the intervals duration in modulated MAP event flows and its recurrence conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 57-67. (In Russian).
9. Gortsev, A.M., Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (1978) *Upravlenie i adaptatsiya v sistemakh massovogo obsluzhivaniya* [Control and adaptation in queueing systems]. Tomsk: Tomsk State University.
10. Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A. & Solov'ev, A.A. (2012) Optimal'naya otsenka sostoyaniy MAR-potoka sobytiy v usloviyakh neprodle-vayushchegosya mertvogo vremeni [Optimal states estimation of MAP flows of events in the condition of constant dead time]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 8. pp. 49-63.
11. Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A. & Shevchenko, T.N. Otsenka sostoyaniy MS-potoka sobytiy pri nalichii oshibok izmereniy [State estimation MS – stream sobytiy pri presence of measurement error]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 12. pp. 67-85.
12. Bushlanov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2008) Otsenka parametrov sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy [Estimation of parameters of synchronous double-stochastic event flow]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 9. pp. 76-93.
13. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2004) Otsenivanie dlitel'nosti «mertvogo vremeni» i intensivnostey sinkhronnogo dvazhdy sto-khasticheskogo potoka sobytiy [Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double-stochastic event flow]. *Radiotekhnika*. 10. pp. 8-16.
14. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Staticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskoy eksperimente* [Statistical analysis of stochastic flows in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
15. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2008) Semisynchronous double stochastic flow of events when the dead time is prolonged. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13 (1). pp. 31-41. (In Russian).
16. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2003) Otsenivanie perioda mertvogo vremeni i parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy [Evaluation period of the dead time and the parameters of a semi-synchronous double stochastic flow of events]. *Izmeritel'naya tekhnika – Measurement Techniques*. 6. pp. 7-13.
17. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Estimating parameters of the semi-synchronous double stochastic flow of events by moment method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1 (I). pp. 18-23.
18. Nezhel'skaya, L.A. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobytiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyu-daemosti [Optimal state estimation of the semi-synchronous flow of events under incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95-98.
19. Leonova, M.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2013) Otsenka dlitel'nosti neprodlevayushchegosya mertvogo vremeni v obobshchennom asinkhronnom potoke sobytiy [Estimating duration of non-continuous dead time in a generalized asynchronous event flow]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 56 (9/2). pp. 220-222.
20. Leonova, M.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2013) Maximum-likelihood estimation of the dead time in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2 (23). pp. 54-63. (In Russian).
21. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhel'skaya, L.A. (2013) Comparison of MP- and MM-grade duration of dead time in a generalized asynchronous event flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4 (25). pp. 32-42. (In Russian).
22. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical statistics]. Tomsk: NTL.