

О.В. Матвиенко, Е.В. Евтюшкин, А.О. Андропова

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛИ ДРЕЙФА ЧАСТИЦ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕНОСА ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ В ПОТОКЕ

Исследуются рамки применимости модели дрейфа частиц в потоке. Для описания свойств многофазных потоков в настоящее время используют два метода, основанные на подходе Лагранжа и Эйлера. В случае частиц с малой инерционностью эти подходы могут быть заменены моделями, основанными на концепции дрейфа дисперсной фазы относительно несущей среды. При этом скорость дисперсной фазы определяется в предположении динамического баланса сил, действующих на частицы. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что при $Kn_p < 1$, $Re < 1$ использование модели дрейфа частицы дает погрешность, не превышающую 1%.

Ключевые слова: механика многофазных сред, частицы, дисперсная фаза, модель дрейфа, осаждение.

Многофазные течения широко распространены в энергетике, химической, обрабатывающей промышленности и имеют широкую область применения [1–9]. В инженерных приложениях приходится иметь дело с большим разнообразием многофазных сред, которые принято разделять на следующие классы [10]:

- газозвеси, дым – смеси газа с твердыми частицами;
- аэрозоли, туман – смесь газа с жидкими каплями;
- суспензии – смесь жидкости с твердыми частицами;
- эмульсии – смесь жидкости с каплями другой жидкости;
- газожидкостные среды, пены – смесь жидкости с газовыми пузырями;
- зернистые (гранулированные) среды – упакованные твердые частицы, в зазорах которых содержится газ или жидкость;
- капиллярно-пористые среды – пористые тела, содержащие в порах газ или жидкость.

Твердые частицы, капли, пузырьки газа называются дисперсными частицами, или дисперсной фазой, а окружающую их фазу – несущей средой.

Для описания свойств многофазных потоков в настоящее время используют два метода, основанные на подходе Лагранжа и Эйлера [11, 12].

В рамках подхода Лагранжа выписываются уравнения движения отдельных частиц, рассматриваемых как материальные точки, в форме второго закона Ньютона, в правых частях которого стоят силы, действующие на частицу в потоке [13]. Несмотря на кажущуюся простоту описания движения частиц в рамках подхода Лагранжа, этот метод обладает, по крайней мере, двумя существенными недостатками. Первый из них связан с вычислительными трудностями, связанными с необходимостью решать огромное число уравнений движения для совокупности частиц. Так, для описания пространственного движения N частиц требуется решить $6N$ уравнений. Проблема становится еще более сложной, если возникает необходимость моделирования движения частиц с учетом их взаимодействия. Вторая проблема связана с трудностью учета стохастического характера движения частиц в потоке с турбулентностью. Используемые в настоящее время подходы,

основанные на использовании метода Монте-Карло, требуют проведения целой серии расчетов, так, чтобы результат их осреднения имел объективный характер.

Эффекты взаимодействия фаз, стохастический характер движения большой совокупности частиц могут быть учтены в рамках подхода Эйлера, в соответствие с которым многофазная среда рассматривается как совокупность многоскоростных континуумов (несущей среды и различных фракций частиц). Для каждого из этих континуумов записываются уравнения движения в форме Эйлера, а также уравнения сохранения массы каждого из рассматриваемых континуумов.

В случае частиц с малой инерционностью этот подход может быть заменен моделями, основанными на концепции дрейфа дисперсной фазы относительно несущей среды. При этом скорость дисперсной фазы определяется в предположении малости инерционных членов или, иными словами, динамического баланса сил, действующих на частицы. Таким образом, нет необходимости решать полные дифференциальные уравнения движения, а достаточно рассмотреть уравнение динамического баланса сил.

Вследствие своей простоты и экономичности модели дрейфа частиц получили широкое распространение в инженерной практике. Тем не менее возможность их применения должна определяться не интуитивными оценками и соображениями простоты, а соответствующими количественными оценками.

Отметим, что использование как подхода Лагранжа, так и подхода Эйлера основано на предположении малости размеров частиц d_p по сравнению с характерным размером области течения L , за который в рамках вычислительной гидродинамики удобно принять размер конечноразностной сетки. Таким образом, должно выполняться соотношение

$$Kn_p = d_p / L \ll 1. \quad (1)$$

В случае нарушения условий (1) в рамках подхода Лагранжа частицу невозможно принять за материальную точку и приходится исследовать картину обтекания частицы потоком. Невыполнение условия (1) в рамках подхода Эйлера эквивалентно невозможности применить модель взаимопроникающих континуумов.

Рассмотрим некоторый объем жидкости, соответствующий объему конечноразностной ячейки. Скорость несущей среды внутри этого объема \vec{v}_l можно считать независимой от координат. Введем систему координат, движущуюся со скоростью \vec{v}_l . В этой системе координат несущая среда будет неподвижной.

При моделировании движения дисперсной фазы внутри конечноразностной ячейки будем исходить из следующих предположений:

- движение частицы определяется силой Архимеда и силой сопротивления;
- частица дисперсной фазы с начальной скоростью \vec{v}_0 попадает в некоторый объем покоящейся жидкости;
- вектор скорости частицы в начальный момент времени параллелен вектору ускорения, вызываемого силой Архимеда;
- частицы дисперсной фазы предполагаются сферическими;
- взаимодействие между частицами не учитывается.

Отметим, что последнее предположение позволяет исследовать движение только одиночной частицы.

В рамках этих предположений уравнение движения одиночной частицы можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\vec{v}_p}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} C_D d_p^{-1} |\vec{v}_p| \vec{v}_p + \frac{\rho_p - \rho}{\rho_p} \vec{g}. \quad (2)$$

В уравнении (2) \vec{g} – ускорение свободного падения, d_p – диаметр дисперсной фазы, ρ , ρ_p – плотность несущей и дисперсной фазы \vec{v}_p – скорость дисперсной фазы, коэффициент сопротивления C_D является функцией относительного числа Рейнольдса $Re = \rho |\vec{v}_p| d_p / \mu$.

Стандартную кривую сопротивления можно аппроксимировать кусочными зависимостями вида

$$C_D = C' Re^n, \quad (3)$$

где значения коэффициентов в формуле (3) приведены в таблице.

Значения коэффициентов в законе сопротивления

Число Рейнольдса Re	$Re < 1$	$1 < Re < 10$	$10 < Re < 800$	$800 < Re \leq 2 \cdot 10^5$
C'	24	26.3	12.3	0.44
n	-1	-0.8	-0.5	0

Определим скорость движения частицы в рамках модели дрейфа. В случае гравитационного оседания частиц уравнение динамического баланса сил может быть представлено следующим образом:

$$\frac{3}{4} C_D \frac{\rho}{\rho_p} d_p^{-1} |v_s| v_s + \frac{\rho - \rho_p}{\rho} g = 0, \quad (4)$$

где v_s – скорость стационарного осаждения частицы (скорость седиментации).

При движении частиц, описываемом законом сопротивления Стокса скорость седиментации может быть определена как

$$v_s = \frac{\rho_p - \rho}{18\mu} g d^2. \quad (5)$$

В переходной области скорость седиментации определится выражением

$$v_s = \left[\frac{4}{3} (C')^{-1} (\rho_p - \rho) \rho_p g \right]^{5/6} \frac{d_p^{3/2}}{\rho \mu^{4/6}} \text{ для } 1 < Re < 10; \quad (6)$$

$$v_s = \left[\frac{4}{3} (C')^{-1} (\rho_p - \rho) \rho_p g \right]^{2/3} \frac{d_p}{\rho \mu^{1/3}} \text{ для } 10 < Re < 800. \quad (7)$$

При движении частицы, описываемом законом сопротивления Ньютона, скорость седиментации

$$v_s = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\rho_p - \rho}{\rho} C_D^{-1} g d_p}. \quad (8)$$

Скорость седиментации можно рассматривать в качестве масштабной характеристики, характеризующей скорость движения частицы в сопротивляющейся среде. Другими такими масштабными характеристиками являются время седимента-

ции t_s и длина седиментации l_s . Эти масштабы могут быть определены следующим образом:

$$t_s = \frac{\rho}{\rho - \rho_p} \frac{v_s}{g}, \quad l_s = v_s t_s. \quad (9)$$

Для дальнейшего анализа удобно представить уравнения движения в безразмерном виде. Для этого введем безразмерные скорости, координаты и время:

$$\varphi = \frac{v}{v_s}, \quad \xi = \frac{x}{l_s}, \quad \tau = \frac{t}{t_s}. \quad (10)$$

Таким образом, движение частицы в рамках модели дрейфа будет описываться следующими зависимостями:

$$\varphi = \varphi_d = 1, \quad \xi = \xi_d = \tau. \quad (11)$$

При необходимости учета инерционных свойств частицы необходимо решить дифференциальные уравнения движения, которые в безразмерном виде имеют вид

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -|\varphi| \varphi^{1+n} + 1, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \varphi, \quad (12)$$

где n – показатель степени у числа Рейнольдса в законе сопротивления.

Уравнения движения частицы (12) замыкаются следующими начальными условиями:

$$\tau = 0: \quad \varphi = \varphi_0, \quad \xi = 0. \quad (13)$$

Решение системы уравнений (12) с начальными условиями (13) зависит от закона сопротивления.

Рассмотрим сначала движение частиц в режиме сопротивления Стокса: $n = -1$. Интегрирование уравнений (12) с условиями (13) позволяет определить скорость и перемещение частицы для различных моментов времени. В безразмерном виде эти зависимости имеют вид

$$\varphi = 1 + (\varphi_0 - 1)e^{-\tau}, \quad \xi = \tau + (\varphi_0 - 1)[1 - e^{-\tau}]. \quad (14)$$

Скорость и перемещение частицы, движущейся в режиме сопротивления Стокса, отличаются от скорости дрейфа и перемещения, вызванного дрейфом на следующие значения:

$$\Delta\varphi = (\varphi_0 - 1)e^{-\tau}, \quad \Delta\xi = (\varphi_0 - 1)[1 - e^{-\tau}]. \quad (15)$$

Время, за которое частица переместится на характерный размер области течения L , в рамках модели дрейфа определится как

$$\Delta\tau = \frac{L}{l_s} = \lambda = \frac{18}{\text{Kn}_p \text{Re}_s}, \quad (16)$$

где $\text{Re}_s = \rho v_s d_p / \mu$ – седиментационное число Рейнольдса, $\text{Kn}_p = d_p / L$ – сеточное число Кнудсена. Таким образом, относительная погрешность в смещении частицы, даваемая моделью дрейфа, может быть записана в виде

$$\frac{\Delta\xi}{\lambda} = \frac{\text{Kn}_p \text{Re}_s}{18} (\varphi_0 - 1) \left[1 - \exp\left(-\frac{18}{\text{Kn}_p \text{Re}_s}\right) \right]. \quad (17)$$

Модель дрейфа частиц может быть применена при $Kn_* = \Delta\xi/\lambda \ll 1$. Границы применимости формулы (17) определяются границами применимости закона сопротивления Стокса:

$$Re_s \leq 1, \quad Re\varphi_0 \leq 1. \tag{18}$$

Решение уравнений движения частицы при ньютоновском режиме сопротивления позволяет найти изменение скорости и координаты частицы со временем, а также относительную погрешность модели дрейфа:

$$\varphi = \frac{(1 + \varphi_0) - (1 - \varphi_0) \exp(-2\tau)}{(1 + \varphi_0) + (1 - \varphi_0) \exp(-2\tau)}; \tag{19}$$

$$\xi = \ln \left| \frac{(1 - \varphi_0) + (1 + \varphi_0) \exp(3/2 C_D Kn_p)}{2} \right| - 2\tau; \tag{20}$$

$$\frac{\Delta\xi}{\lambda} = \frac{4}{3} C_D^{-1} Kn \cdot \ln \left| \frac{(1 - \varphi_0) + (1 + \varphi_0) \exp(3/2 C_D Kn_p)}{2} \right| - 2. \tag{21}$$

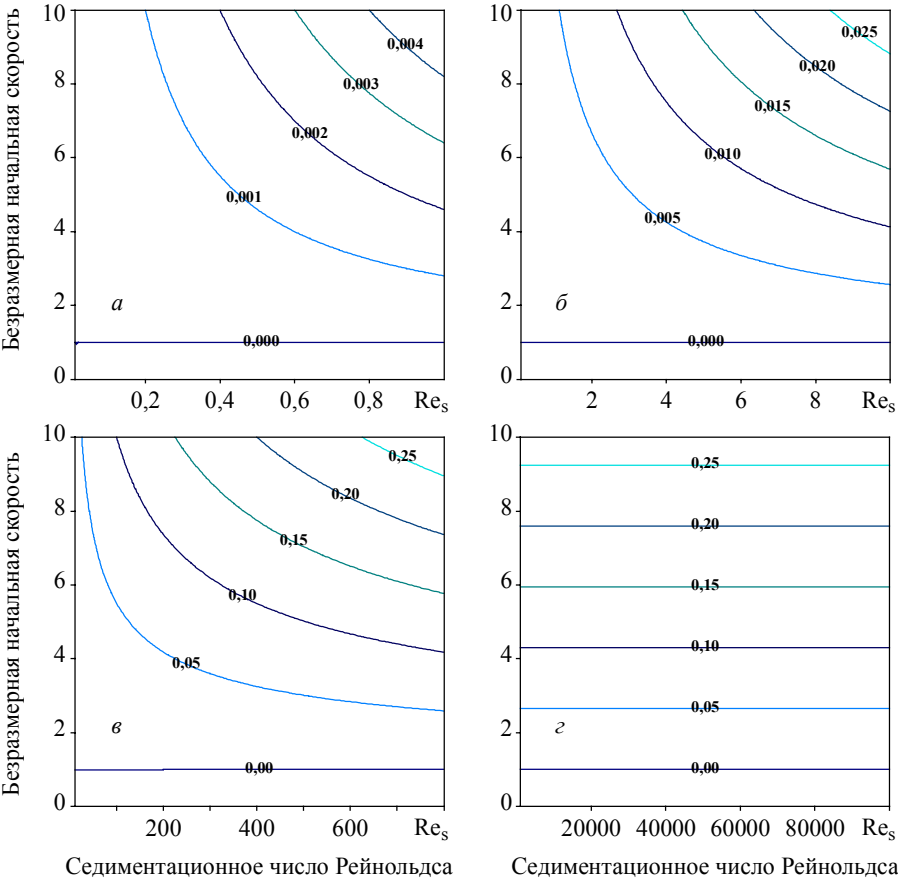


Рис. 1. Относительная погрешность модели дрейфа:
а – $Re < 1$, б – $1 < Re < 10$, в – $10 < Re < 800$, г – $800 < Re$

Определение закона движения частицы и определение погрешности модели дрейфа в переходной области в аналитической форме, к сожалению, невозможно. Поэтому для определения характеристик движения необходимо использовать численные методы.

На рис. 1 представлены линии равных относительных погрешностей $Kn_* = \text{const}$ для различных значений Re_s и φ_0 , а также различных законов сопротивления. Анализ этих рисунков позволяет сделать вывод, что при разумно выбранных параметрах сетки ($Kn_p < 0.1$) использование модели дрейфа частицы при $Re < 1$ дает погрешность, не превышающую 1%.

В переходной области с ростом числа Рейнольдса и начальной скорости частицы относительная погрешность возрастает. При $Re = 800$ с увеличением φ_0 от 2 до 5 Kn_* увеличивается от 1 до 10 %. При $Re > 800$ величина относительной погрешности зависит только от величины φ_0 .

Таким образом, в ходе проведенного исследования определена область изменения параметров, при которых возможно применение модели дрейфа частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дик И.Г., Матвиенко О.В., Неессе Т. Моделирование гидродинамики и сепарации в гидроциклоне // Теоретические основы химической технологии. 2000. Т. 34. № 5. С. 478–488.
2. Матвиенко О.В. Анализ моделей турбулентности и исследование структуры течения в гидроциклоне // ИФЖ. 2004. Т. 77. № 2. С. 58–64.
3. Матвиенко О.В., Дик И.Г. Численное исследование сепарационных характеристик гидроциклона при различных режимах загрузки твердой фазы // Теоретические основы химической технологии. 2006. Т. 40. № 2. С. 216–221.
4. Матвиенко О.В., Агафонцева М.В. Численное исследование процесса дегазации в гидроциклонах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 4(20). С. 107–118.
5. Матвиенко О.В., Евтюшкин Е.В. Теоретическое исследование процесса очистки загрязненной нефтью почвы в гидроциклонных аппаратах // ИФЖ. 2007. Т. 80. № 3. С. 72–80.
6. Матвиенко О.В., Евтюшкин Е.В. Математическое исследование сепарации дисперсной фазы в гидроциклоне при очистке вязкопластических буровых растворов // ИФЖ. 2011. Т. 84. № 2. С. 243–252.
7. Матвиенко О.В., Андропова А.О., Агафонцева М.В. Исследование влияния режимов течения из гидроциклона на его сепарационные характеристики // ИФЖ. 2014. Т. 87. № 1. С. 23–34.
8. Матвиенко О.В., Андропова А.О., Агафонцева М.В. Математическое исследование сепарации несферических изометрических частиц дисперсной фазы в гидроциклоне // XXIII Семинар по струйным, отрывным и нестационарным течениям. Томск: Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 2012. С. 248–250.
9. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Веник В.Н., Смирнова Н.Г. Численное исследование процесса образования кавитационных пузырьков в смесительном устройстве // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2014. № 4. С. 231–245.
10. Островский Г.М. Прикладная механика неоднородных сред. СПб.: Наука, 2000. 359 с.
11. Матвиенко О.В., Ушаков В.М., Евтюшкин Е.В. Математическое моделирование турбулентного переноса дисперсной фазы в турбулентном потоке // Вестник ТГПУ. 2004. Вып. 6 (43). С. 50–53.
12. Матвиенко О.В., Данейко А.М. Исследование ударного взаимодействия частиц в потоке // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 9/3. С. 190–192.

13. Матвиенко О.В., Агафонцева М.В., Базуев В.П. Исследование динамики пузырька в закрученном потоке нелинейно-вязкой жидкости // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2012. № 4. С. 144–156.

Статья поступила 07.07.2015 г.

Matvienko O.V., Evtushkin E. V., Andropova A.O. STUDYING THE APPLICABILITY OF THE ALGEBRAIC SLIP MODEL FOR PREDICTION DISPERSED PHASE MOTION IN THE FLOW

DOI 10.17223/19988621/37/7

Two different approaches (Eulerian and Lagrangian ones) are currently available for the analysis of the behavior of solid particles in flows. In the Lagrangian method, trajectories of the individual size fractions are evaluated by solving time dependent ordinary differential equations. In the Eulerian approach, partial differential equations for the conservation of mass and momentum are written for each of the particles fractions, which are solved together with the equation of the liquid flow. The particles' drift model is based on the algebraic slip velocity approach. In this approach, the relative velocities between particles and liquid are evaluated by consideration of the forces acting on the particles. The analysis of the obtained results allows one to conclude that using the model of particles' drift for and yields an error not exceeding 1%.

Keywords: Mechanics of fluid, particles, dispersed phase, the movable wall, deposition.

MATVIENKO Oleg Viktorovich (Doktor of Physics and Mathematics, Tomsk State University)
E-mail: matvolegv@mail.ru

EVTYUSHKIN Eugeny Viktorovich (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University of Architecture and Building)
E-mail: teormech@tsuab.ru

ANDROPOVA Antonina Olegovna (Tomsk State University)
E-mail: a.o.andropova@gmail.com

REFERENCES

1. Dik I.G., Matvienko O.V., Neesse Th. Modeling of hydrodynamics and separation in a hydrocyclone. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2000, vol. 34, no. 5, pp. 428–438.
2. Matvienko O.V. Analysis of turbulence models and investigation of the structure of the flow in a hydrocyclone. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2004, vol. 77, no. 2, pp. 316–323.
3. Matvienko O.V., Dik I.G. Numerical study of the separation characteristics of a hydrocyclone under various conditions of loading of the solid phase. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2006, vol. 40, no. 2, pp. 203–208.
4. Matvienko O.V., Agafontseva M.V. Chislennoe issledovanie protsessa degazatsii v gidrotsiklonakh. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2012, no. 4(20), pp. 107–118. (in Russian)
5. Matvienko O.V., Evtushkin E.V. Theoretical investigation of the process of cleaning oil-polluted soil in hydrocyclone apparatuses. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2007, vol. 80, no. 3, pp. 502–510.
6. Matvienko O.V., Evtushkin E.V. Mathematical study of hydrocyclone dispersed phase separation in clearing viscoplastic drilling fluids. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2011, vol. 84, no. 2, pp. 241–250.
7. Matvienko O.V., Andropova A.O., Agafontseva M.V. Influence of the regime of flow of particles from a hydrocyclone on its separation characteristics. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2014, vol. 87, no. 1, pp. 24–37.

8. Matvienko O.V., Andropova A.O., Agafontseva M.V. Matematicheskoe issledovanie separatsii nesfericheskikh izometricheskikh chastits dispersnoy fazy v gidrotsiklone. *XXIII Seminar po struynym, otrvnyym i nestatsionarnym techeniyam*. Tomsk, Natsional'nyy issledovatel'skiy Tomskiy politekhnicheskiy universitet, 2012, pp. 248–250. (in Russian)
9. Matvienko O.V., Bazuev V.P., Venik V.N., Smirnova N.G. Chislennoe issledovanie protsessa obrazovaniya kavitatsionnykh puzyr'kov v smesitel'nom ustroystve. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*, 2014, no. 4, pp. 231–245. (in Russian)
10. Ostrovskiy G.M. *Prikladnaya mekhanika neodnorodnykh sred*. St. Petersburg, Nauka Publ., 2000. 359 p. (in Russian)
11. Matvienko O.V., Ushakov V.M., Evtyushkin E.V. Matematicheskoe modelirovanie turbulentnogo perenosa dispersnoy fazy v turbulentnom potoke. *Vestnik TGPU*, 2004, no. 6 (43), pp. 50–53. (in Russian)
12. Matvienko O.V., Daneyko A.M. Issledovanie udarnogo vzaimodeystviya chastits v potoke. *Izv. vuzov. Fizika*, 2013, vol. 56, no. 9/3, pp. 190–192. (in Russian)
13. Matvienko O.V., Agafontseva M.V., Bazuev V.P. Issledovanie dinamiki puzyr'ka v zakruchennom potoke nelineyno-vyazkoy zhidkosti. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*, 2012, no. 4, pp. 144–156. (in Russian)