

А.М. Горцев, А.А. Соловьев**СРАВНЕНИЕ МП- И ММ-ОЦЕНОК ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В МАР-ПОТОКЕ СОБЫТИЙ**

Изучается МАР-поток событий, функционирующий в условиях непродлевающегося мертвого времени, когда длительность мертвого времени – неизвестная фиксированная величина. Проводится сравнение качества оценок непродлевающегося мертвого времени, получаемых (по наблюдениям за моментами наступления событий МАР-потока) методом максимального правдоподобия (МП-оценка) и методом моментов (ММ-оценка).

Ключевые слова: МАР-поток; непродлевающееся мертвое время; метод максимального правдоподобия; оценка максимального правдоподобия; метод моментов; оценка метода моментов.

Широко применяемой математической моделью реальных физических процессов являются случайные потоки событий. Изучаемый МАР-поток событий относится к классу дважды стохастических потоков и является одной из адекватных математических моделей потоков элементарных частиц (фотонов, электронов и т.д.), информационных потоков событий, функционирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания, информационно-телекоммуникационных системах, спутниковых сетях связи и т.д. Задачи по оценке состояний и параметров случайных потоков событий возникают в оптических и лазерных системах, функционирующих в режиме счета фотонов, например, при лазерном зондировании высотных слоев атмосферы, в оптических системах обнаружения, распознавания и сопровождения, работающих через атмосферу на предельно большие расстояния, а также в оптических системах загоризонтной связи.

В настоящей работе проводится дальнейшее исследование потоков физических событий, функционирующих в условиях непродлевающегося мертвого времени, начатое в работах [1–9].

Параметры потоков событий, функционирующих в реальном времени, неизвестны частично, либо полностью, либо представляют собой функцию времени. В подобных ситуациях наиболее рациональным является применение адаптивных систем, которые в процессе функционирования оценивают неизвестные параметры либо состояния потоков событий и изменяют дисциплины обслуживания в соответствии с полученными оценками [10]. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [11–14]; 2) оценки параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [15–24].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий (фотонов, электронов и т.д.) выступает мертвое время регистрирующих приборов [25], которое порождается зарегистрированным событием (фотоном, электроном и т.д.). Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). Таким образом, эффект мертвого времени влечет за собой потери событий потока (частично теряется информация о потоке событий), что в итоге отрицательно сказывается на оценивании как состояний, так и параметров потока [2–9]. Для того чтобы оценить потери событий потока, возникающие из-за эффекта мертвого времени, необходимо оценить значение его длительности.

При оценке параметров потока событий обычно используется метод моментов [3–8, 16–18, 21–23], как более простой в аналитическом исполнении реже используется метод максимального правдоподобия [9, 24, 26–28]. Последнее связано с возникающими при использовании этого метода аналитическими трудностями.

В настоящей статье производится численное сравнение оценок значений длительности мертвого времени в МАР-потоке событий, полученных методом максимального правдоподобия (МП-оценка) и методом моментов (ММ-оценка).

1. Математическая модель МАР-потока событий

Рассматривается МАР-поток с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_i = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$. В момент окончания i -го состояния процесса $\lambda(t)$ возможны следующие ситуации, каждая из которых протекает мгновенно: 1) процесс $\lambda(t)$ переходит из i -го состояния в i -е и наступает событие потока в i -ом состоянии; совместная вероятность этой ситуации $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_i, 1) = P_1(\lambda_i | \lambda_i)$, $i = 1, 2$; 2) процесс $\lambda(t)$ переходит из i -го состояния в j -е и наступает событие потока; совместная вероятность этой ситуации есть $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_j, 1) = P_1(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$; $i \neq j$; 3) процесс $\lambda(t)$ переходит из i -го состояния в j -е, и событие потока не наступает; совместная вероятность этой ситуации есть $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_j, 0) = P_0(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$; $i \neq j$. При этом $P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = 1$, $i, j = 1, 2$; $i \neq j$. Блочная матрица инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ при этом примет вид

$$D = \left\| \begin{array}{cc|cc} -\lambda_1 & \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) & -\lambda_2 & \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \end{array} \right\| = \|D_0 | D_1\|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс.

Заметим, что в определении МАР-потока событий в явном виде не оговаривается, в каком состоянии процесса $\lambda(t)$ наступает событие потока при переходе процесса $\lambda(t)$ из i -го состояния в j -е ($i, j = 1, 2$; $i \neq j$). Данное обстоятельство при последующих аналитических выкладках является несущественным, так как наступление события и переход процесса из i -го состояния в j -е ($i, j = 1, 2$; $i \neq j$) происходят мгновенно.

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного МАР-потока недоступны наблюдению. По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где t_1, t_2, \dots – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке; 1 и 2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; штриховкой обозначены длительности мертвого времени; черными кружками обозначены события МАР-потока, недоступные наблюдению.

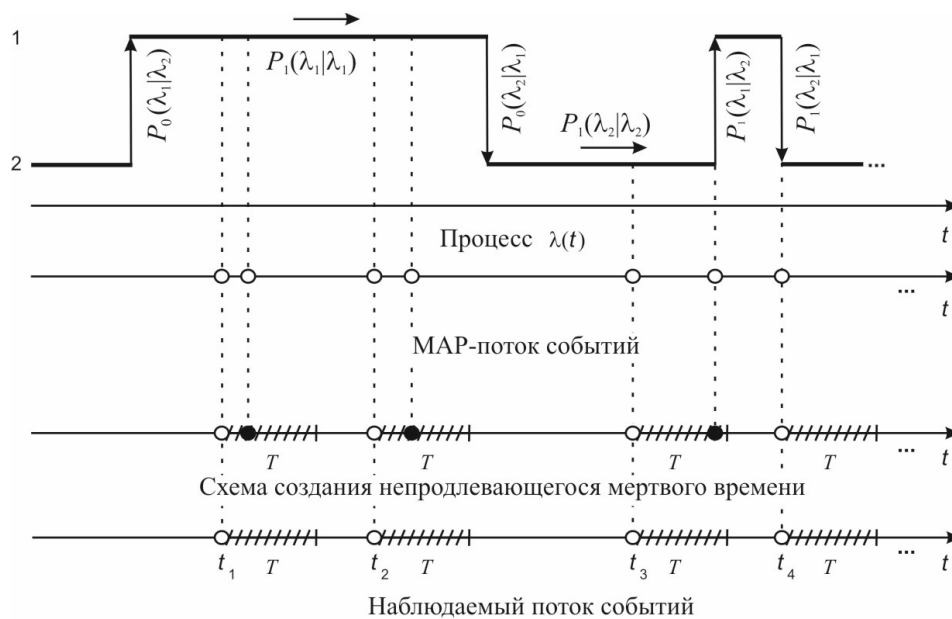


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым (скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий t_1, t_2, \dots наблюдаемого потока. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t) , где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений, пренебрегаем. Необходимо в момент окончания наблюдений (в момент времени t) осуществить методом максимального правдоподобия и методом моментов оценку \hat{T} значений длительности мертвого времени и произвести сравнение качества полученных оценок.

2. Оценка длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ($k = 1, 2, \dots$) значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k > 0$). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k -го интервала $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$ ($\tau \geq 0$) для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). Здесь и далее ситуация, когда $\tau = 0$, означает доопределение изучаемых функций в граничной точке. В силу сказанного момент времени t_k без потери общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события наблюдаемого потока есть $\tau = 0$. Тогда [1] плотность вероятности примет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau \leq T, \\ \frac{z_1}{z_2 - z_1} \left[z_2 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_1(\tau-T)} - \frac{z_2}{z_2 - z_1} \left[z_1 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_2(\tau-T)}, \tau \geq T, \end{cases}$$

$$f(T) = \lambda_1 \lambda_2 A + \{ \lambda_1 [1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] - \lambda_2 [1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)] \} \frac{\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2}{F(T)} e^{-(\beta_1 + \beta_2)T},$$

$$F(T) = 1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2) P_0(\lambda_2 | \lambda_1) - P e^{-(\beta_1 + \beta_2)T};$$

$$\beta_1 = \lambda_1 [1 - P_1(\lambda_1 | \lambda_1)], \quad \beta_2 = \lambda_2 [1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2)]; \quad (1)$$

$$A = P_1 + P_2, \quad P_1 = P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_1 | \lambda_1) P_0(\lambda_1 | \lambda_2), \quad P_2 = P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2) P_0(\lambda_2 | \lambda_1),$$

$$P = \frac{P_1(\lambda_1 | \lambda_1) P_1(\lambda_2 | \lambda_2) - P_1(\lambda_1 | \lambda_2) P_1(\lambda_2 | \lambda_1)}{1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2) P_0(\lambda_2 | \lambda_1)},$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\lambda_1 + \lambda_2 \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4 \lambda_1 \lambda_2 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) P_0(\lambda_1 | \lambda_2)} \right], \quad 0 < z_1 < z_2.$$

В (1) функция $F(T) > 0$ для любых T ($0 \leq T \leq \tau$).

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1, \tau_2 = t_3 - t_2, \dots, \tau_k = t_{k+1} - t_k$ – последовательность измеренных (в результате наблюдения за потоком в течение интервала наблюдения $(0, t)$) значений длительности интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины $\tau_1 \dots \tau_k$ по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(k)}$. В силу предпосылок наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать начиная с момента наступления события (с момента $t_k, k = 1, 2, \dots$). Тогда функция правдоподобия, с учетом (1) [29], запишется в виде

$$L(\lambda_i, P_1(\lambda_i | \lambda_i), P_1(\lambda_i | \lambda_j), P_0(\lambda_i | \lambda_j), T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = 0, \quad 0 \leq \tau_{\min} < T;$$

$$L(\lambda_i, P_1(\lambda_i | \lambda_i), P_1(\lambda_i | \lambda_j), P_0(\lambda_i | \lambda_j), T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}), \quad \tau_{\min} \geq T.$$

Поскольку поставленная задача заключается в построении оценки \hat{T} значения длительности мертвого времени (в предположении, что остальные параметры потока $\lambda_i, P_1(\lambda_i | \lambda_i), P_1(\lambda_i | \lambda_j), P_0(\lambda_i | \lambda_j), i, j = 1, 2, i \neq j$, известны), то согласно методу максимального правдоподобия ее реализация есть решение оптимизационной задачи:

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}) = \prod_{j=1}^k \left\{ \frac{z_1}{z_2 - z_1} \left[z_2 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_1(\tau^{(j)} - T)} - \frac{z_2}{z_2 - z_1} \left[z_1 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_2(\tau^{(j)} - T)} \right\} \Rightarrow \max_T, \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}, \tau_{\min} > 0, \quad (2)$$

где $f(T)$, β_1 , β_2 , z_1 , z_2 определены в (1).

Значение T , при котором (2) достигает своего глобального максимума, есть $\hat{T}_{МП}$ – оценка максимального правдоподобия значения длительности мертвого времени.

Строго аналитическое решение оптимизационной задачи (2) приводит к следующему результату: при любых значениях параметров МАР-потока событий оценка $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$.

3. Оценка длительности мертвого времени методом моментов

В [1] показано, что МАР-поток событий, функционирующий в условиях непродлевающегося мертвого времени, в общем случае является коррелированным. Только в частных случаях поток становится рекуррентным.

Пусть (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) – два смежных интервала в наблюдаемом потоке с соответствующими значениями длительностей: $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$; их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда можно положить $k = 1$ и рассмотреть соседние интервалы (t_1, t_2) , (t_2, t_3) с соответствующими значениями длительностей: $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока; $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события наблюдаемого потока. Соответствующая совместная плотность вероятности при этом есть $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$ [1]:

$$\begin{aligned} p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 \leq T, \quad 0 \leq \tau_2 \leq T; \quad p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} C_T \times \\ &\quad \times (z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1 - T)}) (z_1 e^{-z_1(\tau_2 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)}), \quad \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T; \\ C_T &= \frac{P}{[(z_1 - z_2)(\beta_1 + \beta_2)]^2} [1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)] \{ \lambda_1 [1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)] - \lambda_2 [1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)] \} \times \\ &\quad \times \frac{\beta_1 [P_1(\lambda_1|\lambda_2) + P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_0(\lambda_1|\lambda_2)] - \beta_2 [P_1(\lambda_2|\lambda_1) + P_1(\lambda_2|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)]}{\{ 1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1) - [P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2) - P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1)] e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \}^2} \times \\ &\quad \times \{ z_1 z_2 - [2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1 + \lambda_2)] e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} + \\ &\quad + [z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_2) + \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2))] e^{-2(\beta_1 + \beta_2)T} \}, \end{aligned} \quad (3)$$

$z_1, z_2, \beta_1, \beta_2, p, p_T(\tau_1), p_T(\tau_2)$ для $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$ определены в (1).

Теоретическая ковариация значений τ_1 и τ_2 запишется в виде

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \int_T^\infty \int_T^\infty \tau_1 \tau_2 p_T(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \left[\int_T^\infty \tau p_T(\tau) d\tau \right]^2. \quad (4)$$

Подставляя (1), (3) в (4), находим явный вид теоретической ковариации:

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} \right)^2 e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} C_T, \quad (5)$$

где C_T определена в (3).

Пусть за время наблюдения МАР-потока событий в течении временного интервала (t_0, t) реализовалось n интервалов (t_k, t_{k+1}) длительности τ_k , $k = \overline{1, n}$. Введем статистику:

$$\widehat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \tau_{k+1} - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k \right)^2, \quad (6)$$

где $\widehat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2)$ является оценкой теоретической ковариации (5). Тогда согласно методу моментов [29] уравнение моментов, учитывающее коррелированность МАР-потока событий, запишется в виде

$$\left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} \right)^2 e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} C_T = \widehat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2). \quad (7)$$

Подставляя в (7) выражение C_T из (3), вводя новую переменную $x = e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$ и проделывая при этом необходимые преобразования, находим (7) в виде

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0, \\ a &= h\{z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)[\lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2)]\}, \\ b &= -\{\widehat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) p^2 + h[2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1 + \lambda_2)]\}, \\ c &= [z_1 z_2 h + 2p \widehat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2)], d = -\widehat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2), \\ h &= p[z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2)]^{-2} \{\beta_1 [P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_1 | \lambda_1) P_0(\lambda_1 | \lambda_2)] - \\ &\quad - \beta_2 [P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2) P_0(\lambda_2 | \lambda_1)]\} \times \{\lambda_1 [1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] - \lambda_2 [1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение уравнения (8) определит три корня x_i , $i = 1, 2, 3$, которые, в свою очередь, дают три оценки длительности мертвого времени:

$$\hat{T}_{MM}^{(i)} = -\frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \ln(x_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Алгоритм определения единственной оценки \hat{T}_{MM} следующий:

- 1) для определенного набора параметров $\lambda_1, \lambda_2, P_1(\lambda_i | \lambda_i), P_1(\lambda_i | \lambda_j), P_0(\lambda_i | \lambda_j), i, j = 1, 2; i \neq j, T, n$ – количество наблюдаемых событий, осуществляется имитационное моделирование наблюдаемого потока;
- 2) результатом работы имитационной модели является оценка теоретической ковариации (6);
- 3) решается уравнение (8), т.е. находятся корни x_1, x_2, x_3 ;

4) если все корни комплексные, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$;

5.1) если положительный вещественный корень один – x_1 , тогда:

- а) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; б) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} > 0$, то: б.1) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$;
- б.2) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} > \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$;

5.2) если положительных вещественных корней два – x_1, x_2 ($\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)}$), тогда: а) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; б) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)}$, то: б.1) если $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$; б.2) если $\hat{T}_{MM}^{(2)} > \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; в) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)}$, то: в.1) если $\tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; в.2) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$; в.3) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$;

5.3) если положительных вещественных корней три – x_1, x_2, x_3 ($\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \hat{T}_{MM}^{(3)}$), тогда:

- а) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; б) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(3)}$, то: б.1) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$; б.2) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} > \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; в) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \hat{T}_{MM}^{(3)}$, то: в.1) если $\tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \hat{T}_{MM}^{(3)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; в.2) если $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(3)}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$; в.3) если $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$; г) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \hat{T}_{MM}^{(3)}$, то: г.1) если $\tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \hat{T}_{MM}^{(3)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; г.2) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \hat{T}_{MM}^{(3)}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$; г.3) если

$$\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(3)}, \quad \text{то} \quad \hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}; \quad \text{г.4)} \quad \text{если} \quad \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min}, \quad \text{то} \\ \hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}.$$

В результате работы алгоритма находится единственная ММ-оценка \hat{T}_{MM} значения длительности мертвого времени.

4. Численное сравнение МП- и ММ-оценок

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления МП- и ММ-оценок. Программа расчета реализована на языке программирования Borland C++, Builder 6. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование (при заданных параметрах $\lambda_1, \lambda_2, P_1(\lambda_i | \lambda_i), P_1(\lambda_i | \lambda_j), P_0(\lambda_i | \lambda_j), i, j = 1, 2; i \neq j, T, n$) наблюдаемого потока событий. Описание алгоритма имитационного моделирования здесь не приводится, так как никаких принципиальных трудностей он не содержит. Результатом работы имитационной модели является набор значений длительности временных интервалов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ($n = 2, 3, \dots$). На втором этапе расчета вычисляются МП- и ММ-оценки: 1) на основе полученной на первом этапе выборки $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ($n = 2, 3, \dots$) находится МП-оценка $\hat{T}_{МП} = \min \tau_k (k = \overline{1, n})$; 2) вычисляется значение оценки теоретической ковариации (6); 3) решается уравнение (8) и находится единственная ММ-оценка \hat{T}_{MM} ; 4) вычисляются величины $\Delta \hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM} - T)^2$, $\Delta \hat{T}_{МП} = (\hat{T}_{МП} - T)^2$, где T – истинное значение длительности мертвого времени, заданное на первом этапе расчета.

Для сравнения методов по качеству получаемых оценок проведен статистический эксперимент, состоящий из следующих этапов: 1) для заданного набора параметров $\lambda_1, \lambda_2, P_1(\lambda_i | \lambda_i), P_1(\lambda_i | \lambda_j), P_0(\lambda_i | \lambda_j), i, j = 1, 2; i \neq j, T, n$ осуществляется моделирование наблюдаемого потока (отдельный j -й эксперимент $j = 1, 2, \dots, N$); 2) вычисляются значения оценок $\hat{T}_{MM}^{(j)}, \hat{T}_{МП}^{(j)}$ и значения $\Delta \hat{T}_{MM}^{(j)}, \Delta \hat{T}_{МП}^{(j)}$; 3) осуществляется повторение N ($j = \overline{1, N}$) раз шагов 1–2.

Результатом работы приведенного выше алгоритма являются две выборки: $(\Delta \hat{T}_{MM}^{(1)}, \dots, \Delta \hat{T}_{MM}^{(N)})$ и $(\Delta \hat{T}_{МП}^{(1)}, \dots, \Delta \hat{T}_{МП}^{(N)})$, на основе которых вычисляются выборочные вариации $\hat{V}_{МП} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Delta \hat{T}_{МП}^{(j)}$ и $\hat{V}_{MM} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Delta \hat{T}_{MM}^{(j)}$.

Сравнивая значения выборочных вариаций, определяется, какая из полученных оценок лучше: если $\hat{V}_{МП} > \hat{V}_{MM}$, то ММ-оценка лучше, если $\hat{V}_{МП} < \hat{V}_{MM}$, то лучше МП-оценка.

Результаты статистического эксперимента приведены в табл. 1–8. В первой строке указано количество наблюдаемых событий потока n (длительность имитационного моделирования). Во второй и третьей строках таблиц для каждого n приведены соответствующие численные значения $\hat{V}_{МП}$ и \hat{V}_{MM} . В четвертой строке таблиц для каждого n приведены численные значения разности $\hat{V}_{MM} - \hat{V}_{МП}$. Численные результаты для всех таблиц получены для $N = 100$.

Таблица 1

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,9, P_1(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,3, P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,3, P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,4, P_1(\lambda_2 | \lambda_2) = 0,4, P_1(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,3, P_0(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,3, T = 2,75$)

n	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,1517824	0,0326041	0,0075076	0,0018225	0,0002025
\hat{V}_{MM}	0,0349281	0,0056169	0,0011664	0,0010816	0,0001296
$\hat{V}_{MM} - \hat{V}_{МП}$	–0,1168543	–0,0269872	–0,0063412	–0,0007409	–0,0000729

Т а б л и ц а 2

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, P_1(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,3, P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,3, P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,4, P_1(\lambda_2 | \lambda_2) = 0,4,$
 $P_1(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,3, P_0(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,3, T = 0,4$)

n	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,0827554	0,0134249	0,0073008	0,0053361	0,0015154
$\hat{V}_{ММ}$	0,0382048	0,0051302	0,0048444	0,0034151	0,0006989
$\hat{V}_{ММ} - \hat{V}_{МП}$	-0,0445506	-0,0082947	-0,0024564	-0,001921	-0,0008165

Т а б л и ц а 3

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1,9, P_1(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,5, P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,4, P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,1, P_1(\lambda_2 | \lambda_2) = 0,3,$
 $P_1(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,3, P_0(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,4, T = 1$)

n	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,1444804	0,0172391	0,0044775	0,0038770	0,0030555
$\hat{V}_{ММ}$	0,0335241	0,0128594	0,0041494	0,0019210	0,0016461
$\hat{V}_{ММ} - \hat{V}_{МП}$	-0,1109563	-0,0043797	-0,0003281	-0,0019560	-0,0014094

Т а б л и ц а 4

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 0,5, \lambda_2 = 0,1, P_1(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,7, P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,2, P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,1, P_1(\lambda_2 | \lambda_2) = 0,6,$
 $P_1(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,3, P_0(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,1, T = 3$)

n	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,9629230	0,5469985	0,2391044	0,1526460	0,0983072
$\hat{V}_{ММ}$	0,0915849	0,0651088	0,0299428	0,0154135	0,0028359
$\hat{V}_{ММ} - \hat{V}_{МП}$	-0,8713381	-0,4818898	-0,2091616	-0,1372325	-0,0954714

Т а б л и ц а 5

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,9, P_1(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,3, P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,3, P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,4, P_1(\lambda_2 | \lambda_2) = 0,4,$
 $P_1(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,3, P_0(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,3, T = 2,75$)

n	200	300	600	800	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,0004096	0,0001347	0,0000441	0,0000074	0,0000003
$\hat{V}_{ММ}$	0,0001505	0,0002692	0,0002601	0,0001849	0,0000838
$\hat{V}_{ММ} - \hat{V}_{МП}$	-0,0002591	0,0001345	0,0002160	0,0001775	0,0000835

Т а б л и ц а 6

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, P_1(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,3, P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,3, P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,4, P_1(\lambda_2 | \lambda_2) = 0,4,$
 $P_1(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,3, P_0(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,3, T = 0,4$)

n	200	400	600	800	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,0001340	0,0000291	0,0000152	0,0000050	0,0000071
$\hat{V}_{ММ}$	0,0001391	0,0002228	0,0004602	0,0002382	0,0002200
$\hat{V}_{ММ} - \hat{V}_{МП}$	0,0000051	0,0001937	0,000445	0,0002335	0,0002129

Т а б л и ц а 7

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1,9, P_1(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,5, P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,4, P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,1, P_1(\lambda_2 | \lambda_2) = 0,3,$
 $P_1(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,3, P_0(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,4, T = 1$)

n	200	400	600	800	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,0001600	0,0000548	0,0000100	0,0000076	0,0000021
$\hat{V}_{ММ}$	0,0010568	0,0006839	0,0000605	0,0000392	0,0000201
$\hat{V}_{ММ} - \hat{V}_{МП}$	0,0008968	0,0006292	0,0000505	0,0000316	0,0000180

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 0,5$, $\lambda_2 = 0,1$, $P_1(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,7$, $P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,2$, $P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,1$, $P_1(\lambda_2 | \lambda_2) = 0,6$, $P_1(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,3$, $P_0(\lambda_1 | \lambda_2) = 0,1$, $T = 3$)

n	200	400	600	800	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,0084623	0,0013386	0,0008519	0,0004733	0,0000847
$\hat{V}_{ММ}$	0,0021580	0,0015700	0,0019321	0,0013225	0,0014161
$\hat{V}_{ММ} - \hat{V}_{МП}$	-0,0063043	0,0002314	0,0010802	0,0008492	0,0013314

Анализ приведенных численных результатов показывает, что при малом времени ($n = 10, 20, 30, 40, 50$) наблюдения за потоком ММ-оценка лучше МП-оценки (табл. 1–4), что вполне объяснимо, так как при малом времени наблюдения оценка $\hat{T}_{МП}$ может быть достаточно сильно смещенной относительно T . При большом времени наблюдения за потоком МП-оценка лучше ММ-оценки (табл. 4–8), что является естественным, так как при большом времени наблюдения смещение оценки $\hat{T}_{МП}$ относительно T уменьшается.

Заключение

Результаты проведенного исследования оценок длительности мертвого времени T , полученных методом моментов и методом максимального правдоподобия, указывают на то, что при малом времени наблюдения лучшую оценку дает метод моментов, при достаточно большом времени наблюдения лучшую оценку дает метод максимального правдоподобия. Границу применения той или иной оценки при заданных параметрах можно определить только путем имитационного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gortsev A.M. and Solov'ev A.A. Joint Probability Density of Interarrival Interval of a Flow of Physical Events with Unextendable Dead Time Period // Russian Physics Journal. 2014. V. 57, No. 7. P. 973–983.
2. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A., Soloviev A.A. Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
3. Горцев А.М., Нуссенбаум О.В. Оценивание длительности мёртвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишнего события // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 137–145.
4. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow // Radiotekhnika. 2004. No. 10. P. 8–16.
5. Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. Estimation of the dead time of an asynchronous double stochastic flow of events under incomplete observability // Automation and Remote Control. 2003. V. 64, No. 12. P. 1890–1898.
6. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
7. Gortsev A.M., Parshina M.E. Estimation of parameters of an alternate stream of events in "dead" time conditions // Russian Physics Journal. 1999. V. 42, No. 4. P. 373–378.
8. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow // Radiotekhnika. 1996. No. 2. P. 8–11.
9. Gortsev A.M., Klimov I.S. An estimate for intensity of Poisson flow of events under the condition of its partial missing // Radiotekhnika. 1991. No. 12. P. 3–7.
10. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1978. 208 с.
11. Bushlanov I.V., Gortsev A.V. Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2004. V. 65, No. 9. P. 1389–1399.
12. Bushlanov I.V., Gortsev A.V. Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events // Avtomatika i Telemekhanika. 2004. No. 9. P. 40–51.
13. Gortsev A.M., Shmyrin I.S. Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants // Automation and Remote Control. 1999. V. 60, Part 1. P. 41–51.
14. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Shevchenko T.I. Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors // Russian Physics Journal. 1993. V. 36, No. 12. P. 1153–1167.
15. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, No. 3. 2011. P. 283–290.

16. *Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2008. V. 69, No. 9. P. 1517–1533.
17. *Vasil'eva L.A., Gortsev A.M.* Dead-time interval estimation of incompletely observable asynchronous bistochastic flow of events // Avtomatika i Telemekhanika. 2003. No. 12. P. 69–79.
18. *Vasil'eva L.A., Gortsev A.M.* Parameter estimation of a doubly stochastic flow of events under incomplete observability // Avtomatika i Telemekhanika. 2002. No. 3. P. 179–184.
19. *Vasil'eva L.A., Gortsev A.M.* Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability // Automation and Remote Control. 2002. V. 63, No. 3. P. 511–515.
20. *Gortsev A.M., Shmyrin I.S.* Optimal estimate of the parameters of a twice stochastic poisson stream of events with errors in measuring times the events occur // Russian Physics Journal. 1999. V. 42, No. 4. P. 385–393.
21. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika). 1996. V. 50, No. 1. P. 56–63.
22. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments // Radiotekhnika. 1995. V. 40, No. 7–8. P. 6–10.
23. *Gortsev A.M., Klimov I.S.* Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events // Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika). 1993. V. 48, No. 10. P. 40–45.
24. *Gortsev A.M., Klimov I.S.* Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable // Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika). 1992. V. 47, No. 1. P. 33–38.
25. *Ананасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф.* Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 254 с.
26. *Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А.* Оценка максимального правдоподобия длительности мёртвого времени в обобщённом полусинхронном потоке // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 27–37.
27. *Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А.* Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мёртвого времени в обобщённом асинхронном потоке событий // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
28. *Леонова М.А., Нежелская Л.А.* Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщённом асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 54–63.
29. *Шуленин В.П.* Математическая статистика. Томск: Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. 540 с.

Соловьев Александр Александрович. E-mail: sival19@mail.ru

Горцев Александр Михайлович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: gam@mail.fpmk.tsu.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 12 августа 2015 г.

Gortsev Alexandr M., Solovlev Alexandr A. (Tomsk State University, Russian Federation).

Comparison ML- and MM- estimates fixed duration of the dead time MAP-flow of events

Keywords: MAP-flow fixed dead time; the method of maximum likelihood; maximum likelihood estimation; method of moments; the evaluation method of moments.

DOI: 10.17223/19988605/33/2

The Markovian arrival process (MAP-flow) with the intensity representing a piecewise-constant random process $\lambda(t)$ with two states is considered: $\lambda(t) = \lambda_1$ or $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2$). The dwell time of the process $\lambda(t)$ in the i -th state is random variable with exponential distribution function $F_i = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$. At the moment of termination of the i -th state of the process $\lambda(t)$ the following situations are possible, each of which proceeds instantly: 1) process $\lambda(t)$ transits from the i -th state to the i -th state, and an event of flow in the i -th state occurs; the joint probability of this situation is $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_i, 1) = P_1(\lambda_i | \lambda_i)$ $i = 1, 2$; 2) process $\lambda(t)$ transits from the i -th state to the j -th state, and an event of the flow occurs; the joint probability of the situation is $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_j, 1) = P_1(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2; i \neq j$; 3) process $\lambda(t)$ transits from the i -th state to the j -th state, and no event of the flow occurs; the joint probability of the situation is $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_j, 0) = P_0(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2; i \neq j$. Thus, $P_1(\lambda_i | \lambda_i) + P_1(\lambda_j | \lambda_i) + P_0(\lambda_j | \lambda_i) = 1$, $i, j = 1, 2; i \neq j$

$$D = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \end{bmatrix} = \|D_0 \mid D_1\|.$$

The elements of the matrix D_1 are intensities of transitions from state with occurrence of an event. Non-diagonal elements of the matrix D_0 are the intensities of transitions from state to state, but no event occurs. Diagonal elements of the matrix D_0 are the intensities of the exit of the process $\lambda(t)$ from the states taken with the opposite sign. Under these assumptions, $\lambda(t)$ is the hidden Markov process.

A comparison of the estimates of fixed dead time obtained (observations obtained as a result of a simulation model of the flow of events MAP) by the method of maximum likelihood and the method of moments.

REFERENCES

1. Gortsev, A.M. & Solov'ev, A.A. (2014) Joint Probability Density of Interarrival Interval of a Flow of Physical Events with Unextendable Dead Time Period. *Russian Physics Journal*. 57(7). pp. 973-983. DOI: 10.1007/s11182-014-0333-4
2. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Soloviev, A.A. (2012) Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. *Automation and Remote Control*. 73(8). pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
3. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2005) Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal*. 48(10). pp. 1039-1054. DOI: 10.1007/s11182-006-0023-y
4. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotekhnika*. 10. pp. 8-16.
5. Vasil'eva, L.A. & Gortsev, A.M. (2003) Estimation of the dead time of an asynchronous double stochastic flow of events under incomplete observability. *Automation and Remote Control*. 64(12). pp. 1890-1898. DOI: 10.1023/B:AURC.0000008427.99676.df
6. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
7. Gortsev, A.M. & Parshina, M.E. (1999) Estimation of parameters of an alternate stream of events in "dead" time conditions. *Russian Physics Journal*. 42(4). pp. 373-378.
8. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1996) Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow. *Radiotekhnika*. 2. pp. 8-11.
9. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) An estimate for intensity of Poisson flow of events under the condition of its partial missing. *Radiotekhnika*. 12. pp. 3-7.
10. Gortsev, A.M., Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (1978) *Upravlenie i adaptatsiya v sistemakh massovogo obsluzhivaniya* [Control and adaptation in queueing systems]. Tomsk: Tomsk State University.
11. Bushlanov, I.V. & Gortsev, A.V. (2004) Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 65(9). pp. 1389-1399. DOI: 10.1023/B:AURC.0000041418.09187.63
12. Bushlanov, I.V. & Gortsev, A.V. (2004) Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events. *Avtomatika i Telemekhanika*. 9. pp. 40-51. DOI: 10.1023/B:AURC.0000041418.09187.63
13. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999) Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants. *Automation and Remote Control*. 60(1). pp. 41-51.
14. Gortsev, A.M., Nezhel'skaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal*. 36(12). pp. 1153-1167.
15. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21(3). pp. 283-290. DOI: 10.4213/dm1141
16. Bushlanov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2008) Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 69 (9). pp. 1517-1533. DOI: 10.1134/S0005117908090075
17. Vasil'eva, L.A. & Gortsev, A.M. (2003) Dead-time interval estimation of incompletely observable asynchronous bistochastic flow of events. *Avtomatika i Telemekhanika*. 12. pp. 69-79.
18. Vasil'eva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002) Parameter estimation of a doubly stochastic flow of events under incomplete observability. *Avtomatika i Telemekhanika*. 3. pp. 179-184.
19. Vasil'eva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002) Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability. *Automation and Remote Control*. 63(3). pp. 511-515.
20. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999) Optimal estimate of the parameters of a twice stochastic poisson stream of events with errors in measuring times the events occur. *Russian Physics Journal*. 42(4). pp. 385-393. DOI: 10.1007/BF02509674
21. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (1996) Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method. *Telecommunications and Radio Engineering*. 50(1). pp. 56-63.
22. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (1995) Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments. *Radiotekhnika*. 40(7-8). pp. 6-10.
23. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1993) Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events. *Telecommunications and Radio Engineering*. 48(10). pp. 40-45.
24. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1992) Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable. *Telecommunications and Radio Engineering*. 47(10). pp. 33-38.
25. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavsky, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [Statistical analysis of stochastic flows in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
26. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time at a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 13-21. (In Russian).
27. Gortsev, A.M., Leonova, M.A., Nezhelskaya, L.A. (2013) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32-42. (In Russian).
28. Leonova, M.A., Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54-63. (In Russian).
29. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical Statistics]. Part 1. Tomsk: NTL.