ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2015 Математика и механика № 6(38)

УДК 512.541.32
DOI 10.17223/19988621/38/2

С.Я. Гриншпон, С.Л. Фуксон

ОТНОШЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ В МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЕ $\mathbb{Q}_+$

В марте 2013 года International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences опубликовал статью «Perpendicularity in an Abelian Group». Основная цель статьи – введение понятия бинарного отношения ортогональности в произвольной абелевой группе. Данная работа посвящена ортогональностям в мультипликативной группе $\mathbb{Q}_+$. Нами найдены два способа построения бесконечного множества новых ортогональностей $\mathbb{Q}_+$, а также установлена связь между известными ранее и полученными нами ортогональностями $\mathbb{Q}_+$.

Ключевые слова: *ортогональность*, *абелева группа*, *отношение делимости в* $\mathbb{Q}_+$, *свободная абелева группа.*

Всё больше геометрические понятия проникают в пространство изучения алгебры. Отношение ортогональности в различных алгебраических структурах вызывает интерес математиков. Так, например, Davis изучает ортогональность в кольцах [1], им также предложен интересный подход к введению ортогональности в абелевых группах [2]. О понятии ортогональности в орторешётках см. [3] и [4]. Ортогональность элементов определяется также в любой *l*-группе (то есть в группе, на которой можно задать структуру решётки, согласованную с операцией в группе) [5]. В [5] отмечается, что понятие ортогональности играет важную роль во всей теории *l*-групп. В [6] полностью исследованы ортогональности в прямых суммах циклических групп вида $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, где p – простое число. Цель данной работы – получить некоторые результаты об ортогональностях мультипликативной абелевой группы положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}_+$.

В [7] Haukkanen и другие вводят понятие ортогональности в абелевой группе с помощью аксиом, которые оказываются вполне естественными, если придать им геометрическую интерпретацию.

Пусть $G = (G,+)$ – аддитивная абелева группа. Пусть $\perp$ – бинарное отношение в G, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(A1) $\forall a \in G : \exists b \in G : a \perp b,$

(A2) $\forall a \in G \setminus \{0\} : a \not\perp a,$

(A3) $\forall a,b \in G : a \perp b \Rightarrow b \perp a,$

(A4) $\forall a,b,\mathrm{c} \in G : a \perp b \wedge a \perp c \Rightarrow a \perp (b+c),$

(A5) $\forall a,b \in G : a \perp b \Rightarrow a \perp -b.$

Отношение $\perp$ называется *ортогональностью* в G [7].

Так как в настоящей работе будет рассматриваться мультипликативная группа, то аксиомы (A2), (A4), (A5) лучше переписать в следующем виде:

$$\text{(A2)} \quad \forall a \in G \setminus \{1\} : a \not\perp a,$$

$$\text{(A4)} \quad \forall a,b,c \in G : a \perp b \wedge a \perp c \Rightarrow a \perp (b \cdot c),$$

$$\text{(A5)} \quad \forall a,b \in G : a \perp b \Rightarrow a \perp b^{-1}.$$

Авторы [7] приводят различные примеры ортогональностей, исследуют ортогональности циклической группы $\mathbb{Z}_n$ и строят некоторые ортогональности мультипликативной группы $\mathbb{Q}_+$, где $\mathbb{Q}_+$ – множество положительных рациональных чисел. Авторы утверждают, что группа $\mathbb{Q}_+$ обладает, как минимум, тремя ортогональностями и затем изучают их взаимосвязи. В настоящей статье мы приводим доказательства некоторых результатов, сформулированных в [7], показываем, что авторами [7] была допущена ошибка при построении одной из трёх ортогональностей, а также строим двумя способами бесконечное множество новых ортогональностей $\mathbb{Q}_+$.

1. Известные ортогональности в $\mathbb{Q}_+$

Пусть $\mathbb{P}$ – множество простых чисел.

Очевидно, что любое рациональное положительное число может быть записано в виде

$$c = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(c)} ,$$

где $\nu_p(c) \in \mathbb{Z}$ для каждого $p \in \mathbb{P}$ и лишь конечное число из них ненулевые. Если $\nu_p(c) \neq 0$, то p – *простой множитель* c.

Рассмотрим множество S всех последовательностей $(n_2, n_3, \ldots, n_p, \ldots)$, где индекс пробегает множество простых чисел и каждое $n_p \in \mathbb{Z}$. На множестве S определим операцию почленного сложения. Получаем аддитивную группу $\langle S;+\rangle$. $\langle S;+\rangle$ – свободная абелева группа счётного ранга [8, т. 1, с. 89]. С каждым элементом группы $\mathbb{Q}_+$ связана последовательность целых чисел из S. Так, числу c ставится в соответствие последовательность $(\nu_2(c), \nu_3(c), \ldots, \nu_p(c), \ldots)$.

В [7] приводятся без доказательства следующие утверждения (предложение 1, теорема 3, теорема 5). Приведём эти утверждения и их доказательства.

Предложение 1. Отображение $f : c \to (\nu_2(c), \nu_3(c), \ldots, \nu_p(c), \ldots)$ является изоморфизмом группы $\langle \mathbb{Q}_+; \cdot\rangle$ на группу $\langle S;+\rangle$.

Доказательство. 1) Очевидно, что каждый элемент из $\langle S;+\rangle$ является образом элемента из $\langle \mathbb{Q}_+; \cdot\rangle$.

2) Разные элементы $\langle \mathbb{Q}_+; \cdot\rangle$ переводятся в разные элементы $\langle S;+\rangle$, поскольку разные рациональные числа имеют либо разные простые множители, либо разные показатели при этих множителях.

3) Покажем, что f сохраняет операцию. Пусть $a, b \in \mathbb{Q}_+$, тогда

$$a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(a)}, \quad b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(b)}.$$

$$f(a \cdot b) = f\left(\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(a)+\nu_p(b)} \right) = \left(\nu_2(a) + \nu_2(b), \ldots, \nu_p(a) + \nu_p(b), \ldots \right) =$$
$$= \left(\nu_2(a), \ldots, \nu_p(a), \ldots \right) + \left(\nu_2(b), \ldots, \nu_p(b), \ldots \right) = f(a) + f(b). \qquad \blacksquare$$

Каждый элемент S часто называют вектором.

Определение 2[7]. Скалярным произведение чисел a и b будем называть скалярное произведение векторов $f(a)$ и $f(b)$:

$$\langle a, b \rangle = \langle f(a), f(b) \rangle = \sum_{p \in \mathbb{P}} \nu_p(a) \nu_p(b).$$

Определим $|c|$, положив $\nu_p(|c|) = |\nu_p(c)|$ для всех $p \in \mathbb{P}$ [7].

Определим бинарное отношение $\perp_1$ следующим образом:

$$a \perp_1 b \Leftrightarrow \langle |a|, |b| \rangle = 0 \ \ [7].$$

Теорема 3. Отношение $\perp_1$ является ортогональностью группы $\mathbb{Q}_+$.

Доказательство.

(A1) В роли b достаточно взять $b = 1 = 2^0 \cdot 3^0 \cdot \ldots \cdot p^0 \cdot \ldots$,

$$f(|b|) = (0, 0, \ldots) \Rightarrow \forall a \in G \left(\langle |a|, |b| \rangle = \sum_{p \in \mathbb{P}} |\nu_p(a)| \cdot 0 = 0 \right).$$

(A2) $$\langle |a|, |a| \rangle = \sum_{p \in \mathbb{P}} |\nu_p(a)|^2 = 0 \Leftrightarrow \forall p \, \nu_p(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

(A3) $$\sum_{p \in \mathbb{P}} |\nu_p(a)| |\nu_p(b)| = 0 \Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{P}} |\nu_p(b)| |\nu_p(a)| = 0.$$

(A4) $$\sum_{p \in \mathbb{P}} |\nu_p(a)| |\nu_p(b)| = 0 \Rightarrow \forall p \ (\nu_p(a) = 0 \vee \nu_p(b) = 0),$$

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} |\nu_p(a)| |\nu_p(c)| = 0 \Rightarrow \forall p (\nu_p(a) = 0 \vee \nu_p(c) = 0),$$

следовательно, $\sum_{p \in \mathbb{P}} |\nu_p(a)| |\nu_p(b \cdot c)| = 0.$

(A5) $$\sum_{p \in \mathbb{P}} |\nu_p(a)| |\nu_p(b)| = 0 \Rightarrow \forall p \ (|\nu_p(a)| = 0 \vee |\nu_p(b)| = 0).$$

$$|\nu_p(b)| = 0 \Rightarrow \left| \nu_p\left(b^{-1}\right) \right| = 0 \Rightarrow \sum_{p \in \mathbb{P}} |\nu_p(a)| \left| \nu_p\left(b^{-1}\right) \right| = 0.$$

Таким образом, бинарное отношение $\perp_1$ является ортогональностью группы $\mathbb{Q}_+$. $\blacksquare$

Пример 4. Пусть $a=\frac{49}{50}$, $b=\frac{1}{3}$.

$$a=2^{-1}\cdot 5^{-2}\cdot 7^{2},\quad b=3^{-1},$$

$$|a|=2^{1}\cdot 5^{2}\cdot 7^{2}=2450,\quad |b|=3^{1}=3,$$

$$f(a)=(-1,0,-2,2,0,0,\ldots),\quad f(b)=(0,-1,0,0,\ldots),$$

$$f(|a|)=(1,0,2,2,0,0,\ldots),\quad f(|b|)=(0,1,0,0,\ldots),$$

$$\langle |a|,|b|\rangle=1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0+2\cdot 0+0+\ldots=0.$$

Таким образом, $\frac{49}{50}\perp_1\frac{1}{3}$.

Теорема 5. Бинарное отношение $\perp_2$, определённое как

$$a\perp_2 b\Leftrightarrow\langle a,b\rangle=0,$$

является ортогональностью группы $\mathbb{Q}_+$.

Доказательство. Аксиомы (A1), (A2), (A3) проверяются аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 3. Покажем справедливость аксиом (A4) и (A5).

(A4) $$a\perp_2 b\wedge a\perp_2 c\Rightarrow\sum_{p\in\mathbb{P}}\nu_p(a)\nu_p(b)=\sum_{p\in\mathbb{P}}\nu_p(a)\nu_p(c)=0,$$

$$\sum_{p\in\mathbb{P}}\nu_p(a)\nu_p(b\cdot c)=\sum_{p\in\mathbb{P}}\nu_p(a)(\nu_p(b)+\nu_p(c))=$$
$$=\sum_{p\in\mathbb{P}}\nu_p(a)\nu_p(b)+\sum_{p\in\mathbb{P}}\nu_p(a)\nu_p(c)=0.$$

(A5) $$a\perp_2 b\Rightarrow\sum_{p\in\mathbb{P}}\nu_p(a)\nu_p(b)=0\Rightarrow-\sum_{p\in\mathbb{P}}\nu_p(a)\nu_p(b)=0\Rightarrow a\perp_2 b^{-1}.$$

В силу справедливости аксиом (A1) – (A5), отношение $\perp_2$ является ортогональностью группы $\mathbb{Q}_+$. ■

Пример 6. $6\perp_2\frac{2}{3}$, однако $6\not\perp_1\frac{2}{3}$.

$$6=2^{1}\cdot 3^{1},\ \frac{2}{3}=2^{1}\cdot 3^{-1},$$

$$\left\langle 6,\frac{2}{3}\right\rangle=0\Rightarrow 6\perp_2\frac{2}{3},$$

$$\left\langle |6|,\left|\frac{2}{3}\right|\right\rangle=2\neq 0\Rightarrow 6\not\perp_1\frac{2}{3}.$$

Последняя ортогональность группы $\mathbb{Q}_+$, указанная в [7], связана с работой Eugeni и Rizzi [3]. В этой работе авторы определяют отношение делимости в $\mathbb{Q}_+$ следующим образом:

$$\frac{n}{v}\gamma\frac{m}{u}\Leftrightarrow n\mid m\wedge v\mid u.$$

Замечание 7 [3]. Для любых двух чисел $a,b \in \mathbb{Q}_+$ существует $\text{НОД}_\gamma(a,b)$, такой, что

$$d = \text{НОД}_\gamma\left(\frac{m}{u},\frac{n}{v}\right) = \frac{\text{НОД}(m,n)}{\text{НОД}(u,v)}.$$

Авторы [7] определяют отношение $\perp_{ER}$ следующим образом:

$$a \perp_{ER} b \Leftrightarrow \text{НОД}_\gamma(a,b) = 1 \Leftrightarrow \text{НОД}(m,n) = \text{НОД}(u,v) = 1.$$

В [7] утверждается, что $\perp_{ER}$ – ортогональность. Однако, проверяя, является ли $\perp_{ER}$ ортогональностью, мы приходим к противоречию с аксиомой (A5): из того, что $a = \frac{m}{u}$, $b = \frac{n}{v}$, $\left(b^{-1} = \frac{v}{n}\right)$ и $(m,n) = (u,v) = 1$, не всегда следует $(m,v) = (u,n) = 1$.

Пример 8. Пусть $a = \frac{2}{9}, b = \frac{3}{16} (b^{-1} = \frac{16}{3})$.

$$НОД_\gamma\left(\frac{2}{9},\frac{3}{16}\right) = 1 \Rightarrow a \perp_{ER} b$$

Однако
$$НОД_\gamma\left(\frac{2}{9},\frac{16}{3}\right) \neq 1 \Rightarrow a \not\perp_{ER} b^{-1}.$$

2. Новые способы построения ортогональности в $\mathbb{Q}_+$

Нам удалось построить бесконечное множество ортогональностей мультипликативной группы $\mathbb{Q}_+$ следующими двумя способами.

Рассмотрим произвольную последовательность положительных действительных чисел $K = \{k_i\}$. Обозначим через p_i i-е простое число. Для любых $a,b \in \mathbb{Q}_+$ можно составить следующую сумму:

$$s_{a,b} = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \nu_{p_i}(a) \cdot \nu_{p_i}(b),$$

где лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

Зададим отношение $\perp_K$ следующим образом:

$$a \perp_K b \Leftrightarrow s_{a,b} = 0.$$

Теорема 9. Для произвольной последовательности $K = \{k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ положительных действительных чисел отношение $\perp_K$ – ортогональность в $\mathbb{Q}_+$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную последовательность $\{k_i\}$.

(A1) Достаточно положить $b = 1$. Тогда

$$\forall a \in G, s = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \nu_{p_i}(a) \cdot \nu_{p_i}(1) = 0.$$

(A2) Так как $\forall i \quad k_i > 0$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \nu_{p_i}(a) \cdot \nu_{p_i}(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

(A3) $$\sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \nu_{p_i}(a) \cdot \nu_{p_i}(b) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \nu_{p_i}(b) \cdot \nu_{p_i}(a) = 0.$$

(A4) $$a \perp_K b \wedge a \perp_K c \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \nu_{p_i}(a) \cdot \nu_{p_i}(b) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \nu_{p_i}(a) \cdot \nu_{p_i}(c) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \nu_{p_i}(a) \cdot \nu_{p_i}(b \cdot c) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \nu_{p_i}(a) \cdot \left(\nu_{p_i}(b) + \nu_{p_i}(c)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \nu_{p_i}(a) \cdot \nu_{p_i}(b) + \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \nu_{p_i}(a) \cdot \nu_{p_i}(c) = 0.$$

(A5) $$a \perp_K b \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \nu_{p_i}(a) \cdot \nu_{p_i}(b) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \nu_{p_i}(a) \cdot \nu_{p_i}\left(b^{-1}\right) = -\sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot \nu_{p_i}(a) \cdot \nu_{p_i}(b) = 0 \Rightarrow a \perp_K b^{-1}.$$

Таким образом, отношение $\perp_K$ является ортогональностью в $\mathbb{Q}_+$.

Пример 10. Пусть $K = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$a = \frac{24}{625} = \frac{2^3 \cdot 3}{5^4}, \quad b = 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1,$$

$$f(a) = (3,1,-4,0,...), \quad f(b) = (2,3,1,0...),$$

$$s_{a,b} = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) \cdot 1 = 0.$$

Тогда $$a \perp_K b.$$

Рассмотрим второй способ построения бесконечного множества ортогональностей $\mathbb{Q}_+$. Пусть числа $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}_+$ такие, что для любых $s,t \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ выполняется $r_1^s \neq r_2^t$.

Для любых $a,b \in \mathbb{Q}_+$ положим

$$a \perp_{r_1,r_2} b \Leftrightarrow \exists u,v \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}: \left(a = r_1^u \wedge b = r_2^v\right) \vee \left(a = r_2^v \wedge b = r_1^u\right) \vee$$
$$a = 1 \vee b = 1.$$

Теорема 11. Отношение $\perp_{r_1,r_2}$ – ортогональность в $\mathbb{Q}_+$.

Доказательство. Проверим справедливость аксиом (A1) – (A5).

(A1) Положим $b = 1$. Из определения отношения $\perp_{r_1,r_2}$ следует, что для любого a справедливо $a \perp_{r_1,r_2} 1$.

(A2) Если предположить, что $a \perp_{r_1,r_2} a$ и $a \neq 1$, то $a = r_1^u = r_2^v$, однако $r_1^s \neq r_2^t$ ни для каких $s,t \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

(A3) очевидно.

(A4) $a \perp_{r_1,r_2} b \Rightarrow a = r_1^{\,u}, b = r_2^{\,v}$,

$a \perp_{r_1,r_2} c \Rightarrow a = r_1^{\,u}, c = r_2^{\,w}$.

Тогда

$$b \cdot c = r_2^{\,v} \cdot r_2^{\,w} = r_2^{\,v+w} \Rightarrow a \perp_{r_1,r_2} (b \cdot c).$$

(A5) $a \perp_{r_1,r_2} b \Rightarrow a = r_1^{\,u}, b = r_2^{\,v}$,

$b^{-1} = r_2^{\,-v} \Rightarrow a \perp_{r_1,r_2} b^{-1}$.

Таким образом, отношение $\perp_{r_1,r_2}$ – ортогональность в $\mathbb{Q}_+$.

Пример 12. Пусть $r_1 = \dfrac{2}{3}, r_2 = \dfrac{3}{5}$. Заметим, что для любых $s,t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ выполняется $r_1^{\,s} \neq r_2^{\,t}$. Предполагая противное, получаем, что для некоторых $s,t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^s = \left(\dfrac{3}{5}\right)^t$ или $2^s \cdot 3^{-s} = 3^t \cdot 5^{-t}$, что невозможно.

1) Пусть $a = \dfrac{8}{27} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3$, $b = \dfrac{9}{25} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$;

тогда $a \perp_{r_1,r_2} b$.

2) Пусть $a = \dfrac{3}{2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}$, $b = \dfrac{27}{125} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^3$;

тогда $a \perp_{r_1,r_2} b$.

3. Связь ортогональностей в $\mathbb{Q}_+$

В данном разделе мы ответим на вопрос, как ортогональности, описанные выше, соотносятся друг с другом.

Обозначим через R объединение всех $\perp_{r_1,r_2}$ ортогональностей, а через D – объединение всех $\perp_K$ ортогональностей. Имеет место следующая

Теорема 13. Всякая ортогональность $\mathbb{Q}_+$ содержится в R.

Доказательство. Пусть $a,b \in \mathbb{Q}_+$, $a \perp b$. Покажем, что существуют $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}_+$, удовлетворяющие условию $\forall s,t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} (r_1^{\,s} \neq r_2^{\,t})$, что $a \perp_{r_1,r_2} b$.

В роли r_1 достаточно взять a, а r_2 принять равным b. Тогда при $u = v = 1$ $a = r_1^{\,u}$ и $b = r_2^{\,v}$, а значит, $a \perp_{r_1,r_2} b$. Заметим, что $a^s \neq b^t$, используя предложение 1(d) из [7], имеем $a \perp b \Rightarrow a^s \perp b^t$. В силу антирефлексивности отношения ортогональности $a^s \neq b^t$. ■

Следствие 14. Объединение всех ортогональностей $\mathbb{Q}_+$ совпадает с R.

Докажем теорему о связи ортогональностей.

Теорема 15. Имеют место следующие включения:

$$\perp_1 \subset \perp_2 \subset D \subset R,$$

причём каждое из включений является строгим.

Доказательство. 1) Докажем $\perp_1 \subset \perp_2$.

Пусть $a \perp_1 b$.

$$a \perp_1 b \Rightarrow \sum_{p\in\mathbb{P}} \left|\nu_p(a)\right|\left|\nu_p(b)\right| = 0 \Rightarrow \forall p(\nu_p(a) = 0 \vee \nu_p(b) = 0) \Rightarrow$$

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \nu_p(a)\nu_p(b) = 0 \Rightarrow a \perp_2 b.$$

Пример 6 иллюстрирует, что обратное включение не имеет места, а значит, включение $\perp_1 \subset \perp_2$ является строгим.

2) Докажем включение $\perp_2 \subset D$.

Пусть $a \perp_2 b$. Покажем, что найдётся такая последовательность $K = \{k_i\}$, что $a \perp_K b$.

$a \perp_2 b \Rightarrow \sum_{p\in\mathbb{P}} \nu_p(a)\nu_p(b) = 0 \Rightarrow \exists\{k_i\} : \sum_{i=1}^{\infty} k_i \nu_{p_i}(a)\nu_{p_i}(b) = 0$, в частности, при $\{k_i\} = \{1\}$ $a \perp_K b$.

Для доказательства того, что $D \not\subset \perp_2$, приведём пример.

Пример 16. Пусть $K = \{k_i\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$a = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^9, \quad b = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^{-2},$$

$$f(a) = (1,2,9,0...), \quad f(b) = (4,2,-2,0...),$$

$$s_{a,b} = 1\cdot 1\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 9\cdot(-2) = 0,$$

следовательно, $a \perp_K b$. Заметим, что $a \not\perp_2 b$, а значит, включение $\perp_2 \subset D$ строгое.

3) $D \subset R$ в силу теоремы 13. Обратное включение неверно.

Так, например, пусть $r_1 = \frac{2}{9}$, $r_2 = \frac{2}{5}$ ($\forall s, \mathrm{t} \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} : r_1^s \neq r_2^t$).

Пусть $a = r_1 = \frac{2}{9}$, $b = r_2 = \frac{2}{5}$, тогда $a \perp_{r_1,r_2} b$, так как $a = r_1^1$, $b = r_2^1$.

Однако, так как $f(a) = (1,-2,0,0...)$, $f(b) = (1,0,-1,0...)$, то ни при какой последовательности $K = \{k_i\}$, где каждый её член строго больше нуля, $\sum_{p\in\mathbb{P}} k_i \nu_p(a)\nu_p(b) \neq 0 \Rightarrow a \not\perp_k b$.

Таким образом, включение $D \subset R$ строгое.

Каждое из включений обосновано, теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Davis G*. Rings with orthogonality relation // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1971. V. 4. P. 163–178.
2. *Davis G*. Orthogonality relation on abelian groups // Journal of the Australian Mathematical Society. Series A. 1975. V. 19. P. 173–179.
3. *Eugeni F.*, *Rizzi B*. An incidence algebra on rational numbers // Rendiconti di Matematica. 1979. V. 12.

4. *Birkhoff G*. Lattice theory. Rhode Island: Providence, 1965.
5. *Копытов В.М*. Решёточно-упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.
6. *Фуксон С.Л*. Ортогональности группы $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 46–54.
7. *Haukkanen P*., *Mattila M*., *Merikoski J. K*., *Tossavainen T*. Perpendicularity in an Abelian group // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2013. V. 13.
8. *Фукс Л*. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974. 335 с.

Статья поступила 27.09.2015 г.

Grinshpon S.Ya., *Fukson S.L*. ORTHOGONALITIES IN THE MULTIPLICATIVE GROUP $\mathbb{Q}_+$

DOI 10.17223/19988621/38/2

The relation of orthogonality in various algebraic structures arouses the interest of mathematicians. For example, Davis proposed an interesting approach to the introduction of orthogonality in Abelian groups (Orthogonality relation on Abelian groups. Journal of the Australian Mathematical Society. Series A, vol. 19, 1975); F. Eugeni, B. Rizzi (An incidence algebra on rational numbers. Rendiconti di Matematica, vol. 12, 1979) and G. Birkhoff (Lattice theory. Providence. Rhode Island, 1965) explored orthogonality in ortholattices; Kopytov V.M. (Lattice-Ordered Groups, Nauka, Moscow, 1984) notes that the concept of orthogonality plays an important role in the whole theory of l-groups.

Haukkanen and others (Perpendicularity in an Abelian group. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. 13, 2013) introduced the concept of orthogonality in an Abelian group with the help of axioms.

The purpose of the present paper is to get some results about orthogonalities in the multiplicative Abelian group of positive rational numbers. We describe the known orthogonalities of and show that one of the relations of that was introduced in the article of Haukkanen is not an orthogonality. We construct an infinite set of new orthogonalities in by two different ways.

Keywords: orthogonality, Abelian group, divisibility in $\mathbb{Q}_+$, free Abelian group.

GRINSHPON Samuil Yakovlevich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: grinshpon@math.tsu.ru

FUKSON Sof'ya Leonidovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: fouk.son.ya@gmail.com

REFERENCES

1. Davis G. Rings with orthogonality relation. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1971, vol. 4, pp. 163–178.
2. Davis G. Orthogonality relation on abelian groups. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series A*, 1975, vol. 19, pp. 173–179.
3. Eugeni F., Rizzi B. An incidence algebra on rational numbers. *Rendiconti di Matematica*, 1979, vol. 12.
4. Birkhoff G. *Lattice theory*. Rhode Island, Providence, 1965.
5. Kopytov V.M. *Reshetochno-uporyadochennye gruppy*. Moskow, Nauka Publ., 1984. (in Russian)
6. Fukson S.L. Ortogonal'nosti gruppy $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 4(36), pp. 46–54. (in Russian)
7. Haukkanen P., Mattila M., Merikoski J.K., Tossavainen T. Perpendicularity in an Abelian group. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2013, vol. 13.
8. Fuks L. *Beskonechnye abelevy gruppy, vol. 1*. Moskow, Mir Publ., 1974. 335 p. (in Russian)