

МЕХАНИКА

УДК 532.525:541.12.012

DOI 10.17223/19988621/38/8

И.М. Васенин, Н.Н. Дьяченко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ
ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

Работа посвящена моделированию течения двухфазной среды в энергосистемах, рабочим телом которых являются продукты сгорания металлизированных топлив. Описание взаимодействия частиц дискретной фазы базируется на непрерывном подходе. В рамках предлагаемой модели представлен численный расчёт течения двухфазной среды в сопле РДТТ.

Ключевые слова: *двухфазное течение, полидисперсный ансамбль частиц, коагуляция, дробление, энергия флуктуаций.*

Продукты сгорания металлизированного топлива представляют смесь газа и полидисперсного ансамбля жидких частиц оксида металла, используемого в качестве добавки в топливе. Подавляющее большинство исследователей для описания дискретной фазы используют одномерную функцию распределения частиц по размерам, подробный библиографический список этих работ представлен в обзорах [1, 2] и монографии [3]. В процессе движения частицы разных размеров сталкиваются, это сопровождается их слиянием и дроблением, кроме этого, крупные частицы дробятся за счёт взаимодействия с газом. Следовательно, частицы, имеющие равные размеры, но разную предысторию («рождённые» за счёт слияния, дробления и не участвующие во взаимодействии) отличаются друг от друга импульсом и энергией. Решение задачи двухфазного течения в данном случае требует введения функции распределения частиц не только по размерам, но и по скоростям и температурам внутри каждой фракции.

По данному пути пошли авторы работы [4]. Перераспределение энергии сталкивающихся частиц внутри фракции учитывается через энергию хаотического движения частиц. Последующее развитие этой модели представлено в [5]. Работа [4] базируется на дискретной модели взаимодействия частиц. Попытка построения статистической модели с использованием непрерывного подхода описания взаимодействия частиц предпринята авторами работы [6]. Однако надо отметить, что операция осреднения ансамбля частиц по параметрам в этой работе проводится формально и, зачастую, не согласуется с физическим смыслом.

Целью данной работы является рассмотреть течение газо-капельной среды в рамках статистической модели с использованием непрерывного подхода описания взаимодействия частиц жидкой фазы.

1. Кинетический подход моделирования дисперсной среды

Для описания полидисперсного ансамбля жидких частиц в многомерном фазовом пространстве введем функцию распределения $f = f(m, \mathbf{U}, T, \mathbf{r}, t)$, где m, \mathbf{U}, T – масса, скорость, температура частиц; \mathbf{r}, t – пространственная и временная координаты. Кинетическое уравнение для функции распределения запишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{U} \nabla_r f + \nabla_U \frac{\mathbf{F}}{m} f + \frac{\partial}{\partial T} \frac{q}{cm} f = I. \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{F} – сила, действующая на частицу со стороны несущей среды; q – тепловой поток между частицей и несущей средой; c – теплоемкость материала частицы; ∇_r, ∇_U – операторы градиента в физическом и скоростном пространствах; $f = f(m, \mathbf{U}, T, \mathbf{r}, t)$ – введена для краткости записи; I – интеграл столкновения.

Рассмотрим уравнение (1.1) при фиксированном значении массы m , которая входит в него как параметр. Индивидуальную скорость частицы можно представить в виде суммы средней \mathbf{U}_0 и пульсационной составляющей \mathbf{U}' скорости частиц массой m : $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}'$.

Также можно ввести среднюю T_0 и пульсационную составляющую T' температуры для частиц массой m : $T = T_0 + T'$.

Уравнение (1.1) в новых переменных \mathbf{U}', T' запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{U}' \nabla_r f - \frac{d\mathbf{U}_0}{dt} \nabla_{U'} f - \mathbf{U}' \nabla_U f : \nabla_r \mathbf{U}_0 + \nabla_{U'} \left(\frac{\mathbf{F}}{m} f \right) - \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial f}{\partial T'} - \\ - \frac{\partial f}{\partial T'} \mathbf{U}' \nabla_r T_0 + \frac{\partial}{\partial T'} \left(\frac{q}{cm} f \right) = I, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\nabla_{U'}$ – оператор градиента в пространстве пульсационных скоростей; $(:)$ – двойное тензорное умножение; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_0 \nabla_r$.

Для получения системы уравнений, описывающей течение полидисперсной среды, вводится понятие признака частиц. Признаком может быть любая величина, характеризующая частицу и переносимая вместе с ней $\Psi = \Psi(m, \mathbf{U}, T, \mathbf{r}, t)$. Среднее значение признака частиц $\langle \Psi \rangle$ по ансамблю частиц с массами $(m, m + dm)$ определим равенством

$$\langle \Psi(m) \rangle = \int_0^\infty dT \int_{-\infty}^\infty \Psi f d\mathbf{U} / \int_0^\infty dT \int_{-\infty}^\infty f d\mathbf{U}.$$

Умножая кинетическое уравнение (1.2) на признак Ψ и интегрируя по всему пространству скоростей и температур, получим уравнение переноса признака частиц

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (f(m) \langle \Psi(m) \rangle) + f(m) \langle \Psi(m) \rangle \nabla_r \mathbf{U}_0 + \nabla_r (f(m) \langle \Psi(m) \mathbf{U}' \rangle) - \\ - f(m) \left[\left\langle \frac{d\Psi(m)}{dt} \right\rangle + \langle \mathbf{U}' \nabla_r \Psi(m) \rangle + \left(\frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{m} - \frac{d\mathbf{U}_0}{dt} \right) \langle \nabla_{U'} \Psi(m) \rangle - \langle \nabla_{U'} \Psi(m) \mathbf{U}' \rangle : \nabla_r \mathbf{U}_0 + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{cm} \left\langle q \frac{\partial \Psi(m)}{\partial T'} \right\rangle - \frac{dT_0}{dt} \left\langle \frac{\partial \Psi(m)}{\partial T'} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Psi(m)}{\partial T'} \mathbf{U}' \right\rangle \nabla_r T_0 = \Delta \langle \Psi(m) \rangle, \quad (1.3)$$

где $\Delta \langle \Psi(m) \rangle = \int \int \Psi I dT' d\mathbf{U}'$ представляет собой выражение для скорости изменения признака Ψ -частиц массой m за счёт столкновений.

Подставив в уравнение (1.3) в качестве признака частиц моменты скорости $(\mathbf{U}', U'U', \dots)$, температуры (T', TT', \dots) , смешанные моменты $(T'\mathbf{U}', TT'U', \dots)$, получим систему моментных уравнений. В работе [4] показано, что при исследовании течения продуктов сгорания металлизированных топлив в камере сгорания и сопловом блоке РДТТ можно ограничиться рассмотрением системы уравнений, включающей моменты второго порядка. Многократные интегралы в правой части уравнения (1.3), описывающие скорость изменения признака Ψ вследствие столкновений, в общем случае слишком сложны для практических приложений. Однако, если предположить, что изменение признака Ψ при столкновении определяется только средними параметрами сталкивающихся фракций, их можно записать в упрощенном виде. Итак, пусть функция распределения сталкивающихся частиц зависит только от массы этих частиц. В этом случае число и параметры образующихся при столкновении осколков будут зависеть только от масс взаимодействующих частиц. Плотность распределения осколков, образующихся при столкновении частиц с массами m_1 и m_2 по массам m , обозначим $\Phi(m, m_1, m_2)$.

С целью упрощения дальнейших рассуждений умножим левую и правую части уравнения (1.3) на dm . Полученное дифференциальное равенство представляет собой выражение для скорости изменения признака частиц из диапазона $[m, m + dm]$. Найдем вклад, который вносят в это выражение осколки сталкивающихся частиц. Для этого вычислим число столкновений между частицами с массами из диапазонов $[m_1, m_1 + dm_1]$ и $[m_2, m_2 + dm_2]$. Каждая частица массы m_2 обтекается «жидкостью» из частиц массы m_1 . Объем «жидкости», обтекающей частицу за единицу времени, равен $\mathcal{E}(m_1, m_2) \pi(r_1 + r_2)^2 |U_0(m_1) - U_0(m_2)|$, где $\mathcal{E}(m_1, m_2)$ – коэффициент, учитывающий изменение траектории малых частиц.

В единице объема содержится $f(m_1)dm_1$ частиц из диапазона $[m_1, m_1 + dm_1]$ и $f(m_2)dm_2$ частиц из диапазона $[m_2, m_2 + dm_2]$. Поэтому на одну частицу массы m_2 в единицу времени приходится $\mathcal{E}(m_1, m_2) \pi(r_1 + r_2)^2 |U_0(m_1) - U_0(m_2)| f(m_1)dm_1$ столкновений с частицами из диапазона $[m_1, m_1 + dm_1]$. Суммарное число столкновений в единицу времени в единице объема между частицами из рассмотренных диапазонов будет

$$\mathcal{E}(m_1, m_2) \pi(r_1 + r_2)^2 |U_0(m_1) - U_0(m_2)| f(m_1)dm_1 f(m_2)dm_2. \quad (1.4)$$

Число осколков массы m , попадающих в диапазон $[m, m + dm]$ при каждом столкновении, согласно сказанному выше, $\Phi(m, m_1, m_2)dm$.

Эти осколки приносят во фракцию частиц из диапазона $[m, m + dm]$ количество признака Ψ , равное

$$\langle \Psi \rangle \Phi(m, m_1, m_2)dm. \quad (1.5)$$

Перемножая (1.4), (1.5) и интегрируя по всем массам сталкивающихся частиц, найдем вклад в изменение признака $\langle \Psi \rangle$ осколков столкновений

$$dm \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty k(m_1, m_2) \langle \Psi \rangle \Phi(m, m_1, m_2) f(m_1) f(m_2) dm_1 dm_2. \quad (1.6)$$

Здесь $k(m_1, m_2) = \mathfrak{D}(m_1, m_2) \pi(r_1 + r_2)^2 |U_0(m_1) - U_0(m_2)|$.

Столкновение частиц массы m с другими частицами приводит к их уничтожению, следовательно, скорость уноса признака $\langle \Psi \rangle$ определяется интегралом

$$-dm \int_0^\infty k(m, m_1) R \langle \Psi \rangle f(m) f(m_1) dm_1, \quad (1.7)$$

где оператор R записывается в соответствии с выбранной моделью взаимодействия. Объединяя (1.6), (1.7) и сокращая на величину dm , получим для скорости изменения признака $\langle \Psi \rangle$ в результате столкновений формулу

$$\Delta \langle \Psi \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty k(m_1, m_2) \langle \Psi \rangle \Phi(m, m_1, m_2) f(m_1) f(m_2) dm_1 dm_2 - \int_0^\infty k(m, m_1) R \langle \Psi \rangle f(m) f(m_1) dm_1. \quad (1.8)$$

2. Уравнение среды в случае непрерывной модели столкновения частиц

Согласно данной модели, при столкновении меньшей частицы – снаряда m_2 с большей частицей-мишенью m_1 – происходит изменение частицы мишени на величину $\Phi_{12} m_2$, где Φ_{12} или $\Phi(m_1, m_2)$ – коэффициент эффективности столкновений [3]. При этом указанное изменение массы вследствие статистического осреднения по большому числу подобных столкновений равномерно распределяется по всем n частицам фракции m_1 . Таким образом, изменение массы каждой частицы m_1 в среднем за одно столкновение будет равно Φ_{12}/n . Если, кроме того, предположить, что среднестатистическая масса образующихся мелких осколков равна массе частиц снарядов, то функция распределения вторичных частиц по массам можно представить в виде

$$\Phi(m, m_1, m_2) = n \delta \left(m - m_1 - \frac{\Phi_{12} m_2}{n} \right) + ((1 - \Phi_{12}) \delta(m - m_2)). \quad (2.1)$$

Чтобы быть последовательными, необходимо одновременно предположить, что при каждом столкновении с меньшими частицами уничтожаются все n частиц фракции m , в то время как при столкновении с частицами больших размеров уничтожается только одна такая частица. Подставим функцию $\Phi(m, m_1, m_2)$ в

правую часть соотношения (1.8). Заменим оператор $\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty () dm_1 dm_2$ на эквива-

лентные интегралы, либо $\int_0^\infty \left[\int_0^\infty () dm_1 \right] dm_2$, либо $\int_0^\infty \left[\int_0^{m_1} () dm_2 \right] dm_1$.

Оператор R запишем в виде

$$R = n[h(m_1) - h(m_1 - m)] + h(m_1 - m),$$

где h – единичная функция Хевисайда.

В результате из уравнения (1.3) для функции $f(m)$ получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(m)}{\partial t} + \nabla_r [f(m)U_0(m)] = \\ & = \int_0^\infty dm_2 \int_{m_2}^\infty k(m_1, m_2) n \delta\left(m - m_1 - \frac{\Phi_{12}m_2}{n}\right) f(m_1) f(m_2) dm_2 + \\ & + \int_0^\infty dm_1 \int_0^{m_1} k(m_1, m_2) \delta(m - m_2) (1 - \Phi_{12}) f(m_1) f(m_2) dm_2 - \\ & - n \int_0^m f(m) f(m_1) k(m, m_1) dm_1 - \int_m^\infty f(m) f(m_1) k(m, m_1) dm_1. \end{aligned}$$

При упрощении интегралов, содержащих $\delta\left(m - m_1 - \frac{\Phi_{12}m_2}{n}\right)$, сделаем замену

$\xi = m_1 + \frac{\Phi_{12}m_2}{n}$ и при больших n для вычисления m_1 из этого выражения вос-

пользуемся разложением $m_1 = \xi - \Phi(\xi, m_2) \frac{m_2}{n} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Полагая дополнительно, что частицы, которые сталкиваются с нулевой разностью скоростей, обязательно сливаются ($\Phi(m_1, m_2) = 1$), найдем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(m)}{\partial t} + \nabla_r [f(m)U_0(m)] = \\ & = \int_0^{\frac{mn}{1+n}} nk \left[\frac{m - \Phi(m_1, m_2) \frac{m_2}{n}, m_2}{1 + \frac{\partial \Phi(m_1, m_2)}{\partial m} \frac{m_2}{n}} \right] f\left(m - \frac{\Phi(m_1, m_2)}{n} m_2\right) f(m_2) dm_2 + \\ & + \int_m^\infty k(m_1, m) [1 - \Phi(m_1, m)] f(m) f(m_1) dm_1 - \\ & - n \int_0^m k(m, m_2) f(m) f(m_2) dm_2 - \int_m^\infty k(m, m_1) f(m) f(m_1) dm_1. \end{aligned}$$

Разлагая подынтегральное выражение в ряд по малому параметру $1/n$ и учитывая, что $k(m, m) = 0$ с точностью до величины $\sim 1/n^2$, получим уравнение для функции $f(m)$ в случае непрерывной модели столкновений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(m)}{\partial t} + \nabla_r [U_0(m) f(m)] + \frac{\partial}{\partial m} [f(m) m_t] = \\ & = -f(m) \int_m^\infty k(m, m_1) \Phi(m, m_1) f(m_1) dm_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $m_t = \int_0^m k(m, m_2) \Phi(m, m_2) m_2 dm_2$ – скорость возрастания среднестатистической массы частиц фракции m .

В работе [5] уравнения движения и теплообмена непрерывной модели выводятся в допущении равновесной модели столкновений. При этом предполагается, что количество движения и температура частиц фракции m_1 при столкновении с меньшими частицами m_2 изменяется так, как будто происходит столкновение частиц из диапазона $[m_1, m_1 + dm_1]$ с очень маленькими частицами с массой m_2/n . Полученные уравнения совпадают с известными уравнениями непрерывной модели [3]. Однако данный подход противоречит физическому смыслу. Более логичным является такой способ вывода этих уравнений, при котором сначала вычисляется изменение признака при индивидуальном столкновении частиц с массами m_1 и m_2 , а затем с учетом большого числа подобных столкновений проводится статистическое осреднение этой величины по всем частицам фракции m . Для иллюстрации данного способа рассмотрим подробнее вывод уравнения движения.

В результате равновесного обмена количеством движения скорости изменения признака U частиц после столкновения будут равны

$$V(m, m_1, m_2) = \frac{m_1 U_0(m_1) + m_2 U_0(m_2)}{m_1 + m_2},$$

$$\begin{aligned} V(m, m_1, m_2) - U_0(m) &= \frac{m_1 U_0(m_1) + m_2 U_0(m_2)}{m_1 + m_2} - U_0(m_1) + [U_0(m_1) - U_0(m)] = \\ &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} [U_0(m_2) - U_0(m_1)] + [U_0(m_1) - U_0(m)]. \end{aligned}$$

Предполагая, что изменение массы $\Delta m = \Phi(m_1, m_2) m_2$ при столкновении мало, приближенно запишем

$$U_0(m_1) - U_0(m) \approx -\frac{\partial U_0(m)}{\partial m} \Phi(m_1, m_2) m_2.$$

Тогда получим

$$V(m, m_1, m_2) - U_0(m) \approx \frac{m_2}{m_1 + m_2} [U_0(m_2) - U_0(m_1)] - \frac{\partial U_0(m)}{\partial m} \Phi(m_1, m_2) m_2.$$

При статистическом усреднении этого приращения по всем частицам фракции m найдем, что каждая частица фракции получит приращение признака за счет одного столкновения, равное

$$\frac{V - U_0(m)}{n} \approx \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{[U_0(m_2) - U_0(m_1)]}{n} - \frac{\partial U_0(m)}{\partial m} \Phi(m_1, m_2) \frac{m_2}{n}. \quad (2.3)$$

При столкновении частиц фракции m с более крупными частицами меняется только их число, но не масса. Поэтому для таких столкновений

$$V - U_0(m) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} [U_0(m_2) - U_0(m_1)]. \quad (2.4)$$

Используя (2.1), (2.3) и (2.4), уравнение движения запишем как

$$\begin{aligned}
 f(m) \frac{dU_{0i}(m)}{dt} + \nabla_r [f(m) \langle U_i U \rangle] - f(m) \frac{F_i}{m} = \\
 = \int_0^\infty dm_2 \int_{m_2}^\infty k(m_1, m_2) n \delta \left(m - m_1 - \frac{\Phi_{12} m_2}{n} \right) \times \\
 \times \left[\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{(U_{0i}(m_2) - U_{0i}(m_1))}{n} - \frac{\partial U_{0i}(m)}{\partial m} \frac{\Phi(m_1, m_2)}{n} \frac{m_2}{n} \right] \times \\
 \times f(m_1) f(m_2) dm_1 + \int_0^\infty dm_1 \int_0^{m_1} k(m_1, m_2) \delta(m - m_2) (1 - \Phi(m_1, m_2)) \times \\
 \times \frac{m_2}{m_1 + m_2} (U_{0i}(m_2) - U_{0i}(m_1)) f(m_1) f(m_2) dm_2.
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Используя свойства δ -функции и переходя затем к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим уравнение движения в рамках непрерывной модели

$$\begin{aligned}
 f(m) \frac{dU_{0i}(m)}{dt} + \nabla_r [f(m) \langle U_i U \rangle] + m_i f(m) \frac{\partial U_{0i}(m)}{\partial m} = \\
 = f(m) \frac{F_i}{m} + \int_0^m k(m, m_1) \frac{m_2}{m + m_2} (U_{0i}(m_2) - U_{0i}(m)) f(m) f(m_2) dm_2 + \\
 + \int_m^\infty k(m_1, m) (1 - \Phi(m_1, m)) \frac{m}{m_1 + m} (U_{0i}(m_1) - U_{0i}(m)) f(m) f(m_1) dm_1.
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Аналогичный подход приводит к уравнению для температуры частиц:

$$\begin{aligned}
 f(m) c \frac{dT_0(m)}{dt} + c \nabla_r [\langle T(m) U_i f(m) \rangle] + c m_i f(m) \frac{\partial T_0(m)}{\partial m} = \\
 = f(m) \frac{\langle q \rangle}{m} + \int_0^m k(m, m_2) (E(m_2) - E(m)) f(m) f(m_2) dm_2 + \\
 + \int_m^\infty k(m_1, m) (1 - \Phi(m_1, m)) (E(m_1) - E(m)) f(m) f(m_1) dm_1,
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $E(m_2) - E(m) = c \frac{m_2}{m_1 + m_2} (T_0(m_2) - T_0(m)) + \frac{m m_2}{(m + m_2)^2} \frac{(U(m_2) - U(m))^2}{2}$,

$$E(m_1) - E(m) = c \frac{m_1}{m + m_1} (T_0(m_1) - T_0(m)) + \frac{m m_1}{(m + m_1)^2} \frac{(U(m_1) - U(m))^2}{2}.$$

В уравнении движения частиц входят элементы тензора напряжений, энергия хаотического движения выражается через линейный инвариант этого тензора

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle U_i' U_i' \rangle.$$

Для вывода уравнения энергии хаотического движения воспользуемся уравнением переноса и для признака $\Psi = U_i' U_j'$ запишем уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(m) \langle U_i' U_j' \rangle}{\partial t} + \nabla_r [f(m) U_0(m) \langle U_i' U_j' \rangle] + \nabla_r [f(m) \langle U_i U_j U \rangle] - \\ & - \frac{f(m)}{m} (\langle F_i U_j \rangle + \langle F_j U_i \rangle) + f(m) [\langle U U_i \rangle \nabla_r U_{0j}(m) + \langle U U_j \rangle \nabla_r U_{0i}(m)] = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty k(m_1, m_2) \Phi(m, m_1, m_2) [V_i(m, m_1, m_2) - U_{0i}(m)] [V_j(m, m_1, m_2) - U_{0j}(m)] \times \\ & \times f(m_1) f(m_2) dm_1 dm_2 - \langle U_i' U_j' \rangle \int_0^\infty k(m, m_1) f(m) f(m_1) dm_1, \end{aligned}$$

просуммируем это уравнение при $i = j$. В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(m) \epsilon}{\partial t} + \nabla_r [f(m) U_0(m) \epsilon] + \nabla_r \left[f(m) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle U_i U_i U \rangle \right] + 2 \frac{\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} \rangle}{m} f(m) + \\ & + f(m) \sum_{i=1}^3 \langle U U_i \rangle \nabla_r U_{0i}(m) = -\epsilon(m) \int_0^\infty k(m, m_1) f(m) f(m_1) dm_1 + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty k(m_1, m_2) \Phi(m, m_1, m_2) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 [V_i - U_{0i}(m)]^2 f(m_1) f(m_2) dm_1 dm_2. \end{aligned}$$

В силу предположений равновесной модели вновь образовавшаяся частица массы m приобретает скорость и энергию пульсаций

$$U'(m) = \frac{m_1 U(m_1) + m_2 U(m_2)}{m_1 + m_2} - U_0(m); \quad \frac{|U'(m)|^2}{2}.$$

Распределив эту энергию путем усреднения по всем n частицам массы m_1 , найдем, что в результате такого столкновения эти частицы будут обладать энергией $\frac{|U'(m)|^2}{2n} + \epsilon(m_1)$, где $\epsilon(m_1)$ – энергия частицы m_1 до столкновения и образования осколков массы $m = m_1 + \frac{\Phi_{12}}{m} m_2$.

Одновременно в этой модели уничтожаются все n частицы массы m , поэтому уравнение для энергии хаотического движения примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \epsilon f(m)}{\partial t} + \nabla_r [f(m) \epsilon U_0(m)] + \nabla_r \left[f(m) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle U_i U_i U \rangle \right] + 2 \frac{\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} \rangle}{m} f(m) + \\ & + f(m) \sum_{i=1}^3 \langle U U_i \rangle \nabla_r U_{0i}(m) = \\ & = \int_0^\infty dm_2 \int_{m_2}^\infty k(m_1, m_2) n \delta \left(m - m_1 - \frac{\Phi_{12} m_2}{n} \right) \left[\frac{(V - U_0(m))^2}{2n} + \epsilon(m_1) \right] f(m_1) f(m_2) dm_2 + \\ & + \int_0^\infty dm_1 \int_0^{m_1} k(m_1, m_2) \delta(m - m_2) (1 - \Phi_{12}) \frac{|V - U_0(m)|^2}{2} f(m_1) f(m_2) dm_2 - \\ & - n \int_0^m \epsilon(m) k(m, m_1) f(m) f(m_1) dm_1 - \epsilon(m) \int_m^\infty k(m, m_1) f(m) f(m_1) dm_1. \end{aligned}$$

Используя свойства δ -функции, разлагая затем подынтегральное выражение в ряд по малому параметру $1/n$, получим уравнение для энергии хаотического движения в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \epsilon f(m)}{\partial t} + \nabla_r [f(m) \epsilon U_0(m)] + \nabla_r \left[f(m) \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle U_i U_i U \rangle \right] + 2 \frac{\langle FU \rangle}{m} + \\ & + f(m) \sum_{i=1}^3 \langle U U_i \rangle \nabla_r U_{0i}(m) + \frac{\partial}{\partial m} (\epsilon f(m) m_t) = \\ & = f(m) \int_0^m k(m, m_2) \left[\frac{m U_0(m) + m_2 U_0(m_2)}{m + m_2} - U_0(m) \right]^2 \frac{1}{2} f(m_2) dm_2 + \\ & + \int_m^\infty k(m_1, m) (1 - \Phi(m_1, m)) \left[\frac{m U_0(m) + m_1 U_0(m)}{m + m_1} \right]^2 \frac{1}{2} f(m) f(m_1) dm_1 - \\ & - \epsilon(m) \int_m^\infty f(m) f(m_1) k(m_1, m) dm_1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

К уравнениям (2.2), (2.6) – (2.8) добавим уравнение изменения массы

$$\frac{dm}{dt} = \int_0^m k(m_1, m_2) \Phi(m_1, m_2) m_2 f(m_2) dm_2. \quad (2.9)$$

В общем случае для расчёта энергии ϵ необходимо знать все компоненты тензора напряжений, исключением является квазиодномерный случай. Записывая систему уравнений (2.2), (2.6) – (2.9) для квазиодномерного течения и пренебрегая моментами третьего порядка, получим систему, которая является замкнутой и описывает поведение жидких частиц полидисперсного ансамбля.

3. Результаты численного расчета

В качестве примера использования предлагаемой модели проведен расчёт установившегося движения продуктов сгорания металлизированного топлива в сопле ракетного двигателя в квазиодномерной постановке. Математическая постановка задачи подробно представлена в работах [5, 6]. Уравнения для газовой фазы заимствованы из работы [3]. Коэффициенты и безразмерные критерии, определяющие взаимодействие частиц между собой и газом заимствованы из работ [3, 5]. Система уравнений решалась на основе обратной задачи. Для численного интегрирования системы уравнений газа использовался стационарный аналог нецентральной конечно-разностной схемы Мак-Кормака [7] второго порядка точности. Интегрирование системы уравнений фракции частиц осуществлялось с помощью неявной разностной схемы [8], имеющей также второй порядок точности. На входном сечении использовалось условие скоростного и температурного равновесия между газовой фазой и частицами. Течение рассчитывалось в квазиодномерной постановке для модельного радиусно-профилированного сопла [9]. Радиус скругления в горловине сопла $r = r_*$ (r_* – радиус минимального сечения сопла), углы поджатия: в дозвуковой области $\alpha_1 = 45^\circ$; в сверхзвуковой $\alpha_2 = 24^\circ$ и $\alpha_3 = 7^\circ$; в качестве металлической добавки топлива используется порошок алюминия.

Значение исходных параметров:

$$T_k = 3200 \text{ К}; P_k = 5.89 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\mu = 0.89 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}; R = 300 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}.$$

Непрерывная функция распределения частиц оксида алюминия по размерам на входе в сопло задавалась в виде нормально-логарифмического закона с параметрами: $r_0 = 1.4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ (средний радиус частиц); $\sigma = 1.5$ (дисперсия). Дробление частиц определяется двумя механизмами – взаимодействием с газом и взаимодействием между собой [5].

На рис. 1 представлен результат расчета изменения среднемассового размера частиц конденсата вдоль оси сопла x (здесь $x = L/r_*$, L – размерная длина сопла). В дозвуковой области сопла процесс коагуляции превосходит процесс дробления и достигает своего максимального значения в области критического сечения сопла. В транзвуковой области процесс дробления значительно превосходит процесс коагуляции, что влечет уменьшение среднемассового размера частиц. В сверхзвуковой области за счет уменьшения разности скорости частиц разных размеров и расширения сопла число столкновений между частицами мало, и, как следствие, среднемассовый размер частиц практически не изменяется. Изменение D_{43} вдоль сопла с учетом флуктуации энергии частиц представлен штрихованной кривой.

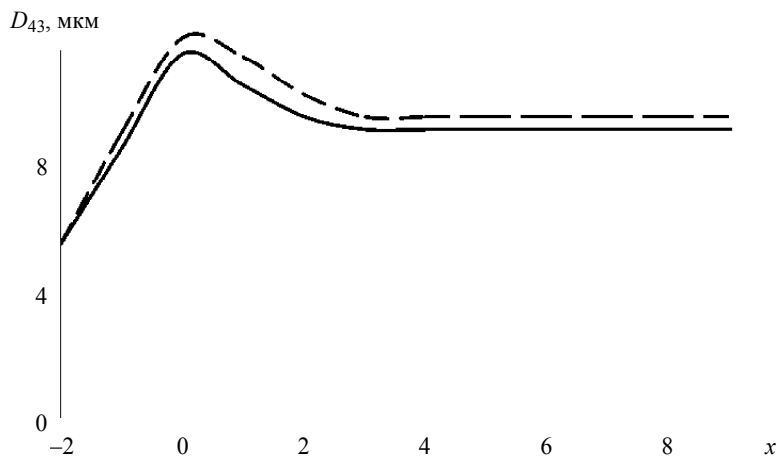


Рис. 1. Изменение среднемассового размера частиц (D_{43}) вдоль сопла ($r_* = 0.2 \text{ м}$; $z = 0.4$)

Рис. 2 иллюстрирует зависимость двухфазных потерь от критического радиуса сопла. Сплошная линия соответствует расчету без учета флуктуаций энергии частиц, штрихованная с учетом флуктуаций.

На рис. 3 представлен результат расчета зависимости двухфазных потерь от весовой доли конденсата. Как и в вышеприведенных графиках, сплошная линия соответствует расчету без учета флуктуаций энергии частиц, штрихованная – с учетом.

Двухфазные потери в данных расчетах обусловлены скоростной и температурной неравновесностью потока.

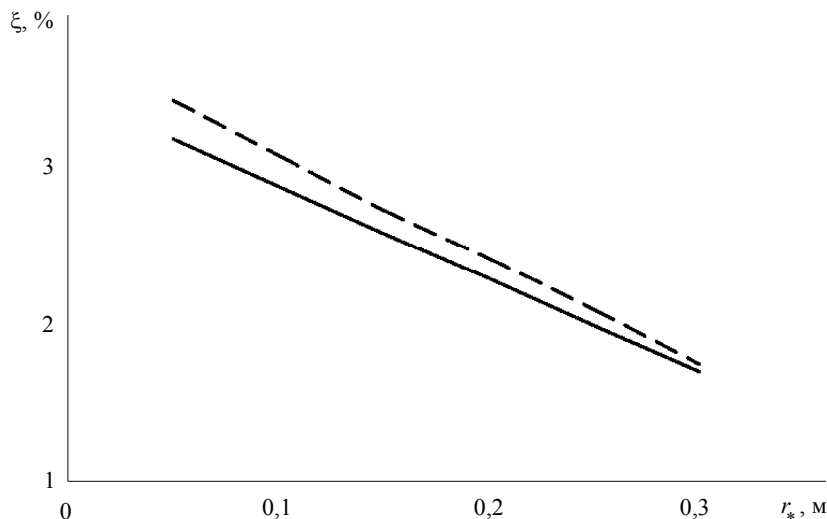


Рис. 2. Зависимость двухфазных потерь от критического радиуса сопла ($z = 0.4$)

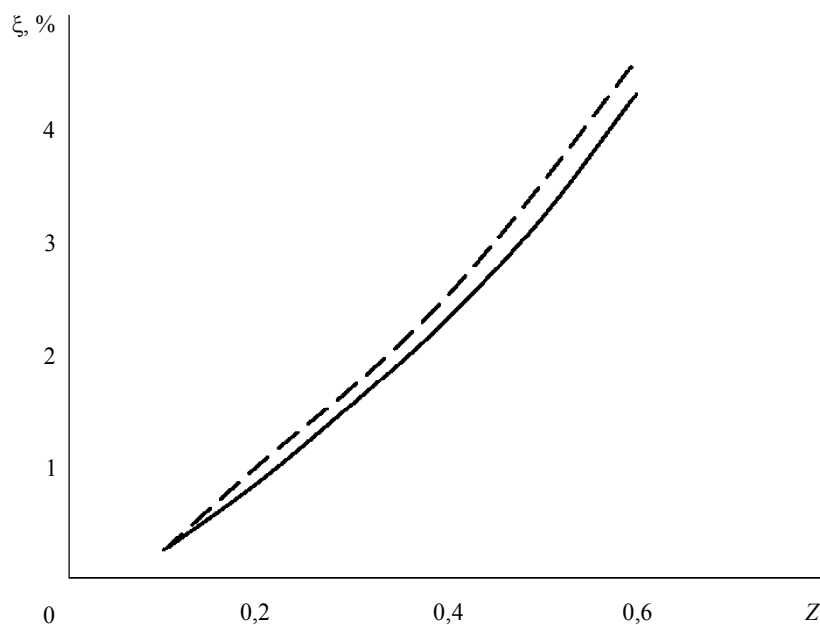


Рис. 3. Зависимость двухфазных потерь от весовой доли конденсата ($r_* = 0.2 \text{ м}$)

Заключение

Разработана статистическая модель течения двухфазной смеси, в которой взаимодействие частиц дискретной фазы базируется на непрерывном подходе. Модель имеет более строгое физическое обоснование и более удобное в численной реализации по сравнению с ранее предлагаемыми моделями данного класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А.Н., Нигматуллин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Е. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Гидромеханика. Т. 6. М.: Изд-во ВИНТИ, 1972. С. 93–174.
2. Шрайбер А.А. Многофазные и полидисперсные течения с переменным фракционным составом дискретных включений // Итоги науки и техники. Комплексные и специальные разделы механики. Т. 3. М.: Изд-во ВИНТИ, 1988. С. 33–39.
3. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1994. 320 с.
4. Бутов В.Г., Васенин И.М., Дьяченко Н.Н. Модель движения полидисперсного конденсата с учетом случайных пульсаций скорости и температуры коагулирующих частиц // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 3. С. 33–39.
5. Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г. и др. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. 262 с.
6. Дьяченко Н.Н., Дьяченко Л.И. Математическое моделирование течения двухфазных сред с учетом распределения коагулирующих частиц по импульсам // Теплофизика и аэродинамика. 1995. Т. 2. № 1. С. 67–74.
7. Пирумов У.Г. Расчет течения газа в сопле Лавалья // Механика жидкости и газа. 1967. № 5. С. 10–22.
8. Рычков А.Д. Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. Новосибирск: Наука. 1988. 222 с.
9. Пирумов У.Г., Расляков Г.С. Газовая динамика сопел. М.: Наука. 1990. 336 с.

Статья поступила 05.08.2015 г.

Vasenin I.M., Dyachenko N.N. MATHEMATICAL MODELING OF THE TWO-PHASE FLOW
DOI 10.17223/19988621/38/8

The work is devoted to modeling of the two-phase flow in power systems for which combustion products of metalized fuels serve as a working body. The redistribution of power within fractions of interacting particles is determined by the energy of their chaotic motion. The description of the interaction between particles of the discontinuous phase is based on the continuous approach. Results of numerical calculation of the quasi-one-dimensional steady flow of combustion products in the SRM nozzle are presented.

Keywords: two-phase flow; polydisperse ensemble of particles; coagulation; crushing; fluctuation energy.

VASENIN Igor Michailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

DYACHENKO Nikolay Nikolaevich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: Dr.Dyachenko@gmail.com

REFERENCES

1. Krayko A.N., Nigmatullin R.I., Starkov V.K., Sternin L.E. Mekhanika mnogofaznykh sred. *Itoги nauki i tekhniki. Gidromekhanika*, vol. 6. Moscow, VINITI Publ., 1972, pp. 93–174. (in Russian)
2. Shrayber A.A. Mnogofaznye i polidispersnye techeniya s peremennym fraktsionnykh sostavom diskretnykh vklucheniye. *Itoги nauki i tekhniki. Kompleksnye i spetsial'nye razdely mekhaniki*, vol. 3. Moscow, VINITI Publ., 1988, pp. 33–39. (in Russian)
3. Sternin L.E., Shrayber A.A. *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1994. 320 p. (in Russian)

4. Butov V.G., Vasenin I.M., D'yachenko N.N. Model' dvizheniya polidispersnogo kondensata s uchetom sluchaynykh pul'satsiy skorosti i temperatury koaguliruyushchikh chastits. *Izv. AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1981, no. 3, pp. 33–39. (in Russian)
5. Vasenin I.M., Arkhipov V.A., Butov V.G. i dr. *Gazovaya dinamika dvukhfaznykh techeniy v soplakh*. Tomsk, Tomsk St. Univ. Publ, 1986. 262 p. (in Russian)
6. D'yachenko N.N., D'yachenko L.I. Matematicheskoe modelirovanie techeniya dvukhfaznykh sred s uchetom raspredeleniya koaguliruyushchikh chastits po impul'sam. *Teplofizika i aerodinamika*, 1995, vol. 2, no. 1, pp. 67–74. (in Russian)
7. Pirumov U.G. Raschet techeniya gaza v sope Lavalya. *Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1967, no. 5, pp. 10–22. (in Russian)
8. Rychkov A.D. *Matematicheskoe modelirovanie gazodinamicheskikh protsessov v kanalakh i soplakh*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1988. 222 p. (in Russian)
9. Pirumov U.G., Raslyakov G.S. *Gazovaya dinamika sopel*. Moskow, Nauka Publ., 1990. 336 p. (in Russian)