

УДК 519.6

DOI 10.17223/19988621/38/12

**В.В. Чуруксаева, А.В. Старченко****МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД  
ДЛЯ РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В РУСЛЕ РЕКИ<sup>1</sup>**

Представлена математическая модель и численный метод для исследования турбулентных течений в речных потоках на основе приближения мелкой воды. Модель строится с учетом наиболее важных явлений, влияющих на течение в природных водоемах. В модель также включена осредненная по глубине версия двухпараметрической модели турбулентности с дополнительными слагаемыми генерации турбулентности за счет трения речного потока о дно русла. Результаты расчетов турбулентного течения в открытых каналах и стационарного турбулентного течения в неглубокой реке анализируются и сравниваются с результатами измерений, а также расчетами других авторов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование речного потока, приближение мелкой воды, турбулентное течение, распространение примеси, метод конечного объема.

Численное моделирование русловых течений берет начало еще в первой половине 20 века в связи с активным развитием гидромеханики и необходимостью исследования поведения водного объекта при строительстве гидротехнических сооружений.

Для корректного описания горизонтального перемешивания и учета влияния придонного течения необходим учет турбулентности потока, оказывающей значительное влияние на обмен массой и импульсом. Впервые исследования турбулентности в русловых потоках были проведены в связи с необходимостью оценки точности измерения средней скорости течения приборами. Одним из первых теоретических результатов советских гидравликов по турбулентности является «диффузионная теория турбулентности», которая развивалась в 30–60 гг. прошлого века. В основе теории лежат постулаты, выдвинутые Буссинеском в 1877 г. и Тейлором и Шмидтом в 1915–1925 гг. [1]. С тех пор разработке методов расчета различных течений в каналах и руслах рек уделяется значительное внимание как в отечественной науке, так и за рубежом [2–6]. По мере развития вычислительной математики и компьютерной техники разрабатывались все более сложные и точные методы и модели, в том числе и для нестационарных течений и течений в деформируемом русле.

Наиболее общим подходом к расчету русловых течений является решение полных нестационарных трехмерных уравнений гидродинамики с соответствующими граничными условиями на дне и свободной поверхности. Обзор литературы показывает, что полные уравнения или решаются в рамках вихреразрешающего LES-подхода [7, 8], или используются для расчета в небольшой области (например, течения в лабораторной установке, как в [8, 9]), коротком участке реки, при-

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ № 5.628.2014/К.

мыкающем к гидротехническому сооружению, где требуется детальное описание течения для определенного сценария [5, 10].

В исследованиях, связанных с изучением окружающей среды, решение трехмерных уравнений не всегда является оправданным из-за существенного различия в масштабах происходящих процессов, а также значительных размеров расчетной области и сложности ее границы. Вычислительная стоимость таких расчетов слишком высока даже при использовании современных суперкомпьютеров. Данный вопрос подробно обсуждается в [11, 12]. Альтернативой является построение на основе классических уравнений Рейнольдса, осредненных по глубине, модели руслового турбулентного течения, включающей уравнения мелкой воды [13].

При рассмотрении течений в равнинных медленно текущих реках (средняя скорость  $u \approx 0.01$  м/с) генерация турбулентности в основном происходит за счет трения о дно, а также при резком изменении направления потока, обтекании препятствий (островов, опор моста) и в области разветвления и слияния рек. В этом случае поведение свободной поверхности, в основном, определяется горизонтальной скоростью течения и потому осредненные по глубине модели позволяют получить решение, отражающее нелинейные эффекты течения, и при этом достаточно устойчивое, так как двумерные силы подавляют генерацию трехмерных структур.

Существует множество исследований течений в реках, их эстуариях, прибрежных областях морей с применением осредненных по глубине уравнений. Все они основываются на осредненных уравнениях Рейнольдса, но существенно отличаются учитываемыми явлениями: влиянием турбулентности потока, силы Кориолиса, ветрового трения [4, 6, 14].

Численный расчет течения в реке или эстуарии даже с применением осредненных уравнений и простейших моделей турбулентности представляет значительную вычислительную сложность, поэтому для моделирования распространения загрязнений в большом пространственном масштабе остаются актуальными одномерные модели и сочетания одномерных и двумерных моделей, когда расчет по одномерной модели служит для задания граничных условий для расчета по двумерной или трехмерной модели, как в [15, 16].

Для исследования течения на протяженном участке реки в основном используются модели со значительным упрощением: одномерные [15, 16], осредненные по глубине без учета турбулентности [6] или с использованием простых моделей турбулентности [17]. Однако в последние полтора десятилетия качество моделей и точность получаемых с их помощью результатов значительно улучшились [18].

Для замыкания осредненных уравнений мелкой воды предложены модель с параболической турбулентной вязкостью, модификация модели пути смешения Прандтля, модели с постоянным коэффициентом диффузии или простыми алгебраическими соотношениями для его получения [4, 17], а также ряд модификаций классических двухпараметрических моделей, таких как  $k-\varepsilon$  [13],  $k-\omega$  [18]. Но в целом, нужно отметить, что турбулентные модели для осредненных течений разработаны значительно меньше, чем модели для классических уравнений Рейнольдса. Одной из первых осредненных моделей была модификация  $k-\varepsilon$ -модели, предложенная Растоги и Роди [13]. Она успешно применялась для моделирования течений в упрощенных геометриях. Отметим также ее модификацию, предложенную Барбарутси и Чу [19], в которой учитываются эффекты трехмерной турбулентности, генерируемой шероховатой донной поверхностью. В работах [20, 21]

проведено сравнение этих моделей, которое показывает, что существенные различия в результатах возникают лишь при моделировании течений с доминирующим донным трением, где модель Барбарутси и Чу показывает несколько лучшее согласование с экспериментом.

Таким образом, выбор уровня сложности модели при расчете руслового течения определяется характером рассматриваемой задачи.

Целью данной работы является построение двумерной математической модели и численного метода расчета руслового течения на протяженном участке реки, которые позволят получить достаточно точные сведения о структуре турбулентного течения, необходимые для прогноза распространения примеси.

### Математическая модель

В рамках данной работы рассматривается стационарное изотермическое турбулентное течение несжимаемой жидкости (воды) в относительно небольшой неглубокой реке, русло которой резко меняет свое направление.

Математическая модель строится на основе осредненных по глубине уравнений Рейнольдса для вязкой жидкости. При этом предполагается, что распределение давления является гидростатическим и характеристики потока слабо меняются по глубине, и глубина реки значительно меньше горизонтальных размеров области исследования, что, соответственно, ограничивает формирование трехмерных вихрей, определяя доминирующий двумерный характер течения.

Математическая модель включает уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} = 0,$$

уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= -gh \frac{\partial(z_b + h)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\bar{\tau}_{xx})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\bar{\tau}_{xy})}{\partial y} + \frac{(\tau_{xz})_s - (\tau_{xz})_b}{\rho} - h\bar{F}_x, \\ \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}^2)}{\partial y} &= -gh \frac{\partial(z_b + h)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\bar{\tau}_{yx})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\bar{\tau}_{yy})}{\partial y} + \frac{(\tau_{yz})_s - (\tau_{yz})_b}{\rho} - h\bar{F}_y \end{aligned}$$

и уравнение переноса концентрации примеси

$$\frac{\partial(h\bar{u}\bar{c})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}\bar{c})}{\partial y} = \frac{\partial(h\bar{q}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{q}_y)}{\partial y} + ((q_z)_s - (q_z)_b) + S$$

для расчета распространения загрязняющих веществ, скорость движения которых совпадает со скоростью речного потока и концентрация которых в воде относительно невелика.

Здесь  $h(x, y)$  – глубина,  $\bar{u}(x, y)$ ,  $\bar{v}(x, y)$  – осредненные по глубине значения компонент вектора скорости  $\bar{w} = (u, v)$ ;  $z_b(x, y)$  – рельеф дна;  $\rho$  – плотность воды,  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения;  $\bar{\tau}_{xx}$ ,  $\bar{\tau}_{xy}$ ,  $\bar{\tau}_{yx}$ ,  $\bar{\tau}_{yy}$  – осредненные по глубине компоненты тензора вязких напряжений и напряжений Рейнольдса;  $(\tau_{xz})_s$ ,  $(\tau_{xz})_b$ ,  $(\tau_{yz})_s$ ,  $(\tau_{yz})_b$  – трение на поверхности реки и ее дне, соответственно;  $\bar{F}_x$ ,  $\bar{F}_y$  – осредненные по глубине компоненты силы Кориолиса;  $\bar{c}$  – осредненная по глубине концентрация примеси;  $\bar{q}_x$ ,  $\bar{q}_y$  – диффузионные и турбулентные пото-

ки массы;  $S$  – источник примеси;  $(q_z)_s, (q_z)_b$  – потоки примеси на поверхности и дне соответственно.

В силу того, что в данной работе моделируется распространение примеси относительно небольшой массы (в сравнении с массой текущей воды), поступающей в реку с низкой скоростью, предполагается, что вблизи выброса не возникает трехмерных турбулентных эффектов.

Для получения неизвестных значений компонент тензора напряжений  $\bar{\tau}_{ij}$  в уравнениях Рейнольдса используются соотношения Буссинеска

$$\frac{1}{\rho} \bar{\tau}_{ij} = (\nu + \bar{\nu}_t) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij},$$

где  $\nu$  – молекулярная кинематическая вязкость воды.

Подобного вида замыкающие соотношения применяются для потоков массы примеси

$$\bar{q}_i = \left( \frac{\nu}{Sc} + \frac{\bar{\nu}_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i}.$$

Здесь  $Sc, Sc_t$  – молекулярное и турбулентное числа Шмидта.

Турбулентная вязкость  $\bar{\nu}_t$  и кинетическая энергия турбулентности  $\bar{k}$  находятся с использованием осредненной по глубине версии  $k-\varepsilon$ -модели Растоги и Роди [13]:

$$\bar{\nu}_t = c_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u}\bar{k})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}\bar{k})}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( h \left( \nu + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \left( \nu + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} \right) + (P_h + P_{kv} - \bar{\varepsilon})h, \\ \frac{\partial(h\bar{u}\bar{\varepsilon})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}\bar{\varepsilon})}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( h \left( \nu + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \left( \nu + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right) + \left( c_1 \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} P_h + P_{\varepsilon v} - c_2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} \right) h, \end{aligned}$$

$$P_h = \nu_t \left[ 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \right],$$

$$\sigma_\varepsilon = 1.3; \sigma_k = 1.0; c_1 = 1.44; c_2 = 1.92; c_\mu = 0.09;$$

$$P_{kv} = c_k \frac{v_*^3}{h}; P_{\varepsilon v} = c_\varepsilon \frac{v_*^4}{h^2}; c_k = \frac{1}{\sqrt{c_f}}; c_\varepsilon = 3.6 \frac{c_2}{c_f^{3/4}} \sqrt{c_\mu}; c_f = \frac{gn^2}{h^{1/3}}; v_*^2 = c_f |\vec{w}|^2.$$

Здесь  $\bar{k}(x, y)$  – осредненная по глубине кинетическая энергия турбулентности;  $\bar{\varepsilon}(x, y)$  – осредненная по глубине диссипация кинетической энергии;  $n$  – коэффициент Маннинга [22], характеризующий шероховатость русла;  $v_*$  – динамическая скорость;  $c_f$  – коэффициент трения.

### Граничные условия

На входе в область исследования руслового потока задавались однородные распределения искомых величин, на выходе простые градиентные условия. На боковых стенках русла применялись условия непротекания и прилипания для компонент скорости. В случае, когда  $v_t \gg v$  вблизи боковых стенок, в пристеночной области трение и турбулентные характеристики определяются с помощью метода пристеночных функций Лаундера – Сполдинга [23]. Для концентрации примеси на боковых границах руслового потока ставились простые градиентные условия.

### Численный метод решения уравнений модели

В данной работе для решения задачи применяются метод конечного объема [23] и метод фиктивных областей. Расчетная область вписывается в прямоугольник, покрытый структурированной сеткой, где глубина руслового течения  $h$  определяется в центрах ячеек (конечных объемов), а компоненты скорости  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  – на их границах (рис. 1).

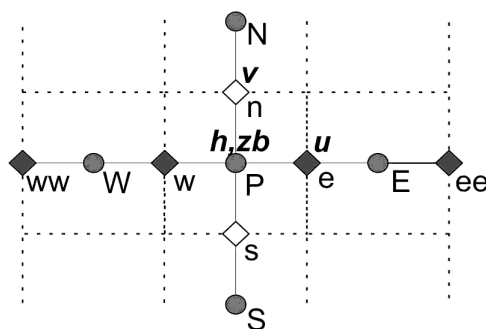


Рис. 1. Сеточный шаблон разностной схемы

Большими буквами отмечено положение центров конечных объемов, малыми – середин их граней [24]

Широко используемые в гидрологических расчетах схемы первого порядка для аппроксимации конвективных членов зачастую обладают слишком большой схемной вязкостью и не обнаруживают области рециркуляционного течения, дают существенно сглаженные профили скорости и потому малоприменимы для отрывных течений. В данной работе конвективные слагаемые аппроксимируются MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) схемой 3-го порядка точности, а также схемой MLU (Monotonic Linear Upwind) [25]. Для диффузионных членов уравнений используется аппроксимация второго порядка.

Построим SIMPLE-подобный алгоритм для решения уравнений мелкой воды с неизвестными  $h(x, y)$ ,  $\bar{u}(x, y)$ ,  $\bar{v}(x, y)$ . Получим сначала формулы алгоритма. Предположим, что начальное приближение для компонент вектора скорости  $\bar{u}(x, y)$ ,  $\bar{v}(x, y)$  и глубины потока  $h(x, y)$  известно из физических соображений. Уточнение значений этих характеристик, удовлетворяющих соответствующим уравнениям мелкой воды, будем проводить с помощью итерационной процедуры.

Используя полученные на предыдущей итерации значения глубины потока, считаем компоненты скорости из следующих сеточных уравнений [24]:

$$a_e^u \bar{u}_e^* = \sum_{nb} a_{nb}^u \bar{u}_{nb}^* + d_e^u (h_E^i - h_P^i) + b_e^u; \quad (1)$$

$$a_n^v \bar{v}_n^* = \sum_{nb} a_{nb}^v \bar{v}_{nb}^* + d_n^v (h_N^i - h_P^i) + b_n^v. \quad (2)$$

Здесь  $\bar{u}_e^*$ ,  $\bar{v}_n^*$  – промежуточные значения компонент вектора скорости, не удовлетворяющие в общем случае разностному уравнению неразрывности. Потребуем, чтобы на следующей итерации  $(i+1)$  все уравнения выполнялись точно, т.е.

$$\begin{aligned} a_e^u \bar{u}_e^{i+1} &= \sum_{nb} a_{nb}^u \bar{u}_{nb}^{i+1} + d_e^u (h_E^{i+1} - h_P^{i+1}) + b_e^u; \\ a_n^v \bar{v}_n^{i+1} &= \sum_{nb} a_{nb}^v \bar{v}_{nb}^{i+1} + d_n^v (h_N^{i+1} - h_P^{i+1}) + b_n^v. \end{aligned}$$

Вычтем из этих уравнений соответствующие уравнения (1) и (2) и, пренебрегая, как в [24], слагаемыми  $\sum_{nb} a_{nb}^u (\bar{u}_{nb}^{i+1} - \bar{u}_{nb}^*)$ ,  $\sum_{nb} a_{nb}^v (\bar{v}_{nb}^{i+1} - \bar{v}_{nb}^*)$ , получим

$$\bar{u}_e^{i+1} = \bar{u}_e^* + d_e^u / a_e^u (h_E' - h_P'); \quad (3)$$

$$\bar{v}_n^{i+1} = \bar{v}_n^* + d_n^v / a_n^v (h_N' - h_P'), \quad (4)$$

где  $h_P' = h_P^{i+1} - h_P^i$ .

Разностные уравнения для нахождения  $\{h_P'\}$ , полученные из уравнения неразрывности  $\frac{\bar{u}_e^{i+1} h_e^i - \bar{u}_w^{i+1} h_w^i}{\delta x} + \frac{\bar{v}_n^{i+1} h_n^i - \bar{v}_s^{i+1} h_s^i}{\delta y} = 0$ , будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\frac{h_e^i}{\delta x} \left( \bar{u}_e^* + \frac{d_e^u}{a_e^u} (h_E' - h_P') \right) - \frac{h_w^i}{\delta x} \left( \bar{u}_w^* + \frac{d_w^u}{a_w^u} (h_P' - h_W') \right) + \\ &+ \frac{h_n^i}{\delta y} \left( \bar{v}_n^* + \frac{d_n^v}{a_n^v} (h_N' - h_P') \right) + \frac{h_s^i}{\delta y} \left( \bar{v}_s^* + \frac{d_s^v}{a_s^v} (h_P' - h_S') \right) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, предлагаемый алгоритм итерационного уточнения неизвестных сеточных значений компонент скорости и глубины руслового потока можно представить следующим образом:

1. Задаем  $\bar{u}^i = \bar{u}^0$ ,  $\bar{v}^i = \bar{v}^0$ ,  $h^i = h^0$ .
2. Решаем (1) и (2) методом нижней релаксации и находим  $\{\bar{u}^*\}$ ,  $\{\bar{v}^*\}$ .
3. Решаем (5) методом верхней релаксации или методом Н.И. Булеева и находим  $\{h_P'\}$ .
4. Корректируем  $\{\bar{u}^{i+1}\}$ ,  $\{\bar{v}^{i+1}\}$  по (3), (4) и  $\{h^{i+1}\}$  по  $h_P^{i+1} = h_P^i + \beta h_P'$ ,  $\beta = 0.2$ .
5. Решаем уравнения  $k-\varepsilon$ -модели турбулентности.

6. Если  $\|\bar{h}'\|$  велика, то  $i = i + 1$  и переходим к п. 2 (продолжаем итерационный процесс пока  $\|\bar{h}'\| > \varepsilon$ ).

7. Решаем уравнение для концентрации примеси.

Предложенный метод отличается от широко используемого SIMPLE-алгоритма тем, что в уравнении неразрывности учитывается изменчивость  $h$ , в то время как в [4, 18, 26] учет изменения  $h$  осуществляется только в первых членах уравнений движения.

С помощью разработанной модели и численного метода были проведены расчеты некоторых тестовых сценариев, иллюстрирующих различные режимы русловых течений, влияние на них трения и рельефа дна. Для оценки полученных результатов приведено сравнение расчетов с экспериментальными данными, а также расчетами, приведенными в [2, 26]. Сравнение позволяет судить о том, насколько приближение мелкой воды применимо для моделирования подобных случаев.

### Расчет руслового течения в лабораторных установках

Одним из самых распространенных приложений двумерной модели мелкой воды является расчет течения в открытых каналах. Резкое изменение направления течения может вызывать проявление трехмерного характера турбулентности, что может ухудшить достоверность численного прогноза с использованием осредненных по глубине уравнений.

#### Канал с поворотом

В качестве расчетной области использовался открытый канал с поворотом под прямым углом. Входной участок имеет длину 5.555 м, ширину 0.86 м и ровное дно. Сразу перед поворотом уровень дна понижается на 0.013 м. Выходной участок имеет длину 4.43 м, ширину 0.72 м и ровное дно. Средняя глубина воды  $h \approx 0.175$  м, величина продольной компоненты скорости  $\approx 0.2$  м/с.

На рис. 2 приведено сравнение полученных результатов с расчетом из [26], где авторы исследуют течение в канале с применением подобной математической модели, но другим методом расчета.

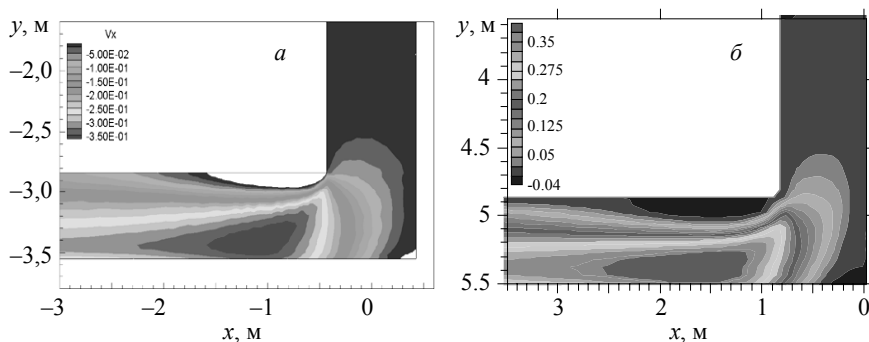


Рис. 2. Течение в канале с поворотом, карты продольной компоненты скорости  $\bar{u}$ ,  $a$  – расчет из [26],  $b$  – расчет по рассматриваемой модели

Из рисунка видно, что выбранная модель успешно обнаруживает обширную циркуляционную зону за поворотом и небольшую во внешнем углу канала.

Для более детального сравнения полученных численных расчетов и исследования влияния способа аппроксимации конвективных членов в уравнении движения на решение, рассмотрим изменение продольной скорости  $\bar{u}$  и кинетической энергии турбулентности  $\bar{k}$  поперек канала в сечении за поворотом в середине зоны рециркуляции потока.

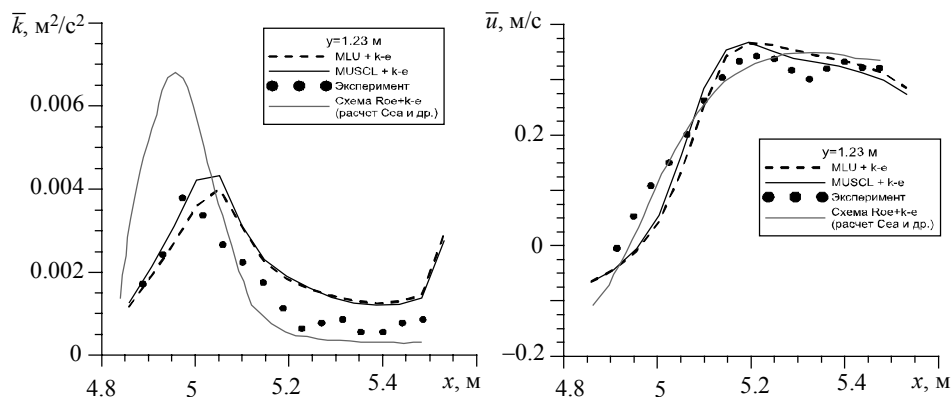


Рис. 3. Кинетическая энергия турбулентности  $\bar{k}$  и продольная компонента скорости  $\bar{u}$  в сечении  $x = 1.23$  м (рис. 2, б)

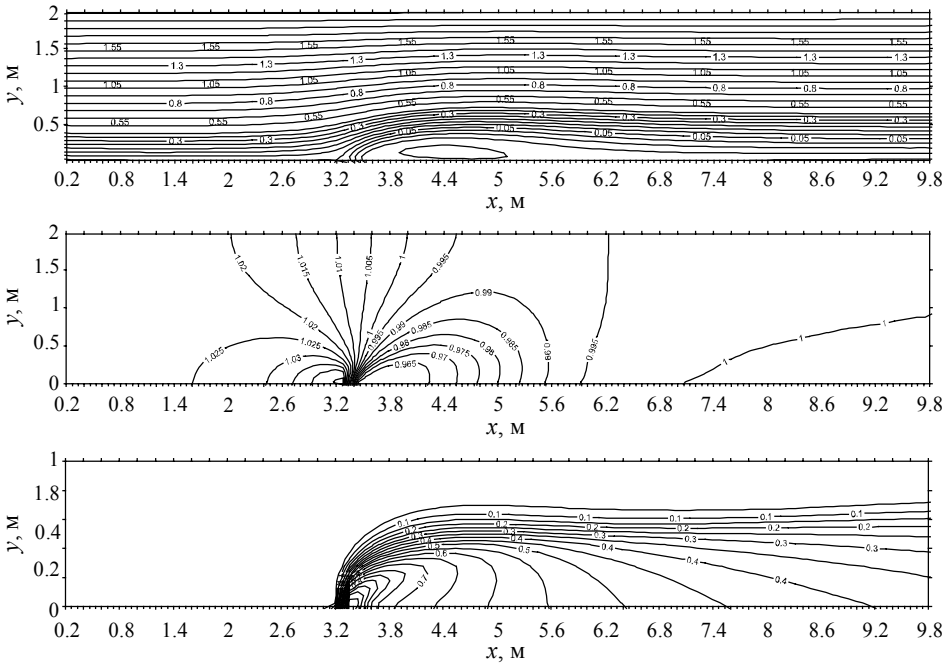
Из рис. 3 видно, что рассматриваемые в работе модель и численный метод позволяют хорошо предсказать распределение компоненты скорости и кинетической энергии поперек канала. Причем использование разностных аппроксимаций MUSCL и MLU [25] для конвективных членов дает близкие по значениям численные решения. Из рисунка видно, что расчеты фиксируют отрицательные значения осредненной по глубине продольной компоненты скорости в средней части области рециркуляции потока, максимальные значения скорости  $\bar{u}$  в рассматриваемом сечении, как в расчетах, так и в эксперименте [26], наблюдаются в центре канала. Осредненная по глубине кинетическая энергия турбулентности имеет наименьшие значения в области, где наблюдается максимум скорости, а наибольшие – на границе зоны рециркуляции потока, что отвечает современным представлениям о структуре турбулентных отрывных течений в каналах [13, 23].

Заметим, что представленные на рис. 3 экспериментальные данные [26] соответствуют измерениям локальной продольной компоненты скорости и кинетической энергии, проведенным на середине глубины течения в канале в указанном сечении.

### Прямой канал с притоком

Решается задача о распространении примеси, поступающей в канал вместе с боковым притоком. Расчет проводится для турбулентного течения в канале шириной 10 и глубиной 2 м при скорости входного потока 1 м/с и средней глубине руслового течения 1 м. Скорость притока составляет 1 м/с, а ширина входной области притока равна 0.17 м (рис. 4).





На рис. 4 представлены линии тока, изолинии глубины и концентрации примеси, полученные численно на основе предлагаемой математической модели и численного метода. Из рисунка видно, что приток проникает на расстояние до 0.6 м, за ним образуется протяженная зона рециркуляционного течения. Перед притоком глубина руслового течения увеличивается, сразу за притоком снижается с последующим выходом на значение 1 м вдоль течения в канале. Эти результаты качественно согласуются с расчетами, приведенными в [2, 13].

На рис. 5 показаны рассчитанные изменения концентрации примеси вдоль правой ( $y = 0$ ) боковой стенки канала, полученные с использованием различных схем

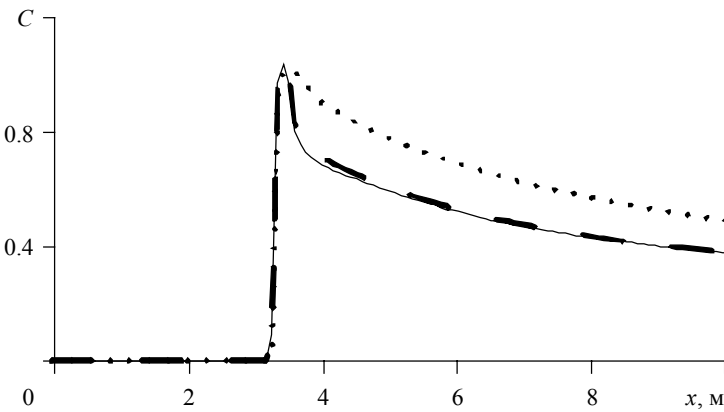


Рис. 5. Изменение концентрации примеси вдоль правой стенки канала (сплошная линия – расчет по схеме MUSCL, пунктирная – по схеме MLU, точечная – по противопотоковой схеме первого порядка [24])

аппроксимации конвективных членов в уравнениях движения. Сравнение графиков показывает, что хотя все схемы хорошо предсказывают положение максимального значения концентрации, однако схемы более высоких порядков аппроксимации (MLU, MUSCL) фиксируют более резкое уменьшение концентрации примеси вдоль рассматриваемой границы области. При этом рассчитанные значения с использованием схем MLU и MUSCL для моделируемого случая почти совпадают. Обычная противопотоковая схема первого порядка максимальные значения схемной вязкости проявляет в областях течения, где вектор скорости направлен по углом  $45^\circ$  к линиям сетки [24] и поэтому приводит к существенному сглаживанию поперечных профилей концентрации в области рециркуляционного течения.

### Расчет турбулентного течения в русле реки

Разработанные математическая модель и численный метод были применены для исследования стационарного турбулентного течения в небольшой неглубокой реке, русло которой резко меняет своё направление. Для исследования выбран участок реки Доммель длиной около 250 м, расположенный вблизи границы Бельгии и Нидерландов. Выбор объекта исследования обусловлен наличием данных измерений (глубины, скорости, рельефа дна) хорошего качества [28], позволяющих провести проверку расчетов, а также характером русла, способствующим образованию крупных турбулентных структур (рис. 6).

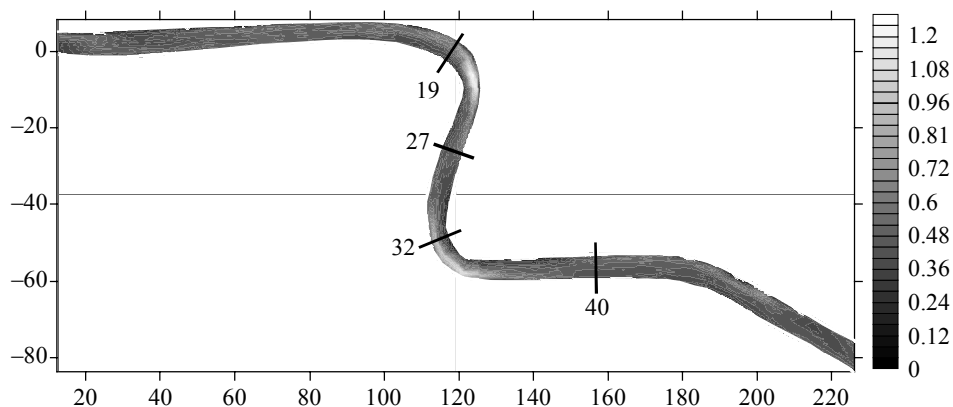


Рис. 6. Геометрия исследуемой области  
(batimетрия реки и расположение сечений, где проводились измерения)

Ширина речного русла составляет в среднем около 6 м, скорость речного потока на входе в рассматриваемой области 0.85 м/с, глубина течения на выходе 0.3 м. Для коэффициента Маннинга было выбрано значение 0.02. В расчетах использовалась равномерная структурированная сетка  $887 \times 401$  узлов. Сходимость итерационного вычислительного процесса контролировалась по величине расхода на выходе из рассматриваемой области.

На рис. 7 представлены измеренные и рассчитанные распределения поперек потока осредненной по глубине скорости в указанных на рис. 6 сечениях на S-образном участке реки, резко меняющей направление течения.

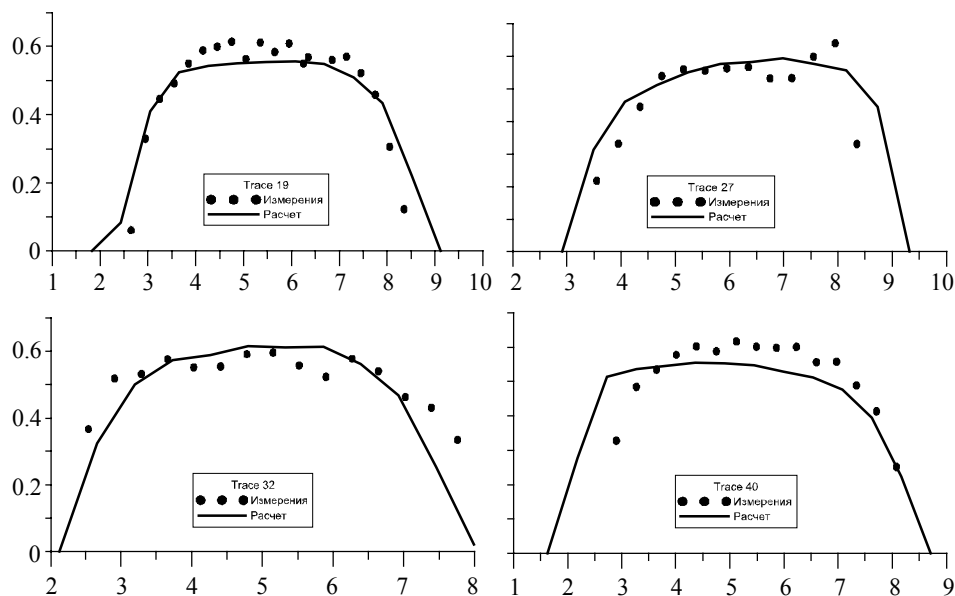


Рис. 7. Распределение осредненной по глубине скорости потока в сечениях, обозначенных на рис. 6 (сплошная линия – расчет, точки – измерения из [28])

Из рисунка видно, что рассчитанные и измеренные значения осредненной по глубине скорости в условиях некоторой неопределенности входных данных хорошо согласуются между собой. Кроме того, из анализа полученных полей вектора скорости, энергии турбулентности и глубины потока было установлено, что турбулентное течение в поворотных участках русла реки имеет схожие характеристики с течением в поворотном канале с открытой границей (рис. 2). Также за первым поворотом реки образуется обширная область рециркуляционного течения, поток стремится приблизиться к противоположной границе. Скорость речного потока снижается над небольшими углублениями русла реки и увеличивается над его возвышениями.

### Выводы

Представлена математическая модель и численный метод для исследования турбулентных течений в речных потоках на основе приближения мелкой воды. В модели учтено влияние трения о дно русла, ветрового трения, силы Кориолиса, сложной геометрии речного русла с притоками и изменением его глубины. Для описания турбулентной структуры речного течения в модель включена осредненная по глубине версия двухпараметрической модели турбулентности с дополнительными слагаемыми генерации турбулентности за счет трения речного потока о дно русла. Численный метод представляет собой модификацию известного метода SIMPLE Патанкара, в которой дополнительно рассматривается изменение глубины потока в уравнениях модели.

Математическая модель и численный метод были применены для исследования турбулентного течения в открытом канале прямоугольного поперечного сечения с поворотом на  $90^\circ$ , в прямом открытом канале с боковым притоком примеси и для моделирования течения в неглубоком речном потоке. Результаты расчетов

по разработанной численной модели для течения в лабораторной установке хорошо согласуются как по значениям скорости, так и по значениям энергии турбулентности с экспериментальными данными и расчетами других авторов. На основании проведенного сопоставления расчетов показано, что более высокого качества воспроизведения наблюдений в рециркуляционных течениях можно достичь, применяя численную схему более высокого порядка аппроксимации для конвективных членов транспортных уравнений. Результаты расчетов в S-образном речном потоке также хорошо согласуются с данными наблюдений и, в целом, соответствуют представлениям о таких течениях и закономерностям, наблюдаемым при их изучении.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Механика в СССР за 50 лет. М.: Рипол Классик, 2013. 886 с.
2. McGuirk J.J., Rodi W. A depth-averaged mathematical model for the near field of side discharges into open channel flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 1978. V. 88. P. 761–781.
3. Chu V.H., Babarutsi S. Confinement and bed-friction effects in shallow turbulent mixing layers // *Journal of Hydraulic Engineering*. 1988. V. 10. No. 114. P. 1257–1274.
4. Yu L., Zhu S.P. Numerical Simulation of Discharged Waste Heat and Contaminants into the South Estuary of the Yangtze River // *Mathematical and Computer Modelling*. 1993. V. 18. No. 12. P. 107–123.
5. Olsen N.R.B., Stokseth S. Three-dimensional numerical modelling of water flow in a river with large bed roughness // *Journal of Hydraulic Research*. 1995. V. 33. P. 571–581.
6. Hou J., Simons F., Mahgoub M., and Hinkelmann R. A robust well-balanced model on unstructured grids for shallow water flows with wetting and drying over complex topography // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2013. No. 257. P. 126–149.
7. Chaouat B., Schiestel R. Reynolds stress transport modelling for steady and unsteady channel flows with wall injection // *Journal of Turbulence*. 2002. V. 3. P. 1–16.
8. Kang S., Lightbody A., Hill C., and Sotiropoulos F. High-resolution numerical simulation of turbulence in natural waterways // *Advances in Water Resources*. 2011. V. 34. P. 98–113.
9. Kang S., Sotiropoulos F. Numerical modeling of 3D turbulent free surface flow in natural waterways // *Advances in Water Resources*. 2012. No. 40. P. 23–36.
10. Sandiv S.K., Sotiropoulos F., and Odgaard A.J. Three-Dimensional Numerical Model for Flow through Natural Rivers // *Journal of Hydraulic Engineering*. January 1998. V. 124. No. 1. P. 13–24.
11. Duc B., Wenka T., and Rodi W. Numerical Modeling of Bed Deformation in Laboratory Channels // *Journal of Hydraulic Engineering*. September 2004. V. 9. P. 894–904.
12. Uijttewaalt W.S.J. Hydrodynamics of shallow flows: application to rivers // *Journal of Hydraulic Research*. 2014. V. 52. No. 2. P. 157–172.
13. Роду В. Модели турбулентности окружающей среды // *Методы расчета турбулентных течений*. М.: Мир, 1984. С. 276–278.
14. Sauvaget P., David E., and Soares C. Modelling tidal currents on the coast of Portugal // *Coastal Engineering*. 2000. No. 40. P. 393–409.
15. Finaud-Guyot P., Delenne C., Guinot V., and Llovel C. 1D–2D coupling for river flow modeling // *Comptes Rendus Mecanique*. 2011. No. 339. P. 226–234.
16. Любимова Т.П., Летухин А.П., Паршакова Я.Н., Тиунов А.И. Численное моделирование разбавления и переноса высокоминерализованных рассолов в турбулентных потоках // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2010. Т. 3. № 4. С. 68–79.
17. River2D Hydrodynamic Model for Fish Habitat [Электронный ресурс] // River2D: [сайт]. [2002]. URL: <http://www.river2d.ualberta.ca/> (дата обращения: 10.06.2015).
18. Yu L., Righetto A.M. Depth-averaged k-omega turbulence model and application // *Advances in Engineering Software*. 2001. No. 32. P. 375–394.
19. Barbarutsi S., Chu V.H. A two-length-scale model for quasi two-dimensional turbulent shear flows // *Proc. 24th Congr. of IAHR*. 1991. V. C. P. 51–60.

20. Babarutsi S., Chu V.H. Modelling transverse mixing layer in shallow open-channel flows // Journal of Hydraulic Engineering. 1998. V. 7. No. 124. P. 718–727.
21. Babarutsi S., Nassiri M., and Chu V.H. Computation of shallow recirculating flow dominated by friction // Journal of Hydraulic Engineering. 1996. V. 122. No. 7. P. 367–372.
22. Чой В.Т. Гидравлика открытых каналов. М.: Госстройиздат, 1969. 462 с.
23. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. V. 2. No. 3. P. 269–289.
24. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
25. van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, V. A Second Order Sequel to Godunov's Method // Journal of Computational Physics. 1979. No. 32. P. 101–136.
26. Cea L., Puertas J., and Vazquez-Cendon M.E. Depth averaged modelling of turbulent shallow water flow with wet-dry fronts // Archives of Computational Methods in Engineering. September 2007. V. 14. No. 3. P. 303–341.
27. Cea L., Vazquez-Cendon M.E. Unstructured finite volume discretisation of bed friction and convective flux in solute transport models linked to the shallow water equations // Journal of Computational Physics. 2012. No. 231. P. 3317–3339.
28. de Vriend H.J. and Geldof H.J. Main flow velocity in short and sharply curved river bends // Department of Civil Engineering Delft University of Technology, Delft, 83, 1983.

Статья поступила 15.11.2015 г.

*Churuksaeva V.V., Starchenko A.V.* A MATHEMATICAL MODEL AND NUMERICAL METHOD FOR COMPUTATION OF A TURBULENT RIVER STREAM

DOI 10.17223/19988621/38/12

A mathematical model and a computational method for numerical investigation of turbulent river streams are proposed. The mathematical model is based on the shallow water approach. The model takes into account the influence of bottom friction, wind friction, Coriolis force, and complex geometry of the river bed with inflows and irregular bathymetry. A depth-averaged version of the k-epsilon turbulence model with a specific term for the generation of turbulence by the river bottom friction is used to describe the turbulent structure of the flow.

The numerical method for solving discretized equations is a modification of the SIMPLE algorithm proposed by Patankar. A novel feature of the algorithm is considering the water depth variation in the equations of the model.

The model and the method proposed were applied to computations of a turbulent flow in laboratory open channels and of steady flow in a shallow river with a sharply curved bed.

Computations of the flow in the laboratory channel show a good agreement with the experimental observations and results from references. The results of the calculations of the flow in an S-shaped river flow represent flow patterns observed in studying river flows and show agreement with general concepts.

Keywords: mathematical modeling of a river stream, shallow water approach, turbulent flow, pollutant transport, finite volume method.

*CHURUKSAEVA Vladislava Vasilievna* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation),  
E-mail: chu.vv@mail.ru

*STARCHENKO Alexander Vasilievich* (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: starch@math.tsu.ru

## REFERENCES

1. Sedov L.I. *Mekhanika v SSSR za 50 let*. Moscow, Ripol Klassik Publ., 2013. 886 p. (in Russian)
2. McGuirk J.J., Rodi W. A depth-averaged mathematical model for the near field of side discharges into open channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 1978, vol. 88, pp. 761–781.
3. Chu V.H., Babarutsi S. Confinement and bed-friction effects in shallow turbulent mixing layers. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1988, vol. 10, no. 114, pp. 1257–1274.
4. Yu L., Zhu S.P. Numerical Simulation of Discharged Waste Heat and Contaminants into the South Estuary of the Yangtze River. *Mathematical and Computer Modelling*, 1993, vol. 18, no. 12, pp. 107–123.
5. Olsen N.R.B., Stokseth S. Three-dimensional numerical modelling of water flow in a river with large bed roughness. *Journal of Hydraulic Research*, 1995, vol. 33, pp. 571–581.
6. Hou J., Simons F., Mahgoub M., and Hinkelmann R. A robust well-balanced model on unstructured grids for shallow water flows with wetting and drying over complex topography. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, no. 257, pp. 126–149.
7. Chaouat B., Schiestel R. Reynolds stress transport modelling for steady and unsteady channel flows with wall injection. *Journal of Turbulence*, 2002, vol. 3, pp. 1–16.
8. Kang S., Lightbody A., Hill C., and Sotiropoulos F. High-resolution numerical simulation of turbulence in natural waterways. *Advances in Water Resources*, 2011, vol. 34, pp. 98–113.
9. Kang S., Sotiropoulos F. Numerical modeling of 3D turbulent free surface flow in natural waterways. *Advances in Water Resources*, 2012, no. 40, pp. 23–36.
10. Sandiv S.K., Sotiropoulos F., and Odgaard A.J. Three-Dimensional Numerical Model for Flow through Natural Rivers. *Journal of Hydraulic Engineering*, January 1998, vol. 124, no. 1, pp. 13–24.
11. Duc B., Wenka T., and Rodi W. Numerical Modeling of Bed Deformation in Laboratory Channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, September 2004, vol. 9, pp. 894–904.
12. Uijttewaal W.S.J. Hydrodynamics of shallow flows: application to rivers. *Journal of Hydraulic Research*, 2014, vol. 52, no. 2, pp. 157–172.
13. Rodi V. Modeli turbulentnosti okruzhayushchey sredy. *Metody rascheta turbulentnykh techeniy*. Moscow, Mir Publ., 1984, pp. 276–278.
14. Sauvaget P., David E., and Soares C. Modelling tidal currents on the coast of Portugal. *Coastal Engineering*, 2000, no. 40, pp. 393–409.
15. Finaud-Guyot P., Delenne C., Guinot V., and Llovel C. 1D–2D coupling for river flow modeling. *Comptes Rendus Mecanique*, 2011, no. 339, pp. 226–234.
16. Lyubimova T.P., Lepikhin A.P., Parshakova Ya.N., Tiunov A.I. Chislennoe modelirovanie razbavleniya i perenosa vysokomineralizovannykh rassolov v turbulentnykh potokakh. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2010, vol. 3, no. 4, pp. 68–79. (in Russian)
17. *River2D Hydrodynamic Model for Fish Habitat*. URL: <http://www.river2d.ualberta.ca/> (10.06.2015).
18. Yu L., Righetto A.M. Depth-averaged k- $\omega$  turbulence model and application. *Advances in Engineering Software*, 2001, no. 32, pp. 375–394.
19. Babarutsi S., Chu V.H. A two-length-scale model for quasi two-dimensional turbulent shear flows. *Proc. 24th congr. of IAHR*, 1991, vol. C, pp. 51–60.
20. Babarutsi S., Chu V.H. Modelling transverse mixing layer in shallow open-channel flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1998, vol. 7, no. 124, pp. 718–727.
21. Babarutsi S., Nassiri M., and Chu V.H. Computation of shallow recirculating flow dominated by friction. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1996, vol. 122, no. 7, pp. 367–372.
22. Chou V.T. *Gidravlika otkrytykh kanalov*. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1969. 462 p. (in Russian)
23. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1974, vol. 2, no. 3, pp. 269–289.
24. Patankar S. *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

25. van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, V. A Second Order Sequel to Godunov's Method. *Journal of Computational Physics*, 1979, no. 32, pp. 101–136.
26. Cea L., Puertas J., and Vazquez-Cendon M.E. Depth averaged modelling of turbulent shallow water flow with wet-dry fronts. *Archives of Computational Methods in Engineering*, September 2007, vol. 14, no. 3, pp. 303–341.
27. Cea L., Vazquez-Cendon M.E. Unstructured finite volume discretisation of bed friction and convective flux in solute transport models linked to the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 2012, no. 231, pp. 3317–3339.
28. de Vriend H.J. and Geldof H.J. Main flow velocity in short and sharply curved river bends. *Department of Civil Engineering Delft University of Technology*, Delft, 83, 1983.