

УДК 519.711.3, 514.181.22  
DOI 10.17223/19988621/39/2

М.С. Бухтяк, А.В. Соломина

## ОБ ОДНОМ ИНВАРИАНТЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РАСКРОЮ СЕТЕПОЛОТНА

Исследуется раскрой сетеполотна для формирования осесимметричного параболического рефлектора при отождествлении раскроя с взаимно-однозначным отображением части плоскости на часть параболоида вращения. Указанная трактовка раскроя есть сильная, но неизбежная идеализация. Представляется важным вопрос о критерии сравнения двух схем раскроя. При более общем подходе речь идет о критерии отображения поверхности на поверхность. Предложенный авторами критерий, названный дефектом отображения, неидеален – как и всякий критерий, но позволяет ответить на вопрос: в каком смысле одно отображение предпочтительнее другого. Приведены примеры применения критерия.

**Ключевые слова:** параболический рефлектор, сетеполотно, отображение поверхностей, дефект отображения поверхности на поверхность, аппроксимация.

### 1. Дефект отображения поверхности на поверхность

Данная работа продолжает исследование, начатое в [1–3]. Его содержание – вычисление искажений локальных длин при отображении части плоскости на часть параболоида вращения. В общем, можно говорить об исследовании отношения метрических форм двух поверхностей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , находящихся в точечном соответствии (аналогично рассмотрению, проведенному в [4]). В дифференциальной геометрии объект, состоящий из двух поверхностей, при точечном соответствии между ними, принято называть парой поверхностей (например, [5, 6]). Пара поверхностей допускает параметризацию вида

$$\Sigma_1 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_1(u, v) \in C^1, \quad \Sigma_2 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_2(u, v) \in C^1, \quad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Точки  $\mathbf{A} = \mathbf{r}_1(u, v)$  и  $\mathbf{A}' = \mathbf{r}_2(u, v)$  являются соответствующими. Локальная метрика каждой из поверхностей определяется конкретным метрическим тензором. Матрицы этих тензоров составлены из коэффициентов первых квадратичных форм:

$$M_1 = \begin{pmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{pmatrix}.$$

Первые квадратичные формы [4] имеют (в обозначениях К. Гаусса) вид

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2, \quad ds_2^2 = E_2 du^2 + 2F_2 dudv + G_2 dv^2.$$

Мерой локального искажения длин (точнее, их квадратов) является величина [4]

$$\lambda = ds_2^2 / ds_1^2.$$

Экстремальные значения  $\lambda$  суть совместные инварианты матриц  $M_1$  и  $M_2$ , равные корням уравнения

$$m \equiv \det(M_2 - \lambda M_1) = E_2 G_2 - F_2^2 + \lambda(2F_1 F_2 - E_1 G_2 - E_2 G_1) + \lambda^2(E_1 G_1 - F_1^2) = 0. \quad (1.1)$$

Положительная определенность симметричных матриц  $M_1$  и  $M_2$  гарантирует вещественность корней уравнения (1.1). Из коэффициентов этого уравнения [1]

$$a = E_1 G_1 - F_1^2, \quad b = 2F_1 F_2 - E_1 G_2 - E_2 G_1, \quad c = E_2 G_2 - F_2^2$$

составлен лагранжиан, функционал от которого минимизирует отклонение обоих корней уравнения (1.1) от единицы. На этом пути удается характеризовать избранную для анализа схему раскроя сетеполотна в локальном смысле: строится поле наибольших значений корня уравнения (1.1) и поле наименьших значений.

Представляется естественным сопоставить паре поверхностей инвариант, характеризующий качество раскроя сетеполотна «в целом», как единственный скаляр.

Для уравнения (1.1), записанного в приведенном виде, вместо лагранжиана, построенного в [1], получаем лагранжиан

$$\begin{aligned} L\left(r_1(u, v), r_2(u, v), \frac{\partial r_1(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial r_1(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial r_2(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial r_2(u, v)}{\partial v}\right) = \\ = \left(1 - \frac{E_2 G_2 - F_2^2}{E_1 G_1 - F_1^2}\right)^2 + \left(2 + \frac{-E_2 G_1 - E_1 G_2 + 2F_2 F_1}{E_1 G_1 - F_1^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Его преимущество в том, что теперь мы имеем дело с безразмерными величинами. Левая часть равенства есть функция шести аргументов – пока мы рассматриваем  $r_1(u, v), r_2(u, v)$  как переменные вектор-функции. Пусть на место переменных вектор-функций подставлены фиксированные вектор-функции  $r_1(u, v), r_2(u, v)$ . Тем самым задано отображение их годографов:

$$f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2.$$

Лагранжиан  $L$  становится функцией от аргументов  $u, v$ . Именно,

$$\begin{aligned} \Lambda(u, v) = \left(1 - \frac{E_2(u, v)G_2(u, v) - F_2(u, v)^2}{E_1(u, v)G_1(u, v) - F_1(u, v)^2}\right)^2 + \\ + \left(2 + \frac{-E_2(u, v)G_1(u, v) - E_1(u, v)G_2(u, v) + 2F_2(u, v)F_1(u, v)}{E_1(u, v)G_1(u, v) - F_1(u, v)^2}\right)^2. \quad (1.2) \end{aligned}$$

**Определение 1.** Функцию (1.2) будем называть *основной функцией*.

Пусть поверхность  $\Sigma_2$  имеет конечную площадь равную  $S_2$ .

**Определение 2.** Дефектом отображения  $f$  будем называть величину, равную

$$K(f) \triangleq \frac{\iint \Lambda \sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} dudv}{S_2}^{(D)}. \quad (1.3)$$

**Пример 1.** Пусть поверхности, первая и вторая, принадлежат (каждая – своему) 1-семейству годографов вектор-функций

$$R_1 = \{u \cos v, \mu u \sin v, 0\}, \quad (1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi),$$

$$R_2 = \{\mu^2 u \cos v, u \sin v, 0\}, \quad (1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi).$$

Здесь  $\mu$  – вещественный параметр,

$$\mu > 0.$$

Например, при  $\mu = 2$  мы имеем дело с двумя плоскими областями, изображенными на рис. 1.

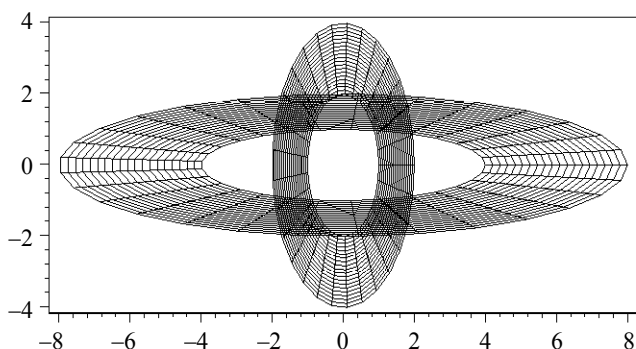


Рис. 1. Кольцо, вытянутое по вертикали, – первая поверхность при  $\mu = 2$ ; вытянутое по горизонтали, – вторая поверхность при том же значении параметра

Имеется в виду отображение первой поверхности на вторую. Матрицы первых квадратичных форм запишутся как

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos^2 v + \mu^2 \sin^2 v & u(\mu^2 - 1) \cos v \sin v \\ u(\mu^2 - 1) \cos v \sin v & u^2 (\sin^2 v + \mu^2 \cos^2 v) \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \mu^4 \cos^2 v + \sin^2 v & u(1 - \mu^4) \cos v \sin v \\ u(1 - \mu^4) \cos v \sin v & u^2 (\mu^4 \sin^2 v + \cos^2 v) \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение (1.1) принимает вид

$$u^2 [\lambda^2 \mu^2 - (1 + \mu^6) \lambda + \mu^4] = 0.$$

Его корни

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu^2}, \lambda_2 = \mu^4$$

суть квадраты экстремальных значений локальных искажений длин. Сами же локальные искажения длин выражаются функциями параметра  $\mu$ :

$$k_1(\mu) = \frac{1}{\mu}, k_2(\mu) = \mu^2.$$

Площадь второй поверхности

$$S_2 = 3\pi\mu^2.$$

Основная функция (1.2) принимает вид

$$\Lambda = \frac{(\mu^8 + 2\mu^6 - 2\mu^2 + 1)(\mu^4 - 1)}{\mu^4}.$$

При этом

$$\sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} = u\mu^2.$$

Значение дефекта отображения, согласно (1.3),

$$K(\mu) = \frac{\mu^2}{S_2} \int_1^2 u du \int_0^{2\pi} dv \Lambda = \frac{(\mu^8 + 2\mu^6 - 2\mu^2 + 1)(\mu^4 - 1)}{\mu^4}.$$

Рис. 2 иллюстрирует следующий, вполне очевидный факт, имеющий место в общем случае. Дефект отображения  $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  равен нулю тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия.

1. Поверхности  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  изометричны [4].
2. Отображение  $f$  есть изометрия [4].

Для рассматриваемого примера оба условия выполнены при  $\mu = 1$  и только в этом случае.

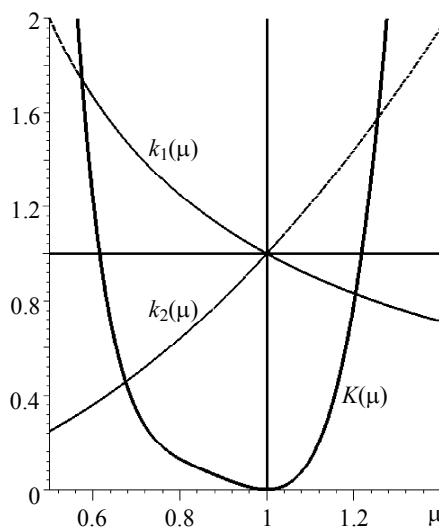


Рис. 2. Графики функций  $k_1(\mu)$ ,  $k_2(\mu)$ ,  $K(\mu)$  для примера 1

## 2. Дефект раскроя параболоида плоским листом

Проанализируем схему раскроя, построенную в [1]. Удобнее сначала привести матрицу метрического тензора куска параболоида, рассматриваемого как «вторая поверхность»  $\Sigma_2$ . Тогда

$$R_2 = \left\{ u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{4F} \right\}, \quad (0 \leq u \leq R, 0 \leq v < 2\pi), \quad (2.1)$$

где  $F$  – фокальный параметр параболоида. Константа  $R$  есть радиус вырезающего цилиндра для осесимметричного рефлектора. Практика конструирования свидетельствует, что с высокой долей уверенности можно полагаться на неравенство

$$R \leq F,$$

то есть рассматривать  $F$  как верхнюю оценку величины  $R$ .

Матрица метрического тензора

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{4F^2 + u^2}{4F^2} & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\sqrt{E_2 G_2 - F_2^2} = \frac{u}{2F} \sqrt{1 + \left(\frac{u}{2F}\right)^2} = \frac{u}{2F} + \frac{u^3}{16F^3} + O\left(\left(\frac{u}{2F}\right)^5\right).$$

Элемент площади второй поверхности (там, где это упрощает вычисление функционала) приблизим выражением

$$\left(\frac{u}{2F} + \frac{u^3}{16F^3}\right) du dv.$$

Точное значение площади данной поверхности

$$S_2 = \frac{\left((4F^2 + R^2)^{3/2} - 8F^3\right)\pi}{3F}.$$

Верхнюю оценку площади получим при  $R = F$ . Тогда

$$S_2^{\max} = \frac{F^2 (5\sqrt{5} - 8)\pi}{3} \approx 3.330444 \cdot F^2.$$

В качестве первой поверхности применяем годограф вектор-функции, определенной в [1]. Именно,

$$\mathbf{R}_1 = \{u \cdot g(u) \cos v, u \cdot g(u) \sin(v), 0\}, \quad 0 \leq u \leq R, \quad 0 \leq v < 2\pi,$$

где

$$g(u) = 1 + \frac{u^2}{32F^2} - \frac{0.001941 \cdot u^3}{F^3}.$$

Коэффициенты первой квадратичной формы

$$E_1 = F^{-6} \cdot 0.16 \cdot 10^{-12} \left(0.25 \cdot 10^7 \cdot F^3 + 234375 \cdot F \cdot u^2 - 19412 \cdot u^3\right)^2,$$

$$F_1 = 0,$$

$$G_1 = F^{-6} \cdot 0.16 \cdot 10^{-12} \cdot u^2 \cdot \left(0.25 \cdot 10^7 \cdot F^3 + 78125 \cdot F \cdot u^2 - 4853 \cdot u^3\right)^2.$$

Основную функцию представим в виде

$$\Lambda = \left[1 - \frac{0.1024 \cdot 10^{-24} (A^2 B^2)}{F^{10} (4F^2 + u^2)}\right]^2 + \left[2 - \frac{4(C + E)F^2}{u^2 (4F^2 + u^2)}\right]^2.$$

В свою очередь,

$$A = 2500000.0 \cdot F^3 + 234375.0u^2F - 19412.0u^3,$$

$$B = 2500000.0F^3 + 78125.0u^2F - 4853.0u^3,$$

$$C = 1.6 \times 10^{-5} \frac{(2500000.0F^3 + 234375.0u^2F - 19412.0u^3)^2 u^2}{F^6},$$

$$E = 4.0 \times 10^{-5} \frac{(4F^2 + u^2)u^2 (2500000.0F^3 + 78125.0u^2F - 4853.0u^3)^2}{F^8}.$$

Аппроксимация основной функции отрезком ряда Тейлора до степени 32 приводит к полиному

$$\Lambda s = \frac{u^6}{F^{31}} \sum_{i=0}^{25} p_i u^i F^{25-i}.$$

Список коэффициентов  $p_0, p_1, \dots, p_{25}$ :

$$\begin{aligned} &0.000754, -0.001820, 0.000595, 0.000595, -0.000448, -0.000200, 0.000167, \\ &0.000062, -0.000056, -0.000019, 0.000017, 0.543941 \cdot 10^{-5}, -0.518774 \cdot 10^{-5}, \\ &-0.155383 \cdot 10^{-5}, 0.151156 \cdot 10^{-5}, 0.436453 \cdot 10^{-6}, -0.431547 \cdot 10^{-6}, -0.121175 \cdot 10^{-6}, \\ &0.121301 \cdot 10^{-6}, 0.333089 \cdot 10^{-7}, -0.336788 \cdot 10^{-7}, -0.908106 \cdot 10^{-8}, \\ &0.925809 \cdot 10^{-8}, 0.245872 \cdot 10^{-8}, -0.252412 \cdot 10^{-8}, -0.661785 \cdot 10^{-9}. \end{aligned}$$

Для оценки качества полиномиального приближения определим функцию

$$W(F, u, v) = \frac{\Lambda - \Lambda s}{\Lambda}$$

и изобразим серию графиков  $W(i, u, v)$  при  $i = 4, \dots, 16$ ;  $u = 4, \dots, i$ ;  $\left(-\frac{\pi}{8} \leq v \leq \frac{\pi}{8}\right)$ .

Использование фиктивно входящей переменной  $v$  делает график более обозримым. Получаем рис. 3.

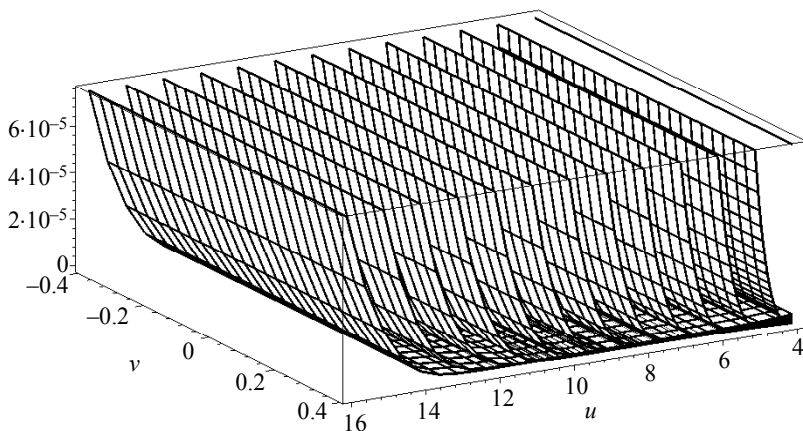


Рис. 3. Относительные отклонения полиномиального приближения основной функции от точного значения для различных значений параметра  $F$  и переменной  $u$

Полагаем, что полиномиальное приближение удовлетворительно. Вычислим значение функционала на всем рефлекторе:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} dv \int_0^F \Lambda s \left( \frac{u}{2F} + \frac{u^3}{16F^3} \right) du \approx 0.480982 \cdot 10^{-5} F.$$

Дефект отображения равен приближенно

$$\frac{\Phi}{S_2} \approx \frac{0.14442}{F} \cdot 10^{-5}. \quad (2.2)$$

Полученный результат согласуется с тем, что гауссова кривизна параболоида вращения

$$K = \frac{4F^2}{(4F^2 + u^2)^2}.$$

Ясно, что

$$\lim_{F \rightarrow \infty} K = 0.$$

В этом смысле, чем дальше область параболоида от вершины, тем менее она отличается (локально!) от плоской области. Тогда и дефект отображения (при должном выборе отображения) должен стремиться к нулю при  $F \rightarrow \infty$ , что и видно из (2.2).

Следует отметить, что в основе модели лежит допущение о том, что выкроенный лист сетеполотна каждой своей точкой прикреплен к соответствующей точке параболоида. Прочие обстоятельства данной моделью не учитываются.

### 3. Дефект раскроя параболоида лепестками с закругленными краями

Речь пойдет о схеме раскроя, рассмотренной в [2]. Рефлектор разделен на  $n$  равных секторов плоскостями, проведенными через его ось. Вторая поверхность, таким образом, задается вектор-функцией

$$R_2 = \left\{ u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{4F} \right\}, \quad 0 \leq u \leq R, -\frac{\pi}{n} \leq v < \frac{\pi}{n}.$$

Первая поверхность (часть плоскости) согласно [2] есть гогограф вектор-функции

$$R_1 = \{ s \cos(\alpha), s \sin(\alpha), 0 \}, \quad 0 \leq u \leq R, -\frac{\pi}{n} \leq v < \frac{\pi}{n},$$

где

$$s = \frac{1}{4F} \left( -4F^2 \ln 2 - 4F^2 \ln(F) + u \sqrt{4F^2 + u^2} + 4F^2 \ln \left( u + \sqrt{4F^2 + u^2} \right) \right), \quad \alpha = \frac{uv}{s}.$$

Мы не приводим матрицу метрического тензора ввиду крайней громоздкости. По тем же причинам опускаем запись основной функции. Заметим, что применяя аппроксимацию отрезком ряда Тейлора до степени 32, принимаем для основной функции приближенное представление

$$\Lambda \approx \tilde{\Lambda} = v^4 u^{12} F^{-26} \sum_{i=1}^{12} K_i F^{2i-2} u^{24-2i}.$$

Список коэффициентов  $K_1, \dots, K_{12}$  таков:

$$\begin{aligned} &-0.184630 \cdot 10^{-8}, 0.626208 \cdot 10^{-8}, -0.208315 \cdot 10^{-7}, 0.676934 \cdot 10^{-7}, \\ &-0.213701 \cdot 10^{-6}, 0.650357 \cdot 10^{-6}, -0.188674 \cdot 10^{-5}, 0.512967 \cdot 10^{-5}, \\ &-0.000013, 0.000027, -0.000047, 0.000048. \end{aligned}$$

Для оценки качества полиномиального приближения определим функцию

$$W(F, u, v) = \frac{\Lambda - \tilde{\Lambda}}{\Lambda}.$$

Изобразим серию графиков  $W(i, u, v)$  при  $i = 4, \dots, 16$ ;  $u = 4, \dots, i$ ;  $\left(-\frac{\pi}{8} \leq v \leq \frac{\pi}{8}\right)$ .

Использование фиктивно входящей переменной  $v$  делает график более обзорным. Получаем рис. 4.

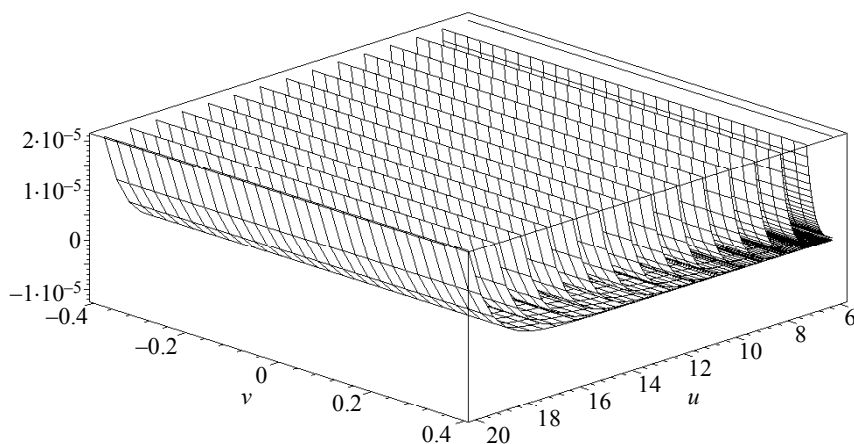


Рис. 4. Относительные отклонения полиномиального приближения основной функции от точного значения для различных значений параметра  $F$  и переменной  $u$

Полагаем, что полиномиальное приближение удовлетворительно. Вычислим значение функционала на всем рефлекторе:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} dv \int_0^F \tilde{\Lambda} \left( \frac{u}{2F} + \frac{u^3}{16F^3} \right) du \approx \frac{0.000156 \cdot F}{n^4}.$$

Дефект отображения равен (приблизленно)

$$\frac{\Phi}{S_2} \approx \frac{0.000047}{F \cdot n^4}. \quad (3.1)$$

Как и выше, отмечаем, что в основе модели лежит допущение о том, что выкроенный лист сетеполотна каждой своей точкой прикреплен к соответствующей точке параболоида. Прочие обстоятельства данной моделью не учитываются. Не учтен и так называемый «матрасный эффект»[7] – прогиб сетеполотна между двумя параболическими ребрами жесткости. Этот вопрос отложен до следующей публикации.



Для сопоставления дефектов (2.2 и (3.1) достаточно сравнить коэффициенты при  $F^{-1}$ . Обозначим их соответственно  $H_1$  и  $H_2$ . Обе величины считаем функциями от  $n$ . Тогда, откладывая  $n$  на оси абсцисс, получаем рис. 5, приведенный ниже.

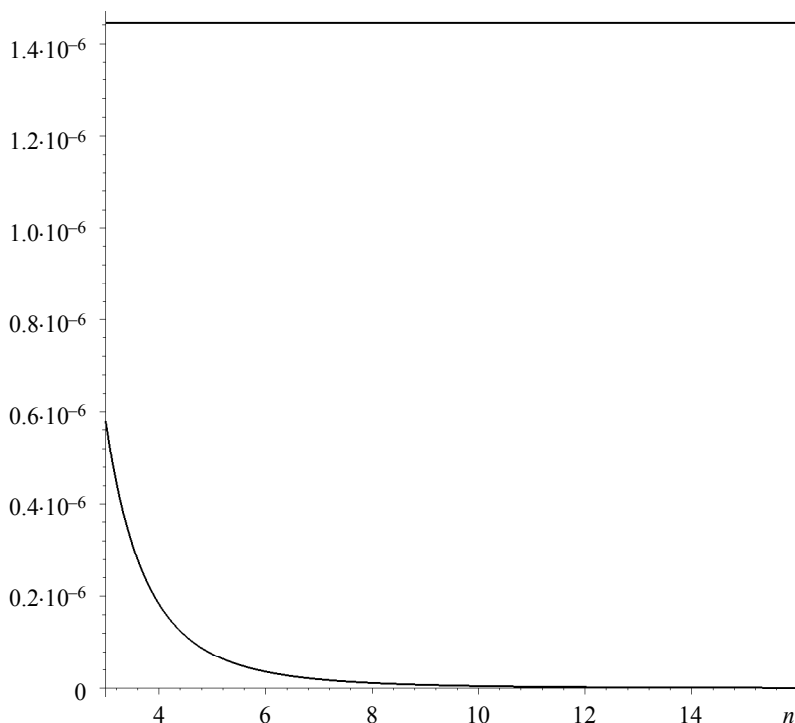


Рис. 5. Значения  $H_1(n)$  (верхняя линия) и  $H_2(n)$  (нижняя линия)

#### 4. Дефект выкраивания путем центрального проецирования

Кусок параболоида задан, как и прежде, вектор-функцией (2.1). Кусок плоскости – круг в плоскости  $z = 0$  с центром в вершине параболоида. Отображение одной поверхности на другую совершается путем проецирования из центра  $C$ , расположенного на оси параболоида. Достаточно ясно, что центр следует поместить на положительной полуоси  $Oz$ . Желая иметь дело с безразмерными величинами, полагаем, что центр есть точка

$$C(0, 0, kF), \quad k > 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что текущей точке параболоида с радиус-вектором

$$\mathbf{R}_2 = \left\{ u \cos v, u \sin v, \frac{u^2}{4F} \right\}, \quad 0 \leq u \leq R, \quad 0 \leq v < 2\pi,$$

соответствует точка плоскости, радиус-вектор которой

$$\mathbf{R}_1 = \left\{ \frac{4F^2 k u \cos v}{4F^2 k - u^2}, \frac{4F^2 k u \sin v}{4F^2 k - u^2}, 0 \right\}. \quad (4.1)$$

Матрица метрического тензора для (4.1) имеет вид

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{16F^4 k^2 (u^2 + 4F^2 k)^2}{(4F^2 k - u^2)^4} & 0 \\ 0 & \frac{16F^4 k^2 u^2}{(4F^2 k - u^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Наконец, основная функция выражается формулой

$$\Lambda = \left( 1 - \frac{1024F^{10}k^4 (u^2 + 4F^2 k)^2}{(4F^2 k - u^2)^6 (4F^2 + u^2)} \right)^2 + \left( 2 - 4 \left( \frac{16F^4 k^2 (u^2 + 4F^2 k)^2 u^2}{(4F^2 k - u^2)^4} + \frac{4(4F^2 + u^2)F^2 k^2 u^2}{(4F^2 k - u^2)^2} \right) F^2 (4F^2 + u^2)^{-1} u^{-2} \right)^2.$$

Как и прежде, строится полиномиальное приближение  $\tilde{\Lambda}$  для основной функции. Его мы не приводим ввиду крайней громоздкости, но приводим рис. 6, отображающий относительную погрешность аппроксимации при значениях  $F \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Полагаем, что аппроксимация вполне удовлетворительна.

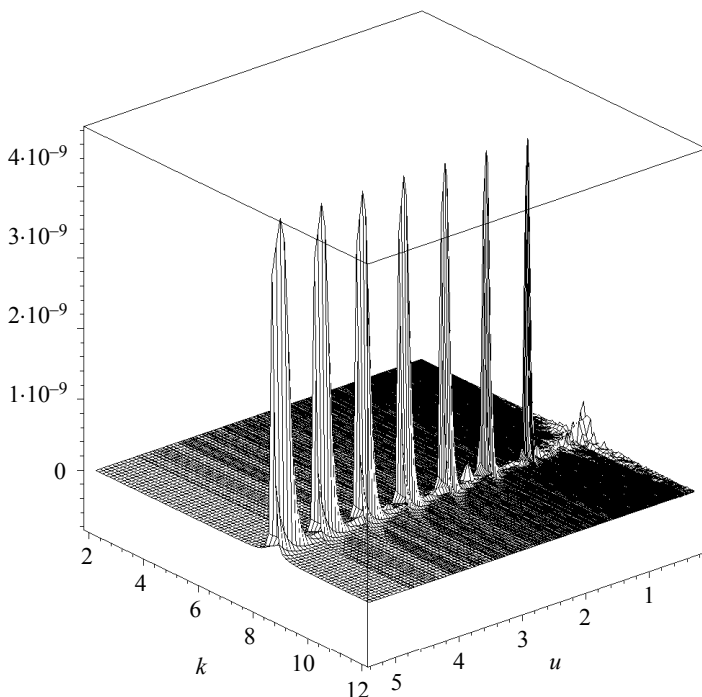


Рис. 6. Относительная погрешность аппроксимации при значениях  $F \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Дефект отображения равен (приближенно)

$$W \approx 0.3002603 \cdot 10^{-12} \cdot k^{-15} \cdot \sum_{i=0}^{15} b_i \cdot k^i.$$

Массив коэффициентов  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{15}$  в указанном порядке имеет вид

$$\begin{aligned} &0.129674 \cdot 10^{11}, 0.778043 \cdot 10^{10}, 0.414956 \cdot 10^{11}, 0.752108 \cdot 10^{11}, \\ &0.171169 \cdot 10^{12}, 0.344932 \cdot 10^{12}, 0.687271 \cdot 10^{12}, 0.128636 \cdot 10^{13}, \\ &0.227811 \cdot 10^{13}, 0.374264 \cdot 10^{13}, 0.560891 \cdot 10^{13}, 0.741947 \cdot 10^{13}, \\ &0.807421 \cdot 10^{13}, 0.574284 \cdot 10^{13}, -0.166120 \cdot 10^{13}, 0.101486 \cdot 10^{12}. \end{aligned}$$

Естественный вопрос: при каком значении  $k$  достигается минимум дефекта? Ответ несложен, если учесть, что  $k > 0$  и, кроме того,  $W(k) > 0$ . Приводим последовательность знаков коэффициентов производной полинома  $W$ :

$$\{+, +, -, -, -, -, -, -, -, -, -, -, -, -, -\}.$$

Ясно, что производная имеет единственный вещественный корень  $k_0$ . Без труда вычисляем

$$k_0 \approx 8.82321.$$

Далее,

$$\lim_{k \rightarrow +0} W = +\infty, \quad W(k_0) \approx 0.000021, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} W(k) \approx 0.030472.$$

Таким образом, приняв указанную схему раскроя, можем понизить дефект отображения только лишь до 0.000021.

## 5. Заключение

Напомним, что под раскроем мы подразумеваем отображение куска плоскости (лист сетеполотна) на некоторую область параболоида. Это само по себе идеализирующее допущение, но оно не единственное. Как только в рассмотрение войдет тот факт, что сетеполотно прикрепляется не к гипотетическому параболоиду, а к несущим конструкциям того или иного типа, объект моделирования станет заметно иным. Рассмотрение идеализированной (то есть на практике не встречающейся) конструкции полезно хотя бы для осознания, от чего отклоняется реальная конструкция. Впрочем, предложенный в данной работе числовой параметр, названный **дефектом отображения**, индифферентен тому, какая поверхность на какую отображается. В этом смысле представляет интерес применение данного понятия к поверхности сетеполотна, подверженной «матрасному эффекту» [7], что ощутимо приблизило бы его к анализу реальных конструкций. Препятствием (не единственным) является размер статьи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 1 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 2(34). С. 5–17.
2. Бухтяк М.С., Соломина А.В. Геометрическое моделирование раскроя сетеполотна для осесимметричного рефлектора. Часть 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 5–14.

3. Бухтяк М.С. Нормальная конгруэнция параболоида. Демиквадрики // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 5(37). С. 5–14.
4. Кэган В.Ф. Основы теории поверхностей. М.; Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. 407 с.
5. Лучинин А.А. О парах  $m$ -поверхностей в  $n$ -мерном проективном пространстве // Геом. сб. Вып. 9. Томск: Изд-во ТГУ, 1972. С. 21–29.
6. Чешкова М.А. О паре поверхностей в евклидовом пространстве // Математические заметки. 2004. Т. 75. Вып. 3. С. 474–475.
7. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М.: Радио и связь, 1987. 72 с.

Статья поступила 22.10.2015 г.

*Bukhtyak M.S., Solomina A.V. ON AN INVARIANT OF SURFACE MAPPING AS APPLIED TO METALLIC MESH TAILORING*

DOI 10.17223/19988621/39/2

As in previous publications, the authors establish a goal to study tailoring of a metallic mesh to form an axially symmetric parabolic reflector. The tailoring is identified with a one-to-one mapping of a plane onto a part of a paraboloid of revolution. This representation of tailoring has a strong but inevitable idealization. The issue of a comparison criterion for two tailoring schemes is deemed important. In general terms this refers to a criterion of mapping a surface to surface. The mapping defect criterion proposed by the authors is not perfect – like any other criterion. In any case, it makes it possible to answer the question: in what sense one mapping is preferable to another. The article gives examples of the criterion's application.

Keywords: parabolic reflector, metallic mesh, mapping of surfaces, defect of surface-to-surface mapping, approximation.

*BUKHTYAK Mikhail Stepanovich* (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: bukhtyakm@mail.ru

*SOLOMINA Anna Vladimirovna* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: annavladimirovna483@mail.ru

#### REFERENCES

1. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 1. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 2(34), pp. 5–17. DOI: 10.17223/19988621/34/1 (in Russian)
2. Bukhtyak M.S., Solomina A.V. Geometricheskoe modelirovanie raskroya setepolotna dlya osesimmetrichnogo reflektora. Chast' 2. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 4(36), pp. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/36/1 (in Russian)
3. Bukhtyak M.S. Normal'naya kongruentsiya paraboloida. Demikvadriki. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 5(37), pp. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/37/1 (in Russian)
4. Kagan V.F. *Osnovy teorii poverkhnostey*. Moscow, Leningrad, OGIZ GITTL Publ., 1948. 407 p. (in Russian)
5. Luchinin A.A. O parakh  $m$ -poverkhnostey v  $n$ -mernom proektivnom prostranstve. *Geom. sb.*, no. 9. Tomsk, Izd-vo TGU, 1972, pp. 21–29. (in Russian)
6. Cheshkova M.A. O pare poverkhnostey v evklidovom prostranstve. *Matematicheskie zametki*, 2004, vol. 75, no. 3, pp. 474–475. (in Russian)
7. Gryanik M.V., Loman V.I. *Razvertyvaemye zerkal'nye antennoy zontichnogo tipa*. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1987. 72 p. (in Russian)