

УДК 517.54

DOI 10.17223/19988621/39/3

В.М. Радыгин, И.С. Полянский

## МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НАПЕРЕД ЗАДАННЫХ МНОГОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Разработан метод решения обратной задачи Кристоффеля – Шварца – конформное отображение наперед заданной многоугольной области на каноническую область – единичный круг. В основе метода лежит применение обобщенной функции Жуковского для решения модельных задач отображения на верхнюю полуплоскость луночки, в общем случае заданной сектором произвольной области с гладкой границей в расширенной плоскости комплексного переменного. Работоспособность решения проверена на конкретных примерах.

**Ключевые слова:** конформное отображение, многоугольная область, единичный круг, обратная задача Кристоффеля – Шварца.

Большое число работ [1–4 и др.] рассматривают решение задачи конформного отображения канонической области, например полуплоскости или единичного круга, на односвязную область расширенной комплексной плоскости, ограниченную ломаной, – многоугольную область. При этом наибольший практический интерес широкого класса прикладных задач вызывает решение обратной задачи (конформное отображение наперед заданной многоугольной области). Поскольку дополнение методов прямого отображения (интеграл Кристоффеля – Шварца [4]) обратными [5] существенно расширяет эффективное применение конформного отображения при решении различных краевых задач физики и техники [1], например в постановке [6] барицентрического метода [7, 8]. Поэтому целью статьи является разработка метода конформного отображения наперед заданных многоугольных областей.

### 1. Постановка задачи

Определим последовательность неповторяющихся  $N$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_N$  комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , которые являются вершинами  $N$ -угольной области  $\Omega \subset \mathbb{C}$  с заданными значениями величины внутренних углов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ , соответствующих по  $n$ -му индексу  $(n = \overline{1, N})$  точкам  $A_n$ , и таких, что  $0 < \alpha_n < \pi$ ,

$\sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{\pi} = N - 2$ . Геометрический центр области  $\Omega$  совпадает с началом координат

комплексной плоскости. Нумерацию точек  $A_n = r_n e^{i\varphi_n}$  определим в порядке положительного обхода области  $\Omega$ :  $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_N$ . Известно, что для заданных точек  $b_n$ , расположенных на единичной окружности  $G \subset \mathbb{C}$  и являющихся про-

образами вершин  $A_n$ , конформное отображение единичного круга  $|t| < 1$  на область  $\Omega$  определяется известным интегралом Кристоффеля – Шварца [3]:

$$z = f(t) = C_0 \int_0^t \left[ \prod_{n=1}^N (1 - \tau/b_n)^{\alpha_n/\pi-1} \right] d\tau + C_1, \quad (1)$$

где  $z \in \Omega$ ;  $C_0 \neq 0$  и  $C_1$  – комплексные константы.

С учетом использованных соотношений найдем обратное отображение области  $\Omega$  на единичный круг  $|t| < 1$ , т. е. функцию  $t = f^{-1}(z)$  для заданного интеграла Кристоффеля – Шварца (1).

## 2. Построение обратного отображения

Известно [2, 3 и др.], что прямое  $\omega = (z-i)/(z+i)$  и обратное  $z = i(1+\omega)/(1-\omega)$  преобразования Кэли переводят любую прямую в дугу единичной окружности и обратно. Используя дробно-линейное преобразование

$$\zeta = i(R+z)/(R-z), \quad (2)$$

где  $R$  – минимальный радиус окружности  $\Omega'$ , содержащей в себе все вершины  $A_n$  многоугольника, отобразим многоугольную область  $z \in \Omega$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \zeta > 0$  с вырезанными круговыми двуугольниками (круговые луночки) [2]. При этом вершины, расположенные на границе окружности  $\Omega'$ , будут отображаться в точки действительной оси  $a_n = -\sin(\varphi_n)/(1 - \cos(\varphi_n))$  полуплоскости. Вершины, расположенные внутри окружности  $\Omega'$ , будут отображаться в точки  $a_n$ , отступающие от действительной оси на величину  $(R^2 - |A_n|^2)/(|A_n|^2 + R^2 - 2|A_n|\cos(\varphi_n))$ , а от мнимой оси соответственно на величину  $-2R|A_n|\sin(\varphi_n)/(|A_n|^2 + R^2 - 2|A_n|\cos(\varphi_n))$ . На рис. 1 приведен пример отображения семиугольника на верхнюю полуплоскость дробно-линейным отображением (2).

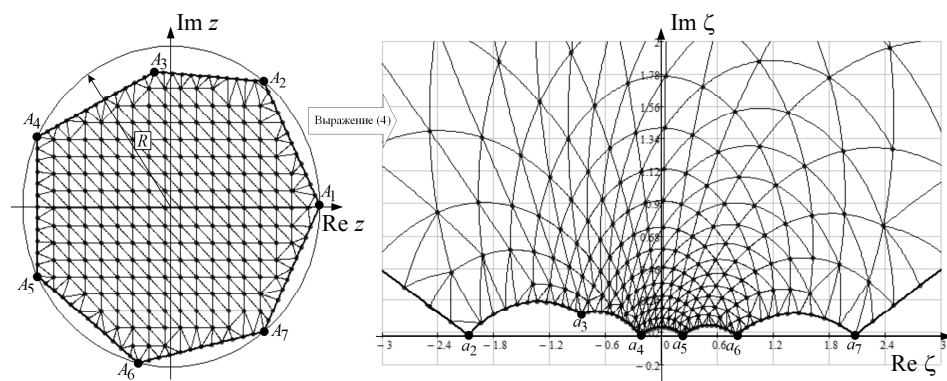


Рис. 1. Пример отображения семиугольника на верхнюю полуплоскость дробно-линейным отображением (2)

Для последующего отображения полученной области с вырезанными круговыми двугульниками (см., например, рис. 1) на верхнюю полуплоскость применим последовательность отображений. Подобный метод с учетом рассмотренного обобщения в [1] принято называть методом последовательных конформных отображений (метод исчерпывания). Для реализации указанного метода рассмотрим решение трех модельных задач (обратных отображений).

### 3. Модельные задачи обратного отображения

Первой является задача на построение отображения полуплоскости с выброшенным сегментом круга на полуплоскость [3]. В ней указанное отображение производится для ребра  $e_n = \{A_n, A_{n+1}\}$  исходного многоугольника, заданного парой соседних вершин  $A_n$  и  $A_{n+1}$ , расположенных на границе окружности  $\Omega'$ . Решение задачи отображения полуплоскости с выброшенным сегментом круга на полуплоскость без вырезов известно [1 – 3] и производится обобщенной функцией Жуковского. Параметры удаляемого  $n$ -го сегмента: радиус  $R_n$  и положение центра координат круга  $m_n$  определяются по трем точкам, принадлежащим ребру  $e_n$ . При этом добавление произвольного кругового сегмента в полуплоскость обобщенной функцией Жуковского приведет к изменению остальных круговых двугульников.

**Лемма 1.** Применение обобщенной функцией Жуковского  $\varpi(\zeta) = S_3(S_2(S_1(\zeta)))$ , где  $S_1(\zeta) = (\zeta - a)/(\zeta + a)$ ;  $S_2(\zeta) = \zeta^\gamma$ ;  $S_3(\zeta) = a\gamma(1 + \zeta)/(1 - \zeta)$  при  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ , для добавления  $n$ -го ( $n = \overline{1, N}$ ) кругового сегмента в верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \zeta > 0$  с  $N$  выброшенными круговыми сегментами приводит к отображению исходной области на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \varpi > 0$  с  $N - 1$  выброшенными эллиптическими сегментами.

**Доказательство.** Известно [9], что применение любого дробно-линейного преобразования к окружности приводит к ее отображению на другую окружность, при этом под термином «окружность» понимается не только окружность в собственном смысле слова, но и прямая. С учетом этого следует рассматривать влияние степенного отображения  $S_2(\zeta) = \zeta^\gamma$  на форму  $N - 1$  выброшенных сегментов круга из верхней полуплоскости  $\text{Im } \zeta > 0$  при решении задачи отображения  $n$ -й ( $n = \overline{1, N}$ ) круговой луночки.

Пусть функция  $S_2(\zeta)$  задана степенным рядом

$$S_2(\zeta) = \zeta^\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n; \quad c_n = a_n + ib_n. \quad (3)$$

Тогда, представив степенную функцию равенством  $\zeta^\gamma = e^{\gamma \ln(\zeta)} = \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma \ln(\zeta))^n / n!$ ,

где  $\zeta = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ , найдем коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$ :

$$\begin{aligned} a_n &= (\gamma/r)^n \cos(n \arctg[(\varphi \cos \varphi - \ln r \sin \varphi)/(\ln r \cos \varphi + \varphi \sin \varphi)]) (\ln^2 r + \varphi^2)^{n/2} / n!; \\ b_n &= (\gamma/r)^n \sin(n \arctg[(\varphi \cos \varphi - \ln r \sin \varphi)/(\ln r \cos \varphi + \varphi \sin \varphi)]) (\ln^2 r + \varphi^2)^{n/2} / n!. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом полученных соотношений (5) ряд (4) будет иметь вид

$$S_2(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \gamma^n \rho_n(r, \varphi) (\cos(\phi_n(r, \varphi)) + i \sin(\phi_n(r, \varphi))) \right];$$

$$\rho_n(r, \varphi) = (\ln^2 r + \varphi^2)^{n/2} / n!;$$
(5)

$$\phi_n(r, \varphi) = n [\arctg((\varphi \cos \varphi - \ln r \sin \varphi) / (\ln r \cos \varphi + \varphi \sin \varphi)) + \varphi].$$

Известно [10], что применение степенного преобразования к кривой второго порядка не приводит к повышению порядка кривой. Пусть на границе произвольного  $k$ -го ( $k, n = \overline{1, N}$ ,  $\operatorname{Re} m_k < \operatorname{Re} m_n$ ,  $k \neq n$ ) кругового сегмента с центром в  $m_k$  исходной полуплоскости  $\operatorname{Im} \zeta > 0$  задано пять точек  $h_j = r_j e^{i\varphi_j + 2l\pi}$  ( $\forall l = 0, 1, 2, \dots; j = \overline{1, 5}$ ) при условии, что точки  $h_1$  и  $h_5$  расположены на противоположных концах выбранной  $k$ -й дуги, т. е.  $\varphi_1 = \varphi_5 = 0$ . Тогда коэффициенты уравнения кривой второго порядка в декартовой системе

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 1$$
(6)

задаются равенствами

$$a_{11} = |H_1|/|M|; \quad a_{12} = 0,5|H_2|/|M|; \quad a_{22} = |H_3|/|M|;$$

$$a_{13} = 0,5|H_4|/|M|; \quad a_{23} = 0,5|H_5|/|M|,$$
(7)

где  $M = (M_{j,i})_{5 \times 5}$  – матрица, элементы которой определяются  $j$ -ми точками кривой для  $l = 0$  с учетом выражения (5) в виде

$$M_{j,1} = \left( \sum_{n=0}^N \gamma^n \rho_{j,n} \cos \phi_{j,n} \right)^2; \quad M_{j,3} = \left( \sum_{n=0}^N \gamma^n \rho_{j,n} \sin \phi_{j,n} \right)^2;$$

$$M_{j,4} = \sum_{n=0}^N \gamma^n \rho_{j,n} \cos \phi_{j,n}; \quad M_{j,5} = \sum_{n=0}^N \gamma^n \rho_{j,n} \sin \phi_{j,n};$$
(8)

$$M_{j,2} = \sum_{n=0}^N \gamma^n \rho_{j,n} \cos \phi_{j,n} \sum_{n=0}^N \gamma^n \rho_{j,n} \sin \phi_{j,n}, \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

$H_k = (H_{j,i}^k)_{5 \times 5}$  – матрица, формируемая матрицей  $M$  при замене ее  $k$ -го столбца вектором  $e = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$ ;  $\rho_{j,n} = \rho_n(r_j, \varphi_j)$ ;  $\phi_{j,n} = \phi_n(r_j, \varphi_j)$ .

Из (8) следует, что при фиксированном  $N$  в матрице  $M$  элементы 1-го и 3-го столбца можно представить суммой из  $N + \binom{N}{2}$  слагаемых, элементы 2-го столбца – суммой из  $N^2$  слагаемых, элементы 4-го и 5-го столбцов – суммой из  $N$  слагаемых. Поскольку в указанном случае элементы  $j$ -х столбцов – суть суммы равного числа слагаемых, то определитель матрицы  $M$  можно представить в виде

суммы из  $N' = 2^{10N+2} \binom{N}{2} + N^2 - 14$  определителей. В этих определителях элементы соответствующих строк заменяются отдельными слагаемыми, представленными

произведением  $\gamma^{2n}$  или  $\gamma^n$  и  $\rho_{j,n}^2 \cos^2 \phi_{j,n}$  или  $\rho_{j,n}^2 \sin^2 \phi_{j,n}$ , или  $2\rho_{j,n}^2 \sin \phi_{j,n} \cos \phi_{j,n}$ , или  $2\rho_{j_1,n_1} \rho_{j_2,n_2} \sin \phi_{j_1,n_1} \cos \phi_{j_2,n_2}$ , или  $\rho_{j,n} \cos \phi_{j,n}$ , или  $\rho_{j,n} \sin \phi_{j,n}$  множителей. При этом все элементы отдельного слагаемого определителя произвольного столбца матрицы содержат общий множитель  $\gamma^{2n}$  или  $\gamma^n$ , который с учетом свойств определителя можно вынести за его знак. Аналогичным образом представляются определители матриц  $H_1, H_2, \dots, H_5$  в виде суммы из  $2^{10N + \binom{N}{2} + N^2 - 13}$ ,  $2^{10N + 2\binom{N}{2} - 12}$ ,  $2^{10N + \binom{N}{2} + N^2 - 13}$ ,  $2^{5N + 2\binom{N}{2} + N^2 - 9}$ ,  $2^{5N + 2\binom{N}{2} + N^2 - 9}$  слагаемых соответственно с вынесенными множителями, кратными  $\gamma^n$ .

Поскольку исходно кривая (6) в области  $\zeta$  является окружностью при  $\gamma = 1$  в выражении (8), то  $a_{11} = a_{22}$  и  $a_{12} = 0$ , а инварианты кривой

$$I_1 = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{22}a_{13}^2 + a_{11}a_{23}^2; \quad I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2; \quad I_3 = a_{11} + a_{22} \quad (9)$$

удовлетворяют условиям  $I_2 > 0$ ;  $I_1 \cdot I_3 < 0$ ;  $I_3^2 = 4I_2$  [10].

С учетом указанного вида определителей матриц  $M$  и  $H_1, H_2, \dots, H_5$  при условии  $M_{1,2} = M_{5,2} = M_{1,3} = M_{5,3} = M_{1,5} = M_{5,5} = 0$ , задающих коэффициенты (7) уравнения кривой второго порядка (6) и, как следствие, вид инвариантов (9): условия  $I_2 > 0$  и  $I_1 \cdot I_3 < 0$  для инвариантов кривой (6), останутся неизменными. Следовательно, кривые при преобразовании  $S_2(\zeta)$  будут эллипсами. ■

Указанное изменение остальных круговых двуугольников определяет постановку второй модельной задачи: отображение полуплоскости с выброшенным сегментом эллипса (эллиптической луночки) на полуплоскость. Решение данной задачи базируется на следующем утверждении.

**Теорема 1.** Конформное отображение верхней полуплоскости с выброшенным сегментом, образованным пересечением полуплоскости с произвольной односвязной областью  $\Theta$  с гладкой границей  $\Gamma$  расширенной плоскости комплексного переменного, на верхнюю полуплоскость при условии  $\exists a(\varphi), b(\varphi)$  для  $\forall \varphi \in [0; \pi]$  осуществляется обобщенной функцией Жуковского вида  $\varpi(\zeta) = S_3(S_2(S_1(\zeta)))$  при

$$S_1(\zeta) = [\zeta - a(\varphi)][\zeta - b(\varphi)]^{-1}; \quad S_2(\zeta) = \zeta^{\gamma(\varphi)};$$

$$S_3(\zeta) = 0,5\gamma(\varphi)[a(\varphi) - b(\varphi)](1 + \zeta)/(1 - \zeta)$$

$$\text{и нормировке } \varpi(\infty) = \infty; \quad \varpi'(\infty) = 1, \quad (10)$$

где  $\varphi = \arg(\zeta)$ ;  $a(\varphi)$ ,  $b(\varphi)$  – точки пересечения действительной оси с соприкасающейся окружностью;  $\gamma(\varphi) = \pi/(\pi - \beta(\varphi))$ ;  $\beta(\varphi)$  – угол, образованный соприкасающейся окружностью в точке ее пересечения  $a(\varphi)$  с действительной осью.

При этом соприкасающаяся окружность формируется границей выброшенного из полуплоскости сегмента односвязной области в окрестности точки  $\tau \in \Gamma$  при  $\arg(\tau) = \varphi$ .

**Доказательство.** Пусть граница  $\Gamma$  области  $\Theta$  в верхней полуплоскости определена кривой, заданной уравнением  $\tau(\varphi) = u(\varphi) + iv(\varphi)$  с параметризацией по  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Для произвольной точки кривой  $\Gamma$  определим соприкасающуюся окружность (рис. 2). Данная окружность имеет радиус  $\rho$ , соответствующий радиусу кривизны кривой в окрестности  $\tau$ , и центр, расположенный в  $z_0 = x_0 + iy_0$ .

Введем обозначения

$$\mu(\zeta) = \wp e^{i\vartheta} = \xi + i\eta = (\zeta - a)/(\zeta - b), \quad (11)$$

где  $\vartheta = \arg[(\zeta - a)/(\zeta - b)]$  – угол, под которым из заданной точки  $\zeta$  исходной верхней полуплоскости с выброшенным сегментом при  $\arg(\zeta) = \varphi$  видны точки  $a$  и  $b$ ;  $\wp = |(\zeta - a)/(\zeta - b)|$  – отношение расстояний от точки  $\zeta$  до точек  $a$  и  $b$ . Так как  $\zeta = x + iy$ , то преобразование (12) приведем к виду

$$\xi + i\eta = \left(1 - (x - b)(a - b)/[(x - b)^2 + y^2]\right) + i\left(y(a - b)/[(x - b)^2 + y^2]\right). \quad (12)$$

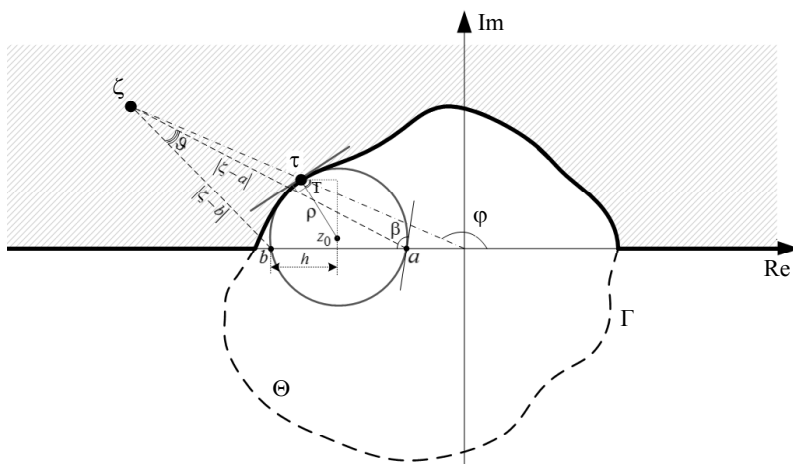


Рис. 2. Геометрическое представление задачи отображения полуплоскости с выброшенным сегментом

С учетом (12) параметры  $\wp$  и  $\vartheta$  могут быть определены через соответствующие выражения:

$$\begin{aligned} \wp^2 &= 1 - (a - b)(2x - b - a)/[(x - b)^2 + y^2]; \\ \operatorname{tg} \vartheta &= y(a - b)/[x^2 + y^2 - x(a + b) + ab]. \end{aligned} \quad (13)$$

Предположим, что обобщенная функция  $\varpi(\zeta)$  Жуковского вида (10) отображает кривую  $\tau$  на действительную ось. Тогда для  $\mu(\tau) = S_2(S_1(\tau))$  справедливо равенство

$$\operatorname{Im}(\mu(\tau)) = 0. \quad (14)$$

При подстановке (11) в (14) получим

$$\operatorname{Im}(\mu(\tau)) = \wp^\gamma \sin \gamma \vartheta = 0, \text{ или } \sin(\pi \vartheta/(\pi - \beta)) = 0. \quad (15)$$

Условие (15) выполняется при равенстве аргумента под знаком синуса  $\pi k$  для  $k = 0, 1, 2, \dots$ , следовательно:

$$\vartheta = \pi - \beta. \quad (16)$$

Подставляя в равенство (16) определение угла  $\vartheta$  из (13) и угла  $\beta = \arctg((a - x_0)/|y_0|)$  (см. рис. 2), получим тождество

$$y_0 y (a - b) = (a - x_0)(x^2 + y^2 - x(a + b) + ab). \quad (17)$$

Принимая во внимание равенства:

$$a = x_0 + h; \quad b = x_0 - h; \quad h = \sqrt{\rho^2 - y_0^2}; \quad x - x_0 = \rho \cos T; \quad y - y_0 = \rho \sin T, \quad (18)$$

приведем (17) преобразованиями

$$\begin{aligned} y_0 y 2h &= h(x^2 + y^2 - 2xx_0 + x_0^2 - h^2); \\ 2y_0 y &= (x - x_0)^2 + y^2 - h^2; \end{aligned} \quad (19)$$

$$2y_0 y = \rho^2 \cos^2 T + y^2 - \rho^2 + y_0^2$$

$$(y - y_0)^2 = \rho^2 \sin^2 T, \quad (20)$$

которое соответствует соотношениям (18). Следовательно, исходное предположение и равенство (14) верны.

Поскольку при отображении  $\mu(\zeta)$  точка  $\zeta = \infty$  переходит в точку  $\mu(\infty) = 1$ , то для выполнения условий нормировки (10) при конформном отображении на верхнюю полуплоскость  $\varpi$  применим дополнительное преобразование

$$\varpi(\zeta) = k(1 + \mu(\zeta))(1 - \mu(\zeta))^{-1}$$

$$\text{или} \quad \varpi(\zeta) = k \frac{1 + (\zeta - a)^\gamma (\zeta - b)^{-\gamma}}{1 - (\zeta - a)^\gamma (\zeta - b)^{-\gamma}} = k \frac{(1 - b/\zeta)^\gamma + (1 - a/\zeta)^\gamma}{(1 - b/\zeta)^\gamma - (1 - a/\zeta)^\gamma}, \quad (21)$$

где  $k$  – некоторая комплексная константа.

Найдя производную функции  $\varpi(\zeta)$ :

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \zeta} = \frac{2k \left\{ \gamma [a(1 - \partial b / \partial \zeta) - b(1 - \partial a / \partial \zeta) - \zeta(\partial a / \partial \zeta - \partial b / \partial \zeta)] / \zeta^2 + \right.}{\left. + (1 - a/\zeta)(1 - b/\zeta) [\ln(1 - a/\zeta) - \ln(1 - b/\zeta)] \partial \gamma / \partial \zeta \right\}}{\left[ (1 - a/\zeta)^\gamma - (1 - b/\zeta)^\gamma \right]^2 (1 - a/\zeta)^{1-\gamma} (1 - b/\zeta)^{1-\gamma}}, \quad (22)$$

путем разложения в биномиальный ряд по степеням  $(1 - a/\zeta)^\gamma, (1 - b/\zeta)^\gamma$  знаменателя, получим для больших  $|\zeta|$  выражение

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \zeta} \approx \frac{2k(1 - a/\zeta)^{\gamma-1} (1 - b/\zeta)^{\gamma-1} \left\{ \gamma [a(1 - \partial b / \partial \zeta) - b(1 - \partial a / \partial \zeta) - \zeta(\partial a / \partial \zeta - \partial b / \partial \zeta)] + \right.}{\gamma^2 (a - b)^2} \left. + \zeta^2 (1 - a/\zeta)(1 - b/\zeta) [\ln(1 - a/\zeta) - \ln(1 - b/\zeta)] \partial \gamma / \partial \zeta \right\}}{\gamma^2 (a - b)^2}. \quad (23)$$

Применяя в (23) к  $\partial a / \partial \zeta$  и  $\partial b / \partial \zeta$  правило дифференцирования параметрически заданных функций и учитывая, что

$$\partial \varphi / \partial \zeta = -\text{Im}(\zeta) |\zeta|^{-2} = -r i \sin \varphi (\cos \varphi + i \sin \varphi) / r^2 = -\sin \varphi (\sin \varphi - i \cos \varphi) / r,$$

при  $\zeta \rightarrow \infty$  имеем

$$\varpi'(\infty) = 2k(\gamma(a-b))^{-1} \text{ или } k = 0,5\gamma(a-b). \quad (24)$$

Подставляя теперь константу  $k$  в (21), получим искомое отображение (10). ■

С учетом теоремы 1 определим зависимость переменных  $\gamma(\varphi), a(\varphi), b(\varphi)$  в выражении (10) от угла  $\varphi$  в полуплоскости с эллиптической луночкой, заданной эллипсом с полуосями  $a_0$  и  $b_0$ , центром в  $z_0 = x_0 + iy_0$  и углом  $\alpha$  наклона к действительной оси. При этом зависимость угла  $\beta = \arccos(|y_0|/\rho)$  для эллиптической луночки от  $\varphi$  определяется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} y_0 &= y - \rho \sin T; \quad \rho = (a_0^2 \sin^2 \alpha + b_0^2 \cos^2 \alpha)^{3/2} / a_0 b_0; \quad T = \pm 2 \arctg \left[ \left( \sqrt{k_n^2 + 1} \mp 1 \right) / k_n \right] \geq 0; \\ k_n &= - \frac{a_0^2 \cos^2 \phi + b_0^2 \sin^2 \phi}{\cos \phi \sin \phi (a_0^2 - b_0^2) - (u - x_0) a_0 b_0 (a_0^2 \cos^2 \phi + b_0^2 \sin^2 \phi - (u - x_0)^2)^{-1/2}}; \\ \tau &= u + iv = e^{i\phi} (a_0 \cos \alpha + b_0 \sin \alpha) + z_0; \quad \alpha = \begin{cases} \arccos(\alpha_1) & \text{if } |\varphi - \phi| < 0,5\pi; \\ \arccos(\alpha_2) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (25) \\ \alpha_{1,2} &= \left( a_0 (\sin \phi - \operatorname{tg} \phi \cos \phi) G \pm |b_0 (\cos \phi + \operatorname{tg} \phi \sin \phi)| \sqrt{D - G^2} \right) / D; \end{aligned}$$

$$G = (x_0 \operatorname{tg} \phi - y_0); \quad D = a_0^2 (\sin \phi - \operatorname{tg} \phi \cos \phi)^2 + b_0^2 (\cos \phi + \operatorname{tg} \phi \sin \phi)^2.$$

Параметры отображения (10)  $a(\varphi)$ ,  $b(\varphi)$  находятся по соответствующим тождествам (18) с использованием соотношений (25).

Построение обратного отображения с применением рассматриваемых модельных задач осуществляется с использованием леммы 1 для случая, когда все вершины исходной многоугольной области  $\Omega$  располагаются на границе окружности  $\Omega'$ . В случае же, когда вокруг исходной многоугольной области  $\Omega$  невозможно описать такой окружности, возникает ситуация, приводящая к необходимости отображения полуплоскости с выброшенным сегментом с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  (см., например рис. 1, граница между точками  $a_2, a_4$ ) на полуплоскость  $\operatorname{Im} \zeta > 0$ . В этом случае отображение выполняется с применением обобщенной функции Жуковского вида (10) для каждого гладкого участка границы  $\Gamma$  — отдельного эллипса или круга. При этом добавление в полуплоскость кругового или эллиптического сегмента согласно лемме 1 не означает, что все границы оставшихся луночек будут являться границами окружностей или эллипсов. В такой ситуации возможен случай формирования выброшенного сегмента, образованного пересечением верхней полуплоскости с гиперболической луночкой.

С учетом теоремы 1 определим решение третьей модельной задачи. Она заключается в нахождении отображения полуплоскости с гиперболической луночкой на полуплоскость обобщенной функцией Жуковского вида (10). Граница луночки задана ветвью гиперболы с полуосями  $a_0$  и  $b_0$ , центром в  $z_0 = x_0 + iy_0$  и углом наклона  $\alpha$  к действительной оси.

Зависимость угла  $\beta = \arccos(|y_0|/\rho)$  для гиперболической луночки от  $\varphi$  и параметров  $a(\varphi)$ ,  $b(\varphi)$  задается с помощью соотношений



$$y_0 = y - \rho \sin T; \quad \rho = \frac{(a_0^2 \operatorname{sh}^2 \alpha + b_0^2 \operatorname{ch}^2 \alpha)^{3/2}}{(a_0 b_0 |\operatorname{sh}^2 \alpha - \operatorname{ch}^2 \alpha|)}; \quad T = \pm 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sqrt{k_h^2 + 1} \mp 1}{k_h} \right] \geq 0;$$

$$k_h = - \frac{a_0^2 \cos^2 \phi - b_0^2 \sin^2 \phi}{\cos \phi \sin \phi (a_0^2 + b_0^2) - (u - x_0) a_0^2 b_0^2 (a_0^2 b_0^2 (u - x_0)^2 - a_0^2 \cos^2 \phi + b_0^2 \sin^2 \phi)^{-1/2}};$$

$$\tau = u + iv = e^{i\phi} (a_0 \operatorname{ch} \alpha + b_0 \operatorname{sh} \alpha) + z_0; \quad \alpha = \begin{cases} \operatorname{arcsch}(\alpha_1) & \text{if } |\phi + 0,5\pi| \geq \varphi; \\ \operatorname{arcsch}(\alpha_2) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (26)$$

$$\alpha_{1,2} = - \left( b_0 (\cos \phi + \operatorname{tg} \varphi \sin \phi) G \pm |a_0 (\operatorname{tg} \varphi \cos \phi - \sin \phi)| \sqrt{D + G^2} \right) / D;$$

$$G = (x_0 \operatorname{tg} \varphi - y_0); \quad D = a_0^2 (\operatorname{tg} \varphi \cos \phi - \sin \phi)^2 - b_0^2 (\cos \phi + \operatorname{tg} \varphi \sin \phi)^2.$$

Параметры кривых второго порядка, соответствующих при обратном отображении ребрам  $e_n = \{A_n, A_{n+1}\}$  исходной многоугольной области  $\Omega$ , могут быть получены по заданным пяти точкам  $h_j = r_j e^{i\varphi_j}$  ( $j = \overline{1,5}$ ) с учетом выражения (7). Примеры обратного отображения наперед заданных многоугольных областей представлены на рис. 3.

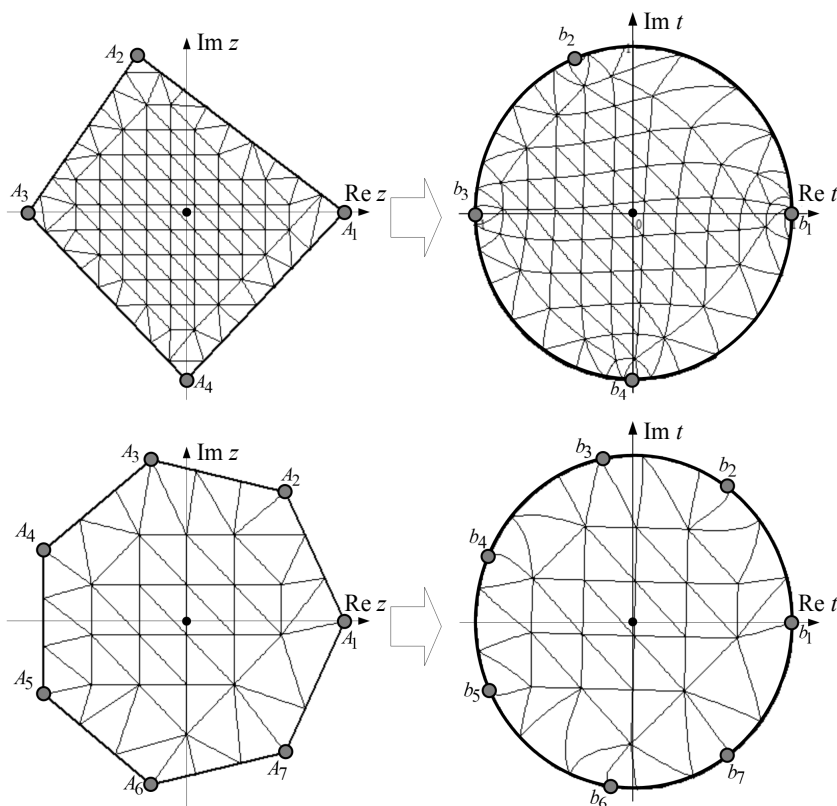


Рис. 3. Примеры обратного отображения наперед заданной четырехугольной и семиугольной областей на единичный круг

### Заключение

Таким образом, полученные результаты позволяют за конечное число конформных отображений, равных числу вершин  $N$  многоугольника, выполнить конформное отображение заданной односвязной многоугольной области на единичный круг. В случае, если сегмент, формирующий луночку в верхней полуплоскости, на границе содержит точки, для которых не существует  $a(\varphi), b(\varphi)$ , то добавление выброшенного сегмента в полуплоскость выполняется последовательностью конформных отображений, удовлетворяющих условиям теоремы 1. При алгоритмической реализации сформированного метода на этапах добавления  $n$ -го сегмента в верхнюю полуплоскость, соответствующего  $n$ -му ребру  $e_n = \{A_n, A_{n+1}\}$  исходного многоугольника, рекомендуется предварительно выполнять поворот многоугольной области в расширенной комплексной плоскости на угол  $\psi$  таким образом, чтобы точка, являющаяся серединой ребра  $e_n$ , располагалась на отрицательной части действительной оси. В целом, полученные результаты расширяют применимость обобщенной функции Жуковского, заданной в виде (10).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений. Справочное руководство. Киев: Наукова думка, 1964. 536 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. 4-е изд., испр. М.: Наука, 1973. 736 с.
3. Иванов В.И., Попов Ю.В. Конформные отображения и их приложения. М.: Едиториал УРСС, 2002. 374 с.
4. Driscoll T.A., Trefethen L.N. Schwarz – Christoffel mapping. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002. 132 p.
5. Канторович Л.В. Эффективные методы в теории конформных отображений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1937. Т. 1. Вып. 1. С. 79–90.
6. Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. Барицентрический метод в задачах анализа поля в регулярном волноводе с произвольным поперечным сечением // Антенны. 2015. № 1(212). С. 32–40.
7. Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 1) // Вестник СГТУ. 2015. № 1(78). С. 30–36.
8. Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 2) // Вестник СГТУ. 2015. № 1(78). С. 36–42.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. Изд. 9. М.: Наука, 1974. 672 с.
10. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. М.: ИФМЛ, 2002. 472 с.

Статья поступила 08.10.2015 г.

Radygin V.M., Polyanskii I.S. MODIFIED METHOD OF SUCCESSIVE CONFORMAL MAPPINGS OF POLYGONAL DOMAINS

DOI 10.17223/19988621/39/3

The method for solving the inverse Schwarz – Christoffel problem – conformal mapping of a given polygonal area on the canonical domain, the unit circle – is developed in the paper. The method is based on the use of a sequence of conformal mappings related to the mapping of the polygon onto the upper half with discarded segments by a Cayley linear fractional transformation

followed by sequential addition of the discarded segments to the upper half-plane. Model problems consider conformal mappings of circular, elliptical, and hyperbolic lunes to the upper half-plane. The solution of the presented model problems is based on the generalized Zhukovsky function; the obtained results expand the applicability of the Zhukovsky function as compared to existing methods of its application in the implementation of conformal mappings. The working ability of the solution was tested by specific examples in solving the problem of conformal mapping of quadrilateral and heptagonal domains to the unit circle. Recommendations for the algorithmic implementation of the method are presented.

Keywords: conformal mapping, polygonal domain, unit circle, inverse Schwarz–Christoffel problem.

*RADYGIN Vladimir Mikhailovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Academy of the Federal Security Service Russia, Orel, Russian Federation)

E-mail: van341@mail.ru

*POLANSKY Ivan Sergeyevich* (Candidate of Technical Sciences, Academy of the Federal Security Service Russia, Orel, Russian Federation)

E-mail: van341@mail.ru

#### REFERENCES

1. Fil'chakov P.F. *Priblizhennyye metody konformnykh otobrazheniy. Spravochnoe rukovodstvo*. Kiev, Naukova dumka Publ., 1964. 536 p. (in Russian)
2. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 736 p. (in Russian)
3. Ivanov V.I., Popov Yu.V. *Konformnye otobrazheniya i ikh prilozheniya*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2002. 374 p. (in Russian)
4. Driscoll T.A., Trefethen L.N. *Schwarz – Christoffel mapping*. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2002. 132 p.
5. Kantorovich L.V. Effektivnye metody v teorii konformnykh otobrazheniy. *Izv. AN SSSR. Ser. matem.*, 1937, vol. 1, no. 1, pp. 79–90. (in Russian)
6. Arkhipov N.S., Polyanskiy I.S., Stepanov D.E. Baritsentricheskii metod v zadachakh analiza polya v regul'yarnom volnovode s proizvol'nym poperechnym secheniem. *Antenny*, 2015, no. 1(212), pp. 32–40. (in Russian)
7. Polyanskiy I.S. Baritsentricheskie koordinaty Puassona dlya mnogomernoy approksimatsii skalyarnogo potentsiala vnutri proizvol'noy oblasti (Chast' 1). *Vestnik SGTU*, 2015, no. 1(78), pp. 30–36. (in Russian)
8. Polyanskiy I.S. Baritsentricheskie koordinaty Puassona dlya mnogomernoy approksimatsii skalyarnogo potentsiala vnutri proizvol'noy oblasti (Chast' 2). *Vestnik SGTU*, 2015, no. 1(78), pp. 36–42. (in Russian)
9. Smirnov V.I. *Kurs vysshey matematiki*, vol. 3, part. 2. Moscow, Nauka Publ., 1974. 672 p. (in Russian)
10. Golovanov N.N. *Geometricheskoe modelirovanie*. Moscow, IFML Publ., 2002. 472 p. (in Russian)