

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/34/3

М.А. Бахолдина

ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБКИ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ СОСТОЯНИЙ  
МОДУЛИРОВАННОГО ОБОБЩЕННОГО ПОЛУСИНХРОННОГО  
ПОТОКА СОБЫТИЙ

*Работа выполнена в рамках государственного заказа Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Национальном исследовательском Томском государственном университете на 2014–2016 гг.*

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетях связи, и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий (DSPPs). В статье приводятся аналитические результаты по нахождению условной и безусловной вероятности ошибочного решения при оптимальном оценивании состояний потока событий.

**Ключевые слова:** модулированный обобщенный полусинхронный поток событий; дважды стохастический поток событий (DSPP); MAP (Markovian Arrival Process)-поток событий; апостериорная вероятность состояния; оценка состояния; критерий максимума апостериорной вероятности; вероятность ошибки при оценивании состояний потока.

Условия функционирования реальных систем массового обслуживания таковы, что если в отношении параметров обслуживаемых устройств, как правило, можно утверждать, что они известны и с течением времени не меняются, то в отношении интенсивностей входящих потоков этого сказать во многих случаях нельзя. Более того, интенсивности входящих потоков заявок обычно меняются со временем, часто эти изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий (DSPPs). Данные потоки можно охарактеризовать двумя случайностями: первая случайность – это число событий на любом рассматриваемом интервале функционирования потока; вторая случайность – это случайный процесс  $\lambda(t)$ , называемый интенсивностью потока [1–8].

В настоящей работе рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся обобщением полусинхронного потока [9–12] и обобщенного полусинхронного потока событий [13–19] и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий с кусочно-постоянной интенсивностью. Достаточно обширная литература по исследованию подобных потоков событий (асинхронных, синхронных и полусинхронных) приведена в [13, 20–33], при этом в [22] показано, что данные потоки могут быть представлены в виде моделей MAP-потоков событий с определенными ограничениями на параметры последних. Настоящая статья является непосредственным развитием работ [34, 35], где решается задача оптимального оценивания состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий (задача фильтрации интенсивности потока) и в качестве решающего правила используется критерий максимума апостериорной вероятности, обеспечивающий минимум полной (безусловной) вероятности ошибки вынесения решения о состоянии потока [36]. В настоящей статье приводятся аналитические и численные результаты по нахождению условной и безусловной вероятности ошибочного решения при оптимальном оценивании состояний потока.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий (далее – поток или поток событий), интенсивность которого является кусочно-постоянным стационарным случайным процессом  $\lambda(t)$  с двумя состояниями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ ). Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока), если  $\lambda(t) = \lambda_1$ , и второе состояние процесса (потока), если  $\lambda(t) = \lambda_2$ . В течение временного интервала случайной длительности, когда процесс  $\lambda(t)$  находится в состоянии  $\lambda_i$  ( $\lambda(t) = \lambda_i$ ), имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Переход из первого состояния процесса  $\lambda(t)$  во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности  $\lambda_1$ , при этом переход осуществляется с вероятностью  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ); с вероятностью  $1 - p$  процесс  $\lambda(t)$  остается в первом состоянии (т.е. сначала наступает событие потока, затем происходит либо не происходит переход процесса  $\lambda(t)$  из первого состояния во второе). Переход из первого состояния процесса  $\lambda(t)$  во второе также возможен в произвольный момент времени, не совпадающий с моментом наступления события, при этом длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  в первом состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром  $\beta$ :  $F(\tau) = 1 - e^{-\beta\tau}$ ,  $\tau \geq 0$ . Тогда длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  в первом состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения  $F_1(\tau) = 1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta)\tau}$ ,  $\tau \geq 0$ .

Переход из второго состояния процесса  $\lambda(t)$  в первое в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности  $\lambda_2$  невозможен и может осуществляться только в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром  $\alpha$ :  $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$ ,  $\tau \geq 0$ . В момент окончания второго состояния процесса  $\lambda(t)$  при его переходе из второго состояния в первое инициируется с вероятностью  $\delta$  ( $0 \leq \delta \leq 1$ ) дополнительное событие. Отметим, что события пуассоновских потоков и дополнительные события неразличимы для наблюдателя. В сделанных предположениях  $\lambda(t)$  – скрытый марковский процесс. При этом матрицы инфинитезимальных характеристик принимают вид

$$D_0 = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \beta) & \beta \\ \alpha(1 - \delta) & -(\lambda_2 + \alpha) \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} (1 - p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \alpha\delta & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Элементами матрицы  $D_1$  являются интенсивности переходов процесса  $\lambda(t)$  из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы  $D_0$  – это интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы  $D_0$  – это интенсивности выхода процесса  $\lambda(t)$  из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если  $\beta = 0$ , то имеет место обобщенный полусинхронный поток событий [15].

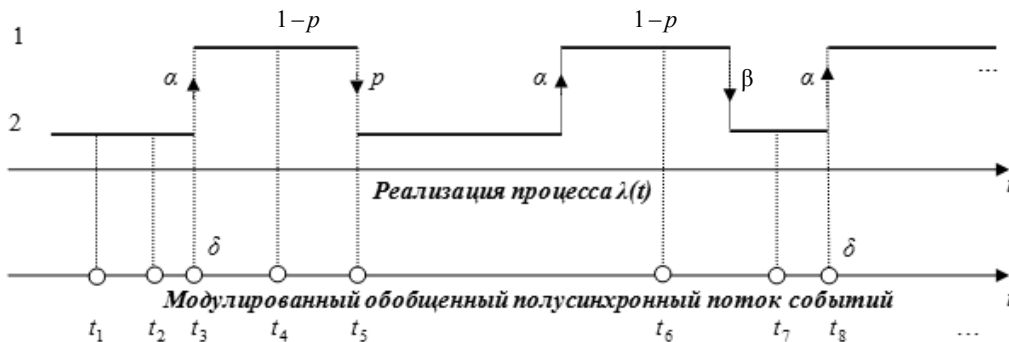


Рис. 1. Формирование модулированного обобщенного полусинхронного потока событий

Заметим, что в определении модулированного обобщенного полусинхронного потока событий в явном виде не оговаривается, в каком состоянии процесса  $\lambda(t)$  наступает дополнительное событие потока при переходе процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое. Данное обстоятельство при последующем получении аналитических результатов является несущественным, так как наступление дополнительного события и переход процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое происходят мгновенно. В реальных ситуациях возможны два варианта, связанные с наступлением события и переходом процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое: 1) первично наступление события во втором состоянии процесса  $\lambda(t)$ , затем его переход из второго состояния в первое; 2) первичен переход процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое, затем наступление события в первом состоянии. Здесь принимается, что сначала происходит переход процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое, затем дополнительное событие с вероятностью  $\delta$  инициируется в первом состоянии.

Пример реализации модулированного обобщенного полусинхронного потока событий приведен на рис. 1, где 1, 2 – состояния процесса  $\lambda(t)$ ;  $t_1, t_2, \dots$  – моменты наступления событий потока; дополнительные события помечены буквами  $\delta$ .

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на полуинтервале наблюдения  $(t_0, t]$ , где  $t_0$  – начало наблюдений,  $t$  – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить  $t_0 = 0$ . Поскольку процесс  $\lambda(t)$  является принципиально ненаблюдаемым, то говорить о состоянии потока можно только в вероятностном смысле. Вся доступная информация о потоке – это моменты наступления событий  $t_1, t_2, \dots, t_k$  с начала наблюдения  $t_0$  до момента  $t$ .

Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, который обеспечивает минимум полной вероятности ошибки вынесения решения [36]. Таким образом, для вынесения решения о состоянии ненаблюдаемого процесса  $\lambda(t)$  в момент времени  $t$  необходимо определить апостериорные вероятности  $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = P\{\lambda(t) = \lambda_i | t_1, \dots, t_m, t\}$ ,  $i = 1, 2$ , того, что в момент времени  $t$  значение процесса  $\lambda(t)$  есть  $\lambda(t) = \lambda_i$  ( $m$  – количество наблюдаемых событий за время  $t$ ). При этом  $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$ . Решение о состоянии процесса  $\lambda(t)$  выносится путем сравнения апостериорных вероятностей: если  $w(\lambda_j | t) \geq w(\lambda_i | t)$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ , то оценка состояния процесса  $\lambda(t)$  есть  $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$ .

## 2. Условная вероятность ошибочного решения о состоянии потока событий в общем случае

Перейдем к выводу формул для вероятностей ошибок при вынесении решения о состоянии процесса  $\lambda(t)$ . Пусть полуинтервал наблюдения за потоком событий есть  $(t_0, t]$ . Момент времени  $t$  зафиксирован, т.е.  $t - t_0$  есть длина полуинтервала наблюдения. В силу того что моменты наступления событий  $t_1, t_2, \dots, t_k$  ( $t_1 < t_2 < \dots < t_k < t$ ), попавшие в полуинтервал  $(t_0, t]$ , случайны, то случайна и разность  $t - t_k$ . Момент вынесения решения  $t$  лежит между моментами времени  $t_k$  и  $t_{k+1}$  ( $t_k < t < t_{k+1}$ ), причем момент времени  $t_{k+1}$  может быть сколь угодно большим (разность  $t_{k+1} - t$  также случайна).

Итак, вынесение решения о состоянии процесса  $\lambda(t)$  привязано к интервалу между двумя соседними временными моментами наступления событий:  $(t_k, t_{k+1})$ . Сам момент вынесения решения  $t$  можно трактовать как некоторую точку, случайным образом падающую на ось времени  $Ot$ , никак не связанную с потоком событий. Вследствие этого точка  $t$  может попасть в любой интервал между соседними событиями модулированного обобщенного полусинхронного потока событий. При этом начало наблюдений, т.е. точка  $t_0 = 0$ , однозначно определяется на оси времени  $Ot$ .

Рассмотрим апостериорную вероятность  $w(\lambda_1 | t)$ ,  $t_k \leq t < t_{k+1}$ , полученную в [34, 35]. Обозначим через  $\tau_k = t - t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Следующее событие потока наступает в момент времени  $t_{k+1}$  ( $t_{k+1} > t_k$ ). Тогда  $\tau_k$  ограничено снизу нулем, сверху  $\tau_k$  может быть в принципе неограниченным, т.е.  $\tau_k \geq 0$ . С уче-

том введенного обозначения  $w(\lambda_1 | t) = w(\lambda_1 | t_k + \tau_k)$ ,  $\tau_k \geq 0$ . В момент  $t = t_k$  имеем  $w(\lambda_1 | t = t_k) = w(\lambda_1 | t_k + 0)$ . Так как  $\tau_k$  привязано к моменту времени  $t_k$  наступления  $k$ -го события, то для простоты обозначим  $w(\lambda_1 | t_k + \tau_k) = w(\lambda_1 | \tau_k)$ ,  $\tau_k \geq 0$ .

Остановимся более подробно на алгоритме принятия решения. Процесс  $\lambda(\tau_k)$ ,  $\tau_k \geq 0$ , является ненаблюдаемым. В момент  $t_k$  наступления события значение процесса  $\lambda(\tau_k = 0)$  может быть равным либо  $\lambda_1$ , либо  $\lambda_2$ . Вследствие этого в момент  $\tau_k$  вынесения решения процесс  $\lambda(\tau_k)$  может также принимать любое значение: либо  $\lambda_1$  ( $\lambda(\tau_k) = \lambda_1$ ), либо  $\lambda_2$  ( $\lambda(\tau_k) = \lambda_2$ ). Тогда оценка  $\hat{\lambda}(\tau_k)$  значения процесса  $\lambda(\tau_k)$  в момент времени  $\tau_k$ , получаемая по критерию максимума апостериорной вероятности, может принимать либо значение  $\lambda_1$  ( $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_1$ ), либо значение  $\lambda_2$  ( $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_2$ ). При этом возможны следующие варианты: 1) если в момент времени  $\tau_k$  значение процесса  $\lambda(\tau_k) = \lambda_1$ , то правильное решение ( $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_1$ ) будет приниматься, если  $w(\lambda_1 | \tau_k) \geq w(\lambda_2 | \tau_k)$ ; если же  $w(\lambda_1 | \tau_k) < w(\lambda_2 | \tau_k)$ , то будет приниматься ошибочное решение (совершаться ошибка):  $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_2$ ; 2) если в момент времени  $\tau_k$  значение процесса  $\lambda(\tau_k) = \lambda_2$ , то правильное решение ( $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_2$ ) будет приниматься, если  $w(\lambda_1 | \tau_k) < w(\lambda_2 | \tau_k)$ ; если же  $w(\lambda_1 | \tau_k) \geq w(\lambda_2 | \tau_k)$ , то будет приниматься ошибочное решение (совершаться ошибка):  $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_1$ .

Обозначим далее  $w(\lambda(\tau_k), \tau_k)$  – распределение вероятностей значений двумерной смешанной случайной величины  $(\lambda(\tau_k), \tau_k)$ , здесь  $\lambda(\tau_k)$  – значение дискретной случайной величины ( $\lambda(\tau_k) = \lambda_1$  либо  $\lambda(\tau_k) = \lambda_2$ );  $\tau_k$  – значение непрерывной случайной величины ( $\tau_k \geq 0$ ). Тогда уравнение  $w(\lambda(\tau_k) = \lambda_1, \tau_k) = w(\lambda(\tau_k) = \lambda_2, \tau_k)$  определяет границу  $\tau_k^0$  критической области, в которой отклоняется гипотеза  $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_2$  и принимается гипотеза  $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_1$  (либо наоборот, отклоняется гипотеза  $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_1$  и принимается гипотеза  $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_2$ ). Сам корень данного уравнения (если он существует и единствен) может быть меньше нуля ( $\tau_k^0 < 0$ ), равен нулю ( $\tau_k^0 = 0$ ) и может быть больше нуля ( $\tau_k^0 > 0$ ). Кроме того, в принципе возможны ситуации, когда данное уравнение определяет некоторое множество корней либо корней не имеет (корни не существуют).

Расписывая в данном уравнении  $w(\lambda(\tau_k) = \lambda_j, \tau_k)$ ,  $j = 1, 2$ , через безусловную плотность  $w(\tau_k)$  и апостериорную вероятность  $w(\lambda(\tau_k) = \lambda_j | \tau_k) = w(\lambda_j | \tau_k)$ , приходим к следующему виду уравнения для границы критической области  $\tau_k^0$ :

$$w(\lambda_1 | \tau_k) = w(\lambda_2 | \tau_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Тогда если  $w(\lambda_1 | \tau_k) \geq w(\lambda_2 | \tau_k)$ , то апостериорную вероятность  $w(\lambda_1 | \tau_k)$  можно интерпретировать как условную вероятность вынесения правильного решения:  $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_1$  при условии, что вынесение решения произведено в момент времени  $\tau_k$  ( $\tau_k \geq 0$ ); апостериорную же вероятность  $w(\lambda_2 | \tau_k) = 1 - w(\lambda_1 | \tau_k)$  – как условную вероятность вынесения ошибочного решения (условную вероятность ошибки): решение выносится в пользу  $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_1$ , хотя на самом деле имеет место  $\lambda(\tau_k) = \lambda_2$ . Аналогичная трактовка имеет место для случая  $w(\lambda_1 | \tau_k) < w(\lambda_2 | \tau_k)$ .

Во введенных обозначениях согласно формуле, полученной для расчета апостериорной вероятности в [34, 35], поведение вероятности  $w(\lambda_1 | \tau_k)$  на полуинтервале  $[t_k, t_{k+1})$  между соседними событиями потока определяется выражением

$$w(\lambda_1 | \tau_k) = \frac{w_1 [w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] - w_2 [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] e^{-b\tau_k}}{w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0) - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] e^{-b\tau_k}}, \quad \tau_k = t - t_k \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где  $w_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha + \beta - 2\alpha\delta - b}{2(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)}$ ,  $w_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha + \beta - 2\alpha\delta + b}{2(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)}$ ,  $b = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta(1 - \delta)}$ .

В момент времени  $\tau_k = t - t_k = 0$  (т.е. тогда, когда момент вынесения решения  $t$  совпадает с моментом  $t_k$  наступления события) апостериорная вероятность (2) претерпевает разрыв 1-го рода ( $k = 1, 2, \dots$ ), поэтому в момент времени  $\tau_k = 0$  согласно формуле пересчета, полученной в [34, 35], имеет место

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{\alpha\delta + [\lambda_1(1-p) - \alpha\delta]w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + \alpha\delta + (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)w(\lambda_1 | t_k - 0)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где  $w(\lambda_1 | t_k - 0)$  вычисляется по формуле (2), в которой, во-первых, вместо  $\tau_k$  нужно подставить  $\tau_{k-1}$  и, во-вторых, вычисления производить для  $\tau_{k-1} = t_k - t_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Последнее реализует вычисление предела слева апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | \tau_{k-1})$  в момент времени  $t_k$  (в момент наступления события). В качестве начального значения  $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0)$  в (2) выбирается априорная финальная вероятность первого состояния процесса  $\lambda(t)$ :  $\pi_1 = \alpha / (p\lambda_1 + \beta + \alpha)$ .

Изучим поведение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | \tau_k)$  как функции  $\tau_k$  ( $\tau_k \geq 0$ ). Производная функции (2) по  $\tau_k$  принимает вид

$$\frac{dw(\lambda_1 | \tau_k)}{d\tau_k} = \frac{a(w_2 - w_1)^2 [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] [w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] e^{-a(w_2 - w_1)\tau_k}}{[w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0) - [w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)] e^{-a(w_2 - w_1)\tau_k}]^2}, \quad \tau_k \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где  $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta$ ; апостериорная вероятность  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  определена в (3),  $k = 1, 2, \dots$ ;  $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1 = \alpha / (p\lambda_1 + \beta + \alpha)$ .

Рассмотрим поведение производной (4) в зависимости от  $\tau_k$  ( $\tau_k \geq 0$ ). Из (2) вытекает, что  $\lim_{\tau_k \rightarrow \infty} w(\lambda_1 | \tau_k) = w_1$ . При этом знак производной (4) определяется знаком выражения  $a[w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)][w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0)]$ , где  $a$  определена в (4).

Можно показать, что знак производной (4) для любого  $a$  ( $a > 0$  либо  $a < 0$ ) определяется знаком разности  $w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)$ , тогда: 1) если  $0 \leq w(\lambda_1 | t_k + 0) < w_1$ , то  $dw(\lambda_1 | \tau_k) / d\tau_k > 0$  и  $w(\lambda_1 | \tau_k)$  является возрастающей функцией переменной  $\tau_k$ , стремящейся к  $w_1$  снизу при  $\tau_k \rightarrow \infty$ ; 2) если  $w_1 < w(\lambda_1 | t_k + 0) \leq 1$ , то  $dw(\lambda_1 | \tau_k) / d\tau_k < 0$  и  $w(\lambda_1 | \tau_k)$  является убывающей функцией переменной  $\tau_k$ , стремящейся к  $w_1$  сверху при  $\tau_k \rightarrow \infty$ ; 3) если  $w(\lambda_1 | t_k + 0) = w_1$ , то  $w(\lambda_1 | \tau_k) = w_1$  для  $\tau_k \geq 0$ . Тогда уравнение (1) имеет либо единственный корень  $\tau_k^0$  ( $\tau_k^0 < 0$  или  $\tau_k^0 \geq 0$ ), либо корень  $\tau_k^0$  не существует, так как апостериорная вероятность  $w(\lambda_1 | \tau_k)$  есть монотонная функция переменной  $\tau_k$ . Подставляя (2) в (1) и решая полученное уравнение относительно  $\tau_k$ , находим

$$\tau_k^0 = \frac{1}{a(w_2 - w_1)} \ln \frac{(w_2 - 1/2)[w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)]}{(w_1 - 1/2)[w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0)]}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Выражение (5) определяет границу критической области  $\tau_k^0$  и в зависимости от соотношения величин  $w_1$  и  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  для любого  $a$  ( $a > 0$  либо  $a < 0$ ) возможны различные варианты положения  $\tau_k^0$  на временной оси:

1) если  $1/2 \leq w_1 \leq w(\lambda_1 | t_k + 0) \leq 1$ , то корень  $\tau_k^0$  не существует, при этом условная вероятность ошибки определяется в виде  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k) = 1 - w(\lambda_1 | \tau_k)$ ,  $\tau_k \geq 0$ ;

2) если  $1/2 < w(\lambda_1 | t_k + 0) < w_1 < 1$ , то корень  $\tau_k^0$  существует и  $\tau_k^0 < 0$ , при этом условная вероятность ошибки определяется в виде  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k) = 1 - w(\lambda_1 | \tau_k)$ ,  $\tau_k \geq 0$ ;

3) если  $0 \leq w(\lambda_1 | t_k + 0) \leq 1/2 < w_1 < 1$ , то корень  $\tau_k^0$  существует и  $\tau_k^0 \geq 0$ , при этом условная вероятность ошибки определяется в виде

$$P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k) = \begin{cases} w(\lambda_1 | \tau_k), & 0 \leq \tau_k < \tau_k^0, \\ 1 - w(\lambda_1 | \tau_k), & \tau_k \geq \tau_k^0; \end{cases}$$

4) если  $w_1 = 1/2$ ,  $w(\lambda_1 | t_k + 0) < w_1$ , то корень  $\tau_k^0$  не существует, при этом условная вероятность ошибки определяется в виде  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k) = w(\lambda_1 | \tau_k)$ ,  $\tau_k \geq 0$ ;

5) если  $0 \leq w(\lambda_1 | t_k + 0) \leq w_1 \leq 1/2$ , то корень  $\tau_k^0$  не существует, при этом условная вероятность ошибки определяется в виде  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k) = w(\lambda_1 | \tau_k)$ ,  $\tau_k \geq 0$ ;

6) если  $0 \leq w_1 < w(\lambda_1 | t_k + 0) < 1/2$ , то корень  $\tau_k^0$  существует и  $\tau_k^0 < 0$ , при этом условная вероятность ошибки определяется в виде  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k) = w(\lambda_1 | \tau_k)$ ,  $\tau_k \geq 0$ ;

7) если  $0 \leq w_1 < 1/2 \leq w(\lambda_1 | t_k + 0) \leq 1$ , то корень  $\tau_k^0$  существует и  $\tau_k^0 \geq 0$ , при этом условная вероятность ошибки определяется в виде

$$P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k) = \begin{cases} 1 - w(\lambda_1 | \tau_k), & 0 \leq \tau_k < \tau_k^0, \\ w(\lambda_1 | \tau_k), & \tau_k \geq \tau_k^0; \end{cases}$$

8) если  $w_1 = 1/2$ ,  $w_1 \leq w(\lambda_1 | t_k + 0)$ , то корень  $\tau_k^0$  не существует, при этом условная вероятность ошибки определяется в виде  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k) = 1 - w(\lambda_1 | \tau_k)$ ,  $\tau_k \geq 0$ .

Полученные формулы позволяют сформулировать алгоритм расчета условной вероятности вынесения ошибочного решения  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$  в любой момент времени  $\tau_k \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, 1$ ) в момент времени  $t_0 = 0$  задается  $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1$ ; 2) по формуле (5) для  $k = 0$  рассчитывается  $\tau_k^0$ , тем самым устанавливается положение границы критической области на временной оси; 3) находится один из восьми возможных вариантов соотношения величин  $w_1$  и  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ ; 4) для найденного варианта рассчитывается (с использованием формулы (2)) вероятность  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$  в любой момент времени  $0 \leq \tau_k < t_{k+1} - t_k$ ; 5) рассчитывается вероятность  $w(\lambda_1 | \tau_k)$  в момент времени  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ , т.е.  $w(\lambda_1 | t_{k+1} - 0)$ , по формуле (2); затем производится пересчет апостериорной вероятности в момент времени  $t_{k+1}$ , т.е. находится  $w(\lambda_1 | t_{k+1} + 0)$  по формуле пересчета (3); 6)  $k$  увеличивается на 1, алгоритм переходит на шаг 2 и т.д.

**Замечание.** В силу формулы пересчета (3) значение  $w(\lambda_1 | t_{k+1} + 0)$  зависит от всех моментов  $t_1, t_2, \dots, t_k$  наступления событий в потоке, т.е. вся предыдущая информация «сосредоточена» в вероятности  $w(\lambda_1 | t_{k+1} + 0)$ . Вследствие этого для определения безусловной вероятности ошибки необходимо усреднить условную вероятность ошибки  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$  по моментам наступления событий  $t_1, t_2, \dots, t_k$ . Однако найти функцию распределения вероятностей моментов  $t_1, t_2, \dots, t_k$  наступления событий в модулированном обобщенном полусинхронном потоке в явном виде представляется затруднительным или вообще невозможным. Определить безусловную вероятность ошибки возможно только для некоторых случаев соотношения параметров потока.

### 3. Условная и безусловная вероятность ошибочного решения о состоянии потока для частных и особых случаев

Представляет интерес рассмотреть частные и особые случаи соотношения параметров потока, для которых возможно вычисление безусловной вероятности ошибки.

#### 3.1. Частный случай: $p = 1$ , $\delta = 0$

В данном случае  $w_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha + \beta - b}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}$ ,  $w_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha + \beta + b}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}$ ,  $b = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta}$ , при этом формула пересчета (3) принимает вид

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Отметим тот факт, что равенство (6) означает, что значение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | t_k + \tau_k)$  (или  $w(\lambda_1 | t)$ ) после любого момента  $t_k$  не зависит от моментов наступлений событий до  $t_k$ , т.е. от  $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$ . Вследствие этого в обозначении апостериорной вероятности индекс  $k$  можно опустить:  $w(\lambda_1 | t) = w(\lambda_1 | t_k + \tau_k) = w(\lambda_1 | \tau_k) = w(\lambda_1 | \tau)$ ,  $\tau \geq 0$ . Значение условной вероятности ошибки  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$  также не зависит от предыстории, вследствие этого  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k) = P_0(\tau)$ .

Стоит отметить, что для рассматриваемого частного случая модулированный обобщенный полусинхронный поток событий является рекуррентным потоком. Действительно, можно показать, что при значении параметров  $p = 1$ ,  $\delta = 0$  совместная плотность вероятностей длительностей двух смежных интервалов  $p(\tau_1, \tau_2)$  факторизуется:  $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$ . Общий вид плотности вероятности и совместной плотности вероятности получен в статье [37]:

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \quad (7)$$

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2) + \gamma(1 - \gamma) \frac{\lambda_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]}{z_1 z_2} [z_1 e^{-z_1 \tau_1} - z_2 e^{-z_2 \tau_1}] [z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}], \quad \tau_1 \geq 0, \quad \tau_2 \geq 0, \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} [z_2 - \lambda_1 \pi_1(0) - (\lambda_2 + \alpha\delta) \pi_2(0)], \quad \pi_1(0) = \alpha \frac{\lambda_1(1 - p + p\delta) + \delta\beta}{\lambda_1 \alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha\delta)}, \quad \pi_2(0) = \frac{p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha) + \lambda_2 \beta}{\lambda_1 \alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha\delta)},$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} [\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha + \beta \mp b], \quad b = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta(1 - \delta)}, \quad z_1 z_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \alpha\delta\beta.$$

В выражении для совместной плотности (8)  $p(\tau_k)$  определены в (7) для  $\tau = \tau_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Согласно постановке задачи рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий. Это означает, что для частного случая рассматриваемый поток событий является потоком Пальма, или рекуррентным потоком, и интервалы между соседними по времени событиями потока представляют собой независимые случайные величины  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots$ , распределенные одинаково с плотностью  $p(\tau)$ , определенной в (7).

Формула (2) в данном случае принимает вид

$$w(\lambda_1 | \tau_k) = w_1 w_2 (1 - e^{-b\tau_k}) / (w_2 - w_1 e^{-b\tau_k}), \quad \tau_k = t - t_k \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Так как  $w(\lambda_1 | \tau_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , не зависит от предыстории, то для любых  $k = 1, 2, \dots$

$$w(\lambda_1 | \tau) = w_1 w_2 (1 - e^{-b\tau}) / (w_2 - w_1 e^{-b\tau}), \quad \tau \geq 0. \quad (9)$$

Для начального интервала изменения  $\tau$  ( $t_0 \leq \tau < t_1$ ) справедлива формула (2), в которой  $k = 0$  и  $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1 = \alpha / (p\lambda_1 + \beta + \alpha)$ .

Подставляя (9) в уравнение (1) и решая полученное уравнение относительно  $\tau$ , находим границу критической области

$$\tau^0 = \frac{1}{a(w_2 - w_1)} \ln \frac{w_1(w_2 - 1/2)}{w_2(w_1 - 1/2)} \quad (10)$$

для любого полуинтервала  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Для начального полуинтервала  $[t_0, t_1)$  граница критической области  $\tau_0^0$  определяется выражением (5), где  $k = 0$  и  $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1 = \alpha / (p\lambda_1 + \beta + \alpha)$ .

Из (10) следует, что вне зависимости от знака  $a$  ( $a > 0$  либо  $a < 0$ ) для любого полуинтервала  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , справедливо: 1) если  $0 \leq w_1 \leq 1/2$ , то корень  $\tau^0$  не существует, при этом условная вероятность ошибки определяется в виде  $P_0(\tau) = w(\lambda_1 | \tau)$ ,  $\tau \geq 0$ ; 2) если  $1/2 < w_1 < 1$ , то корень  $\tau^0$  существует и  $\tau^0 > 0$ , при этом условная вероятность ошибки определяется в виде

$$P_0(\tau) = \begin{cases} w(\lambda_1 | \tau), & 0 \leq \tau < \tau^0, \\ 1 - w(\lambda_1 | \tau), & \tau \geq \tau^0. \end{cases}$$

Для полуинтервала  $[t_0, t_1)$  условная вероятность ошибки  $P_0(\pi_1, \tau_0)$  в зависимости от значений величин  $\pi_1$ ,  $w_1$  определится одной из формул, соответствующих вариантам 1–8 раздела 2.

В силу того что момент вынесения решения  $t$  есть некоторая точка, случайным образом падающая на ось времени  $Ot$ , плотность вероятности  $w(\tau)$  длительности интервала  $(t_k, t_{k+1})$ , в который попала точка  $t$ , для рекуррентных потоков определяется в виде [38]:

$$w(\tau) = \frac{\tau p(\tau)}{M\tau}, \quad M\tau = \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau, \quad (11)$$

где  $p(\tau)$  – плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями рекуррентного потока. Тогда безусловная вероятность ошибки  $P_0$  вычисляется по формуле

$$P_0 = \int_0^{\infty} w(\tau) P_0(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Для рассматриваемого частного случая  $p(\tau)$  определяется в виде (7), где

$$\gamma = \frac{z_2 - \lambda_2}{z_2 - z_1}; \quad \pi_1(0) = 0, \quad \pi_2(0) = 1; \quad z_{1,2} = \frac{1}{2}[\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha + \beta \mp b], \quad b = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta}, \quad 0 < z_1 < z_2.$$

Подставляя (7) в (11), получаем

$$M\tau = \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau = [(1 - \gamma)z_1 + \gamma z_2] / z_1 z_2;$$

$$w(\tau) = \tau (A_1 e^{-z_1 \tau} + A_2 e^{-z_2 \tau}), \quad \tau \geq 0, \quad \text{где } A_1 = \gamma z_1 / M\tau \text{ и } A_2 = (1 - \gamma)z_2 / M\tau. \quad (13)$$

Используя формулу (12), найдем явный вид безусловной вероятности ошибки  $P_0$  в зависимости от значения величины  $w_1$  для любого полуинтервала  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :

1) если  $0 \leq w_1 \leq 1/2$ , то корень  $\tau^0$  не существует, при этом безусловная вероятность ошибки определяется в виде

$$P_0^{(1)} = \int_0^{\infty} w(\tau) P_0(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} w(\tau) w(\lambda_1 | \tau) d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau, \quad (14)$$

$$f(\tau) = w(\tau) w(\lambda_1 | \tau) = \frac{w_1 w_2 \tau (1 - e^{-b\tau})}{w_2 - w_1 e^{-b\tau}} [A_1 e^{-z_1 \tau} + A_2 e^{-z_2 \tau}], \quad \text{где } A_1, A_2 \text{ определены в (13)}. \quad (15)$$

2) если  $1/2 < w_1 < 1$ , то корень  $\tau^0$  существует и  $\tau^0 > 0$ , при этом безусловная вероятность ошибки определяется в виде

$$P_0^{(2)} = \int_0^{\infty} w(\tau) P_0(\tau) d\tau = \int_0^{\tau^0} w(\tau) w(\lambda_1 | \tau) d\tau + \int_{\tau^0}^{\infty} w(\tau) (1 - w(\lambda_1 | \tau)) d\tau = \int_{\tau^0}^{\infty} w(\tau) d\tau + \int_0^{\tau^0} f(\tau) d\tau - \int_{\tau^0}^{\infty} f(\tau) d\tau, \quad (16)$$

где  $f(\tau)$  определена в (15),

$$\int_{\tau^0}^{\infty} w(\tau) d\tau = A_1 \frac{e^{-z_1 \tau^0}}{z_1} \left( \tau^0 + \frac{1}{z_1} \right) + A_2 \frac{e^{-z_2 \tau^0}}{z_2} \left( \tau^0 + \frac{1}{z_2} \right). \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), окончательно получаем

$$P_0^{(2)} = A_1 \frac{e^{-z_1 \tau^0}}{z_1} \left( \tau^0 + \frac{1}{z_1} \right) + A_2 \frac{e^{-z_2 \tau^0}}{z_2} \left( \tau^0 + \frac{1}{z_2} \right) + \int_0^{\tau^0} f(\tau) d\tau - \int_{\tau^0}^{\infty} f(\tau) d\tau, \quad (18)$$

где  $f(\tau)$  определена в (15);  $A_1, A_2$  определены в (13).

Интегралы, входящие в (14), (18), могут быть вычислены только численно.

Для начального полуинтервала  $[t_0, t_1)$  безусловная вероятность ошибки  $P_0$  находится аналогично нахождению безусловных вероятностей ошибок  $P_0^{(1)}$  и  $P_0^{(2)}$  в зависимости от значений величин  $\pi_1$ ,  $w_1$ , соответствующих вариантам 1–8 раздела 2.



### 3.2. Особый случай: $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$

В данном случае поведение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | \tau_k)$  на полуинтервале  $[t_k, t_{k+1})$  между соседними событиями потока определяется выражением

$$w(\lambda_1 | \tau_k) = \frac{\alpha(1-\delta)}{\beta + \alpha(1-\delta)} + \left[ w(\lambda_1 | t_k + 0) - \frac{\alpha(1-\delta)}{\beta + \alpha(1-\delta)} \right] e^{-(\beta + \alpha(1-\delta))\tau_k}, \quad \tau_k = t - t_k \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (19)$$

При этом формула пересчета (3) принимает вид

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{\alpha\delta + [\lambda_1(1-p) - \alpha\delta]w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + \alpha\delta}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставляя (19) в уравнение (1) и решая полученное уравнение относительно  $\tau_k$ , находим границу критической области

$$\tau_k^0 = \frac{1}{\beta + \alpha(1-\delta)} \ln \frac{2[(\beta + \alpha(1-\delta))w(\lambda_1 | t_k + 0) - \alpha(1-\delta)]}{\beta - \alpha(1-\delta)} \quad (20)$$

для любого полуинтервала  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Для начального полуинтервала  $[t_0, t_1)$  граница критической области  $\tau_0^0$  определяется выражением (20), где  $k = 0$  и  $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1 = \alpha / (p\lambda_1 + \beta + \alpha)$ .

Если к ограничению  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$  добавить дополнительное ограничение  $\lambda_1(1-p) - \alpha\delta = 0$ , то формула пересчета (3) выпишется в виде

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \alpha\delta / (\lambda_2 + \alpha\delta), \quad k = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Равенство (21) означает, что значение апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | \tau_k)$  после любого момента  $t_k$  не зависит от моментов наступления событий  $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$ . Далее, подставляя (21) в (20), находим границу критической области

$$\tau_k^0 = \frac{1}{\beta + \alpha(1-\delta)} \ln \frac{2\alpha[\delta\beta - \lambda_2(1-\delta)]}{\lambda_1(\beta - \alpha(1-\delta))} \quad (22)$$

для любого полуинтервала  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Для начального полуинтервала  $[t_0, t_1)$  граница критической области  $\tau_0^0$  определяется в виде (20), где  $k = 0$  и  $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1 = \alpha / (p\lambda_1 + \beta + \alpha)$ :

$$\tau_0^0 = \frac{1}{\beta + \alpha(1-\delta)} \ln \frac{2\alpha[\delta\beta - p\lambda_1(1-\delta)]}{(p\lambda_1 + \beta + \alpha)(\beta - \alpha(1-\delta))}. \quad (23)$$

Подчеркнем, что для рассматриваемого особого случая модулированный обобщенный полусинхронный поток событий является рекуррентным потоком. Действительно, можно показать [37], что при реализации условия  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$  совместная плотность вероятностей длительностей двух смежных интервалов  $p(\tau_1, \tau_2)$  факторизуется:  $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$ .

Обозначим через  $L$  выражение под знаком логарифма в (22), (23). Тогда для случая соотношения параметров  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$ ,  $\lambda_1(1-p) - \alpha\delta = 0$  имеем

1) для начального полуинтервала  $[t_0, t_1)$

$$L = \frac{2\alpha[\delta\beta - p\lambda_1(1-\delta)]}{(p\lambda_1 + \beta + \alpha)(\beta - \alpha(1-\delta))}, \quad w(\lambda_1 | t_k + 0) = w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1 = \alpha / (p\lambda_1 + \beta + \alpha);$$

2) для любого полуинтервала  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$L = \frac{2\alpha[\delta\beta - \lambda_2(1-\delta)]}{\lambda_1(\beta - \alpha(1-\delta))}, \quad w(\lambda_1 | t_k + 0) = \alpha\delta / (\lambda_2 + \alpha\delta).$$

Тогда в зависимости от значений величин  $L$ ,  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  условная вероятность ошибки  $P_0(\tau)$  для любого полуинтервала  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , определяется в виде

1)  $0 \leq w(\lambda_1 | t_k + 0) < 1/2$ :

1.1) если  $L \leq 0$ , то корень  $\tau^0$  не существует, при этом условная вероятность ошибки определяется в виде  $P_0(\tau) = w(\lambda_1 | \tau)$ ,  $\tau \geq 0$ ;

1.2) если  $0 < L < 1$ , то корень  $\tau^0$  существует и  $\tau^0 < 0$ , при этом условная вероятность ошибки определяется в виде  $P_0(\tau) = w(\lambda_1 | \tau)$ ,  $\tau \geq 0$ ;

1.3) если  $L \geq 1$ , то корень  $\tau^0$  существует и  $\tau^0 > 0$ , при этом условная вероятность ошибки определяется в виде

$$P_0(\tau) = \begin{cases} w(\lambda_1 | \tau), & 0 \leq \tau < \tau^0, \\ 1 - w(\lambda_1 | \tau), & \tau \geq \tau^0; \end{cases}$$

2)  $1/2 \leq w(\lambda_1 | t_k + 0) \leq 1$ :

2.1) если  $L \leq 0$ , то корень  $\tau^0$  не существует, при этом условная вероятность ошибки определяется в виде  $P_0(\tau) = 1 - w(\lambda_1 | \tau)$ ,  $\tau \geq 0$ ;

2.2) если  $0 < L < 1$ , то корень  $\tau^0$  существует и  $\tau^0 < 0$ , при этом условная вероятность ошибки определяется в виде  $P_0(\tau) = 1 - w(\lambda_1 | \tau)$ ,  $\tau \geq 0$ ;

2.3) если  $L \geq 1$ , то корень  $\tau^0$  существует и  $\tau^0 > 0$ , при этом условная вероятность ошибки определяется в виде

$$P_0(\tau) = \begin{cases} 1 - w(\lambda_1 | \tau), & 0 \leq \tau < \tau^0, \\ w(\lambda_1 | \tau), & \tau \geq \tau^0. \end{cases}$$

Поскольку в рассматриваемом случае поток событий представляет собой рекуррентный поток, то возможно вычисление безусловной вероятности ошибки  $P_0$  по формуле (12). Для рассматриваемого особого случая  $p(\tau)$  определяется в виде (7), где

$$\gamma = (z_2 - \lambda_1) / (z_2 - z_1) = 1, \quad 1 - \gamma = -(z_1 - \lambda_1) / (z_2 - z_1) = 0; \quad z_1 = \lambda_1, \quad z_2 = \lambda_2 + \alpha + \beta, \quad 0 < z_1 < z_2.$$

Подставляя (7) в (11), получаем

$$M\tau = \int_0^\infty \tau p(\tau) d\tau = \frac{1}{\lambda_1}; \quad w(\tau) = \lambda_1^2 \tau e^{-z_1 \tau}, \quad \tau \geq 0.$$

Тогда в зависимости от значений величин  $L$ ,  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$  безусловная вероятность ошибки  $P_0$  для любого полуинтервала  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , определяется в виде

1)  $0 \leq w(\lambda_1 | t_k + 0) < 1/2$ :

1.1) если  $L \leq 0$ , то корень  $\tau^0$  не существует, при этом безусловная вероятность ошибки определяется в виде

$$P_0^{(1)} = \int_0^\infty w(\tau) P_0(\tau) d\tau = \int_0^\infty w(\tau) w(\lambda_1 | \tau) d\tau = \int_0^\infty f(\tau) d\tau,$$

$$f(\tau) = w(\tau) w(\lambda_1 | \tau) = \lambda_1^2 \tau e^{-z_1 \tau} \left\{ \frac{\alpha(1-\delta)}{\beta + \alpha(1-\delta)} + \left[ w(\lambda_1 | t_k + 0) - \frac{\alpha(1-\delta)}{\beta + \alpha(1-\delta)} \right] e^{-(\beta + \alpha(1-\delta))\tau} \right\}.$$

Обозначая через

$$b_1 = \frac{\alpha(1-\delta)}{\beta + \alpha(1-\delta)}, \quad b_2 = w(\lambda_1 | t_k + 0) - \frac{\alpha(1-\delta)}{\beta + \alpha(1-\delta)}, \quad (24)$$

получаем  $f(\tau)$  в виде

$$f(\tau) = \lambda_1^2 \tau e^{-z_1 \tau} [b_1 + b_2 e^{-(\beta + \alpha(1-\delta))\tau}]. \quad (25)$$

Учитывая, что  $\int_0^\infty \tau e^{-z\tau} d\tau = 1/z^2$ , окончательно получаем

$$P_0^{(1)} = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau = b_1 + \frac{\lambda_1^2 b_2}{(z_1 + \beta + \alpha(1-\delta))^2}, \quad (26)$$

где  $b_1, b_2$  определены в (24);

1.2) если  $0 < L < 1$ , то корень  $\tau^0$  существует и  $\tau^0 < 0$ , при этом безусловная вероятность ошибки определяется выражением (26);

1.3) если  $L \geq 1$ , то корень  $\tau^0$  существует и  $\tau^0 > 0$ , при этом безусловная вероятность ошибки определяется в виде

$$\begin{aligned} P_0^{(1)} &= \int_0^{\infty} w(\tau) P_0(\tau) d\tau = \int_0^{\tau^0} w(\tau) w(\lambda_1 | \tau) d\tau + \int_{\tau^0}^{\infty} w(\tau) (1 - w(\lambda_1 | \tau)) d\tau = \int_{\tau^0}^{\infty} w(\tau) d\tau + \int_0^{\tau^0} f(\tau) d\tau - \\ &- \int_{\tau^0}^{\infty} f(\tau) d\tau \doteq D_1 + D_2; \quad D_1 = \int_{\tau^0}^{\infty} w(\tau) d\tau = e^{-z_1 \tau^0} (1 + z_1 \tau^0); \quad D_2 = \int_0^{\tau^0} f(\tau) d\tau - \int_{\tau^0}^{\infty} f(\tau) d\tau = \\ &= b_1 \left[ 1 - 2e^{-z_1 \tau^0} (1 + z_1 \tau^0) \right] + \frac{\lambda_1^2 b_2}{(z_1 + \beta + \alpha(1-\delta))^2} \left[ 1 - 2e^{-(z_1 + \beta + \alpha(1-\delta))\tau^0} (1 + (z_1 + \beta + \alpha(1-\delta))\tau^0) \right], \end{aligned} \quad (27)$$

где  $b_1, b_2$  определены в (24);

2)  $1/2 \leq w(\lambda_1 | t_k + 0) \leq 1$ :

2.1) если  $L \leq 0$ , то корень  $\tau^0$  не существует, при этом безусловная вероятность ошибки определяется в виде

$$P_0^{(2)} = \int_0^{\infty} w(\tau) P_0(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} w(\tau) [1 - w(\lambda_1 | \tau)] d\tau = \int_0^{\infty} w(\tau) d\tau - \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau,$$

где  $f(\tau) = w(\tau) w(\lambda_1 | \tau)$  и определена в (25),  $\int_0^{\infty} w(\tau) d\tau = 1$ . Тогда

$$P_0^{(2)} = 1 - b_1 - \frac{\lambda_1^2 b_2}{(z_1 + \beta + \alpha(1-\delta))^2}; \quad (28)$$

2.2) если  $0 < L < 1$ , то корень  $\tau^0$  существует и  $\tau^0 < 0$ , при этом безусловная вероятность ошибки определяется выражением (28);

2.3) если  $L \geq 1$ , то корень  $\tau^0$  существует и  $\tau^0 > 0$ , при этом безусловная вероятность ошибки определяется в виде

$$\begin{aligned} P_0^{(2)} &= \int_0^{\infty} w(\tau) P_0(\tau) d\tau = \int_0^{\tau^0} w(\tau) [1 - w(\lambda_1 | \tau)] d\tau + \int_{\tau^0}^{\infty} w(\tau) w(\lambda_1 | \tau) d\tau = \int_0^{\tau^0} w(\tau) d\tau - \\ &- \int_0^{\tau^0} f(\tau) d\tau + \int_{\tau^0}^{\infty} f(\tau) d\tau \doteq D_3 - D_2, \end{aligned}$$

где  $D_2$  определено в (27),  $D_3 = \int_0^{\tau^0} w(\tau) d\tau = 1 - e^{-z_1 \tau^0} (1 + z_1 \tau^0)$ .

#### 4. Результаты численных расчетов

В настоящем разделе приводятся результаты статистических экспериментов по вычислению условной вероятности вынесения ошибочного решения  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$  в любой момент времени  $\tau_k \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , для общего случая и безусловной вероятности ошибки  $P_0$  для особого случая соотношения параметров ( $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$ ,  $\lambda_1(1-p) - \alpha\delta = 0$ ) для различных значений параметров модулированного обобщенного полусинхронного потока событий.

Приведенный в разделе 2 алгоритм расчета условной вероятности  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$  в любой момент времени  $\tau_k \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , положен в основу реализации программы расчета для проведения статистиче-

ских экспериментов с целью вычисления условной вероятности ошибки  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$  для общего случая. Программа расчета реализована на языке программирования C# в интегрированной среде разработки Microsoft Visual Studio 2015 в виде пользовательского приложения и интерфейса командной строки.

На первом этапе эксперимента осуществляется имитационное моделирование потока при заданных значениях параметров потока и заданном времени моделирования и как результат получение истинной траектории интенсивности процесса  $\lambda(t)$  и временных моментов  $t_1, t_2, \dots$  наступления событий потока. Описание алгоритма имитационного моделирования здесь не приводится, так как никаких принципиальных трудностей он не содержит. На втором этапе производится непосредственное вычисление апостериорных вероятностей  $w(\lambda_1 | \tau_0)$ ,  $\tau_0 = t - t_0 \geq 0$ ;  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $w(\lambda_1 | \tau_k)$ ,  $\tau_k = t - t_k \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , по формулам (2), (3); построение оценки  $\hat{\lambda}(t)$  процесса  $\lambda(t)$  и вычисление условной вероятности ошибки  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , для общего случая.

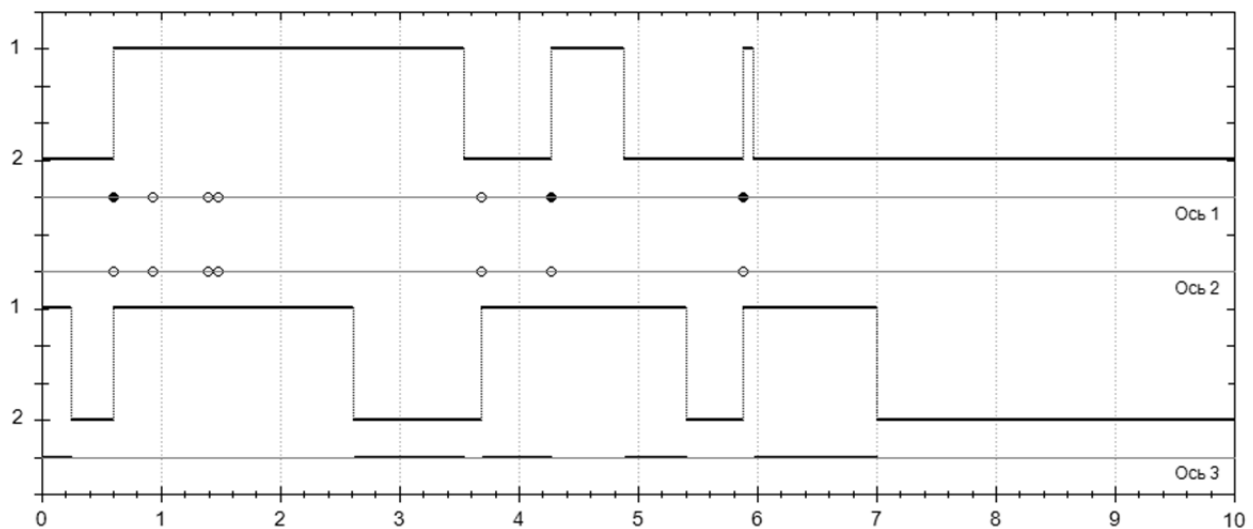


Рис. 2. Траектории процесса  $\lambda(t)$  (верхняя часть рисунка) и оценки  $\hat{\lambda}(t)$  (нижняя часть рисунка)

В качестве иллюстрации на рис. 2 приведен пример реализации потока событий при следующих значениях параметров:  $\lambda_1 = 0,8$ ,  $\lambda_2 = 0,2$ ,  $p = 0,2$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\delta = 0,9$  и общем времени моделирования  $T_m = 1000$ . В верхней части рис. 2 приведена траектория случайного процесса  $\lambda(t)$  (истинная траектория процесса  $\lambda(t)$ ), полученная путем имитационного моделирования. Цифрами 1, 2 обозначены первое и второе состояния процесса  $\lambda(t)$  соответственно. На оси 1 отображены события модулированного обобщенного полусинхронного потока событий: белыми кружками показаны события пуассоновских потоков, черными кружками – дополнительные события, которые могут наступить в первом состоянии потока при переходе процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое. Напомним, что события пуассоновских потоков и дополнительные события неразличимы для наблюдателя, поэтому на оси 2 все события потока отображены одинаково (белыми кружками). В нижней части рис. 2 приведена траектория оценки  $\hat{\lambda}(t)$  процесса  $\lambda(t)$ . Цифрами 1, 2 обозначены первое и второе состояния оценки  $\hat{\lambda}(t)$  соответственно. На оси 3 жирными линиями отмечены промежутки, на которых оценка  $\hat{\lambda}(t)$  не совпадает с истинным значением процесса  $\lambda(t)$  (область ошибочных решений). Расчет апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | \tau_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , и вынесение решения о состоянии процесса  $\lambda(t)$  производились с шагом  $\Delta t = 0,001$ .

На рис. 3 приведена траектория поведения апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | \tau_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , первого состояния процесса  $\lambda(t)$ , соответствующая полученной при имитационном моделировании последовательности наступления событий  $t_1, t_2, \dots$  модулированного обобщенного полусинхронного потока

событий (см. рис. 2, ось 2). Цифрами 1; 0,5; 0 обозначены возможные значения апостериорной вероятности по оси ординат. На рис. 4 приведена траектория условной вероятности ошибки  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , соответствующая той же последовательности наступления событий. Цифрами 1, 0,5, 0 обозначены возможные значения условной вероятности по оси ординат.

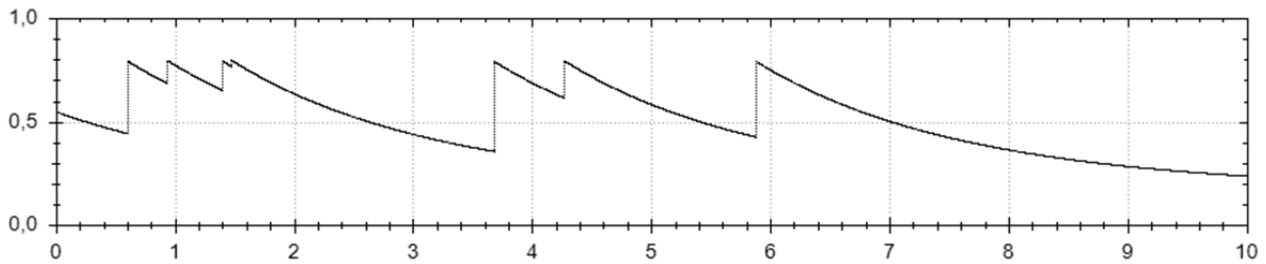


Рис. 3. Траектория апостериорной вероятности  $w(\lambda_1 | \tau_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$

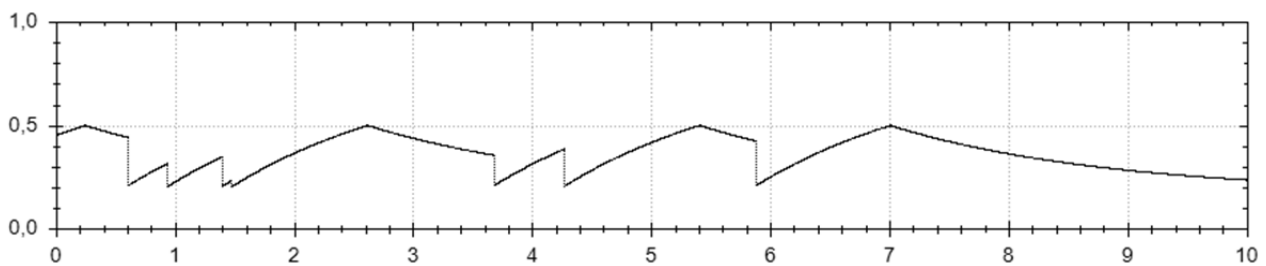


Рис. 4. Траектория условной вероятности ошибки  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$

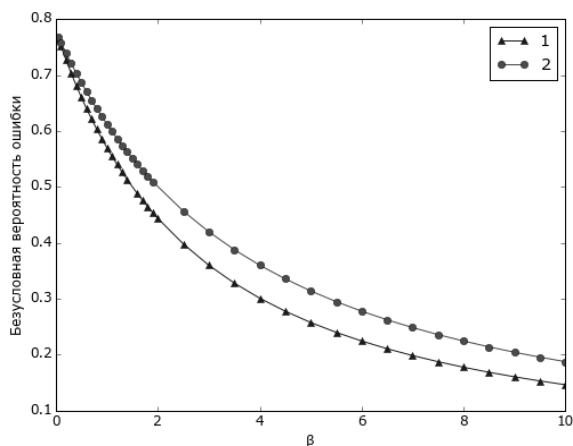


Рис. 5. Графики изменения значений безусловной вероятности ошибки  $P_0$

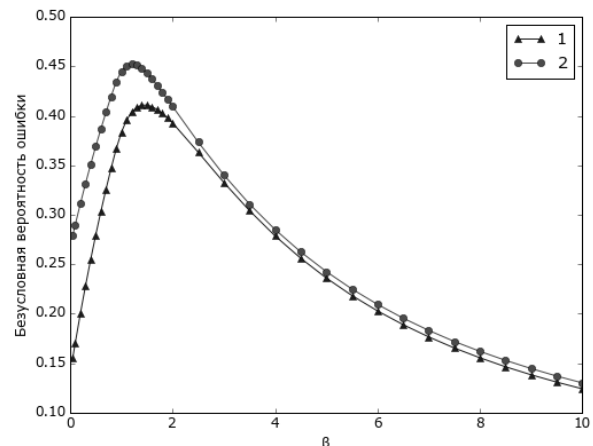


Рис. 6. Графики изменения значений безусловной вероятности ошибки  $P_0$

Таким образом, при реализации предложенного алгоритма осуществляется оценка состояний процесса  $\lambda(t)$  в любой момент времени  $t$ , и в этот же момент времени вычисляется условная вероятность ошибки вынесения решения.

Для особого случая соотношения параметров ( $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$ ,  $\lambda_1(1 - p) - \alpha\delta = 0$ ) построены графики безусловной вероятности ошибки  $P_0$  для различных значений параметров модулированного обобщенного полусинхронного потока событий и для любого полуинтервала  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Алгоритм расчета состоит из следующих этапов: 1) задается  $\beta$ ; 2) вычисляется  $L$ ,  $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ ; 3) определяется один из шести возможных вариантов (см. подраздел 3.2) и вычисляется значение  $P_0$  для этого варианта; 4) значение  $\beta$  увеличивается; 5) алгоритм переходит на шаг 1 и т.д.

На рис. 5 представлены графики изменения значений безусловной вероятности ошибки  $P_0$  в зависимости от значений параметров потока: 1 – при  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 1,5$ ,  $p = 0,5$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\delta = 0,5$ ; 2 – при  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $p = 0,5$ ,  $\alpha = 4$ ,  $\delta = 0,5$ . На рис. 6 приведены графики изменения значений безусловной вероятности ошибки  $P_0$  в зависимости от значений параметров потока: 1 – при  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 0,8$ ,  $p = 0,2$ ,  $\alpha = 4$ ,  $\delta = 0,8$ ; 2 – при  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 1,8$ ,  $p = 0,36$ ,  $\alpha = 4$ ,  $\delta = 0,8$ . Параметр  $\beta$  изменяется по оси абсцисс и принимает значения 0,05; 0,1; 0,2 и так далее до 10.

### Заключение

Алгоритм оптимального оценивания состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий, предложенный в работах [34, 35], позволяет осуществлять оценку состояний процесса  $\lambda(t)$  по результатам наблюдений за моментами наступлений событий в потоке. При реализации предложенного алгоритма осуществляется оценка состояний процесса  $\lambda(t)$  в любой момент времени  $t$ , и в этот же момент времени вычисляется условная вероятность сделанной при вынесении решения ошибки. Для частного и особого случаев (при некоторых дополнительных ограничениях на параметры потока) вычисление безусловной вероятности ошибки возможно в явном виде, что позволяет при заданном наборе параметров определить значение безусловной вероятности ошибки до начала наблюдений за потоком событий и не привлекая методы имитационного моделирования.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. Some Statistical Methods Connected with Series of Events // J. Royal Statistical Society B. 1955. V. 17. P. 129–164.
2. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No. 4. P. 923–930.
3. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer // Engineering cybernetics. 1979. V. 17 (6). P. 66–73.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
5. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V.16. P. 764–779.
6. Cox D. R., Isham V. Point Processes. London : Chapman & Hall, 1980.
7. Bremaud P. Point Processes and Queues: Martingale Dynamics. New York : Springer-Verlag, 1981.
8. Last G., Brandt A. Marked Point Process on the Real Line: The Dynamic Approach. New York : Springer-Verlag, 1995.
9. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
10. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 18–23.
11. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
12. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
13. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2 (11). С. 66–81.
14. Горцев А.М., Калягин А.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий в условиях непродлеваемого мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 4 (13). С. 50–60.
15. Горцев А.М., Калягин А.А. Вероятность ошибочных решений при оценивании состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1 (18). С. 58–70.
16. Горцев А.М., Калягин А.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 80–87.
17. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.

18. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 27–37.
19. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3 (32). С. 23–32.
20. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Шевченко Т.И. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Известия высших учебных заведений. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.
21. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2 (11). С. 44–65.
22. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1 (14). С. 13–21.
23. Горцев А.М., Леонова М.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1 (10). С. 33–47.
24. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
25. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
26. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. 2004. № 10. С. 8–16.
27. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 179–184.
28. Горцев А.М., Шмырин И.С. Оптимальная оценка состояний дважды стохастического потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 52–66.
29. Горцев А.М., Паршина М.Е. Оценивание параметров альтернирующего потока событий в условиях «мертвого времени» // Изв. вузов. Физика. 1999. № 4. С. 8–13.
30. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10, № 3. С. 273–280.
31. Горцев А.М., Климов И.С. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий в условиях частичной его ненаблюдаемости // Радиотехника. 1991. № 12. С. 3–7.
32. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного альтернирующего пуассоновского потока событий методом моментов // Радиотехника. 1995. № 7–8. С. 6–10.
33. Бахолдина М.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени и условия его рекуррентности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 2 (31). С. 4–17.
34. Бахолдина М.А. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 10–21.
35. Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability // Applied Mathematical Sciences. 2015. V. 9, No. 29. P. 1433–1451.
36. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М. : Советское радио, 1968.
37. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 18–25.
38. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М. : Высшая школа, 2000. 383 с.

**Бахолдина Мария Алексеевна.** E-mail: maria.bakholdina@gmail.com  
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 19 октября 2015 г.

*Bakholdina Maria A.* (Tomsk State University, Russian Federation). **Probability of error on the states estimation of the modulated generalized semi-synchronous flow of events.**

**Keywords:** modulated semi-synchronous generalized flow of events; doubly stochastic Poisson process (DSPP); Markovian arrival process (MAP); a posteriori probability of the flow state; state estimation; criterion of a posteriori probability maximum; probability of error on estimation of the flow states.

DOI: 10.17223/19988605/34/3

In this paper, we consider the modulated semi-synchronous generalized flow of events, which is one of the mathematical models for incoming streams of events in computer communication networks and which is related to the class of doubly stochastic Poisson process-

es (DSPPs). The flow intensity process is a piecewise constant stationary random process  $\lambda(t)$  with two states  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ ) (first and second states correspondingly). During the time interval with  $\lambda(t) = \lambda_i$ , a Poisson flow of events with intensity  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , arrives. At any moment of an event occurrence in state 1 of the process  $\lambda(t)$ , the process  $\lambda(t)$  can change its state to state 2 with probability  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ) or continue to stay in state 1 with complementary probability  $1 - p$  (i.e., after an event occurrence the process  $\lambda(t)$  can change or not change its state from state 1 to state 2). The transition of the process  $\lambda(t)$  from the first state to the second one is also possible at any moment that does not coincide with the moment of an event occurrence, in this case the duration of the process  $\lambda(t)$  staying in the first state is distributed according to the exponential law with parameter  $\beta$ :  $F(\tau) = 1 - e^{-\beta\tau}$ ,  $\tau \geq 0$ . Then the duration of the process  $\lambda(t)$  staying in the first state is distributed according to the exponential law with distribution function  $F_1(\tau) = 1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta)\tau}$ ,  $\tau \geq 0$ . The transition of the process  $\lambda(t)$  from state 2 to state 1 at the moment of an event occurrence in the second state is impossible. The duration of the process  $\lambda(t)$  staying in the second state is distributed according to the exponential law with the parameter  $\alpha$ :  $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$ ,  $\tau \geq 0$ . Also, at the moment when the state changes from the second to the first state, an additional event is assumed to be initiated with probability  $\delta$  ( $0 \leq \delta \leq 1$ ).

So, we present analytical and numerical results of obtaining the conditional and unconditional error probability on the estimation of the flow states. For the general case the algorithm of calculating the conditional error probability  $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0) | \tau_k)$  at any moment  $\tau_k \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , is proposed. Also, for the special cases of the flow parameters relation expressions for unconditional error probability calculation are obtained explicitly.

## REFERENCES

1. Cox, D.R. (1955) Some Statistical Methods Connected with Series of Events. *J. Royal Statistical Society B*. 17. pp. 129-164. DOI: 10.2307/2983950
2. Kingman, Y.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923-930.
3. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer. *Engineering cybernetics*. 17(6). pp. 66-73. DOI: 10.1016/0166-5316(84)90009-9
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika*. 1. pp. 55-61.
5. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764-779. DOI: 10.2307/3213143
6. Cox, D.R. & Isham, V. (1980) *Point Processes*. London: Chapman & Hall.
7. Bremaud, P. (1981) *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*. New York: Springer-Verlag.
8. Last, G. & Brandt, A. (1995) *Marked Point Process on the Real Line: The Dynamic Approach*. New York: Springer-Verlag.
9. Nezhelskaya, L.A. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobyitiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyudaemosti [Optimal state estimation of semi-synchronous flow in conditions of its incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95-98.
10. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobyitiy metodom momentov [Parameters estimation of a semi-synchronous doubly stochastic flow of events using method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. pp. 18-23.
11. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
12. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semi-synchronous twice-stochastic event flow in conditions of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(1). pp. 31-41. (In Russian).
13. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2010) Optimal state estimation of generic semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 66-81. (In Russian).
14. Gortsev, A.M. & Kalyagin, A.A. (2010) Optimal states estimation of generalized semi-synchronous flow of events in conditions of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(13). pp. 50-60. (In Russian).
15. Gortsev, A.M. & Kalyagin, A.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(18). pp. 58-70. (In Russian).
16. Gortsev, A.M. & Kalyagin, A.A. (2012) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semi-synchronous flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 80-87. (In Russian).
17. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semi-synchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19-29. (In Russian).



18. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27-37. (In Russian).
19. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Comparison of MP- and MM-estimations of dead time in generic semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(32). pp. 23-32. (In Russian).
20. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) Optimal states estimation of asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of states. *Russian Physics Journal*. 12. pp. 67-85. (In Russian).
21. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal state estimation of generic asynchronous doubly stochastic flow with random number of states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 44-65. (In Russian).
22. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) About connectivity of MC-flows and MAP-flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 13-21. (In Russian).
23. Gortsev, A.M. & Leonova, M.A. (2010) Optimal state estimation of generic asynchronous doubly stochastic flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 33-47. (In Russian).
24. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The joint probability density of duration of the intervals in generalized asynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(21). pp. 14-25. (In Russian).
25. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54-63. (In Russian).
26. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotekhnics*. 10. pp. 8-16.
27. Vasilyeva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002) Parameter estimation of a doubly stochastic flow of events under incomplete observability. *Avtomatika i Telemekhanika*. 3. pp. 179-184.
28. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999) Optimal states estimation of the doubly stochastic flow of events in the presence of errors in time moments measurements. *Automation and Remote Control*. 1. pp. 52-66.
29. Gortsev, A.M. & Parshina, M.E. (1999) Otsenivanie parametrov al'terniruyushchego potoka sobytii v usloviyakh "mertvogo vremeni" [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of dead time]. *Russian Physics Journal*. 4. pp. 8-13.
30. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (1997) Otsenka parametrov al'terniruyushchego potoka sobytii pri uslovii ego chastichnoy nablyudaemosti [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of particulate observability]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 10(3). pp. 273-280.
31. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) Intensity estimation of the Poisson flow of events in conditions of its incomplete observability. *Radiotekhnika – Radioengineering*. 12. pp. 3-7. (In Russian).
32. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (1995) Parameters estimation of the synchronous alternating Poisson flow of events with the method of moments. *Radiotekhnika – Radioengineering*. 7-8. pp. 6-10. (In Russian).
33. Bakhholdina, M.A. (2015) Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of constant dead time and flow recurrence conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(31). pp. 4-17. (In Russian).
34. Bakhholdina, M.A. (2013) Optimal states estimation of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 10-21. (In Russian).
35. Bakhholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2015) Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability. *Applied Mathematical Sciences*. 9(29). pp. 1433-1451. DOI: 10.12988/ams.2015.5135
36. Levin, B.R. (1968) *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [The theory of statistical radio engineering]. Moscow: Sovetskoe radio.
37. Bakhholdina, M. & Gortsev, A. (2014) Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 18-25. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4\_3
38. Ventcel, E.S. & Ovcharov, L.A. (2000) *Teoriya sluchaynykh protsessov i ee inzhenernye prilozheniya* [The theory of random processes and its engineering applications]. Moscow: Vysshaya shkola.