

М.Н. Сиротина, А.М. Горцев

**ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ
МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В МОДУЛИРОВАННОМ СИНХРОННОМ
ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ**

Работа выполнена в рамках государственного заказа Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Национальном исследовательском Томском государственном университете на 2014–2016 гг.

Рассматривается модулированный синхронный дважды стохастический поток событий. Поток функционирует в условиях непродлевающегося мертвого времени, т.е. после каждого зарегистрированного события наступает время фиксированной длительности, в течение которого другие события исходного модулированного синхронного потока недоступны наблюдению. Полагается, что длительность мертвого времени – неизвестная величина. Методом максимального правдоподобия решается задача об оценке длительности мертвого времени по наблюдениям за моментами наступления событий рассматриваемого потока.

Ключевые слова: модулированный синхронный поток событий; непродлевающееся мертвое время; функция правдоподобия; оценка максимального правдоподобия; длительность мертвого времени.

Настоящая работа является непосредственным продолжением исследований модулированного синхронного потока событий, начатых в статьях [1–4].

Математические модели систем массового обслуживания широко применяются при описании реальных физических, технических и других процессов и систем. В связи с бурным развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей, телекоммуникационных сетей, объединенных термином «цифровые сети интегрального обслуживания» (ЦСИО) [5, 6].

На практике параметры, определяющие входящий поток событий, изменяются со временем, при этом изменения часто носят случайный характер, последнее приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий. По-видимому, одной из первых работ в этом направлении явилась статья [7], в которой дважды стохастический поток определяется как поток, интенсивность которого есть случайный процесс. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Подчеркнем, что потоки второго класса впервые введены в рассмотрение практически одновременно в 1979 г. в [8, 9]. В [8] введенные потоки названы МС (Markov chain)-потоками; в [9] – MVP (Markov versatile processes)-потоками. Отечественные и зарубежные авторы в своих работах, начиная с начала 1990-х гг. [10–15], называют введенные в [8, 9] потоки событий либо дважды стохастическими потоками событий, либо МАР-потоками, либо МС-потоками. В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, МС-потоки можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки событий [16–21]; 2) асинхронные и обобщенные асинхронные потоки событий [22–27]; 3) полусинхронные и обобщенные полусинхронные потоки событий [28–33]. В [34] введены в рассмотрение МАР-потоки событий первого порядка (собственно МАР-потоки, введенные в [9]) и МАР-потоки событий второго порядка (суперпозиция двух синхронизированных МАР-потоков первого порядка, отличающихся друг от друга исходными параметрами). В [34] показывается, что син-

хронный МС-поток является частным случаем МАР-потока первого порядка, асинхронный и полусинхронный МС-потоки являются частными случаями МАР-потока второго порядка.

В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо (что еще более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [24, 27, 29, 33, 35–38]; 2) оценка параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [16–22, 26, 28, 30–32].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [39–46], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В качестве примера приведем протокол CSMA/CD – протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта, широко используемый в компьютерных сетях. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети. Для того чтобы оценить потери заявок в узле сети, необходимо оценить длительность мертвого времени, которым выступает в данном случае длительность сигнала «заглушки».

В работах [1–4] введен в рассмотрение модулированный синхронный поток событий, являющийся обобщением синхронного потока и относящийся к классу МАР-потоков второго порядка. Синхронный поток событий систематически исследовался в работах [16–21, 47–52]. В настоящей статье, являющейся непосредственным развитием работ [1–4], для решения задачи оценивания длительности мертвого времени применяется метод максимального правдоподобия [53–59], так как оценки, построенные при использовании данного метода, как правило, обладают привлекательными свойствами.

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный синхронный поток событий (далее поток), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ (потока) в i -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром $\alpha_i, i = 1, 2$. Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в i -м состоянии, то на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, где Δt – достаточно малая величина, с вероятностью $\alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$ пребывание процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии закончится и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью, равной единице, перейдет из i -го состояния в j -е ($i, j = 1, 2, i \neq j$). В течение временного интервала случайной длительности, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью $\lambda_i, i = 1, 2$. Кроме того, переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1 ; переход осуществляется с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$); с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое возможен также в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2 ; переход осуществляется с вероятностью q ($0 \leq q \leq 1$); с вероятностью $1 - q$ процесс $\lambda(t)$ остается во втором состоянии. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс.

Матрицы инфинитезимальных коэффициентов рассматриваемого потока примут вид

$$D_0 = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ q\lambda_2 & (1-q)\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если $\alpha_i = 0, i = 1, 2$, то имеет место обычный синхронный поток событий [50].

После каждого зарегистрированного события наступает время фиксированной длительности T (далее мертвое время), в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. Рассматривается непродлевающееся мертвое время, т.е. события, наступившие в течение интервала мертвого времени не вызывают его продления. По окончании длительности периода мертвого времени первое наступившее событие вновь порождает период мертвого времени длительности T и т.д. Вариант возникающей ситуации представлен на рис. 1, где λ_1, λ_2 – состояния процесса $\lambda(t)$, t_1, t_2, \dots – моменты наступления наблюдаемых событий потока, штриховка – периоды мертвого времени длительности T , ось 1 отображает исходный модулированный поток событий, 2 – схему создания мертвого времени, 3 – наблюдаемые события модулированного синхронного потока.

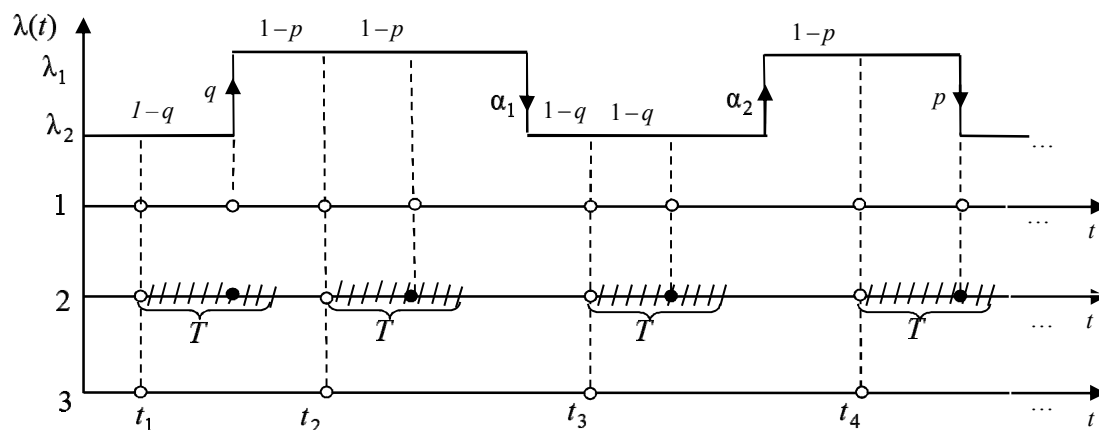


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков с интенсивностями λ_1 либо λ_2) являются принципиально ненаблюдаемыми (в сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только моменты наступления наблюдаемых событий на временной оси t_1, t_2, \dots . Рассматривается стационарный режим функционирования потока. Последовательность моментов $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ наступления событий наблюдаемого потока порождает вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, т.е. поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k (момент наступления события потока), $k = 1, 2, \dots$.

Основной задачей работы является построение оценки \hat{T} длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия (в предположении, что остальные параметры потока $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q$ известны).

2. Построение функции правдоподобия

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k, k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока (рис. 2).

Так как поток функционирует в стационарном режиме, то плотность вероятности значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока

$p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятности зависит от длительности мертвого времени). Таким образом, без потери общности момент наступления события t_k можно положить равным нулю, т.е. $\tau = 0$.

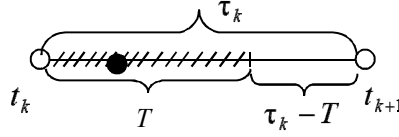


Рис. 2. Интервал между соседними наблюдаемыми событиями потока

Тогда плотность вероятностей $p_T(\tau)$ значений длительности интервала между наступлениями соседних событий модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени, запишется в виде [4]:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

$$\gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1} (z_2 - \lambda_1 \pi_1(T) - \lambda_2 \pi_2(T)),$$

$$z_1 = (\alpha_1 + \lambda_1 + \alpha_2 + \lambda_2 - \sqrt{(\alpha_1 + \lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2}),$$

$$z_2 = (\alpha_1 + \lambda_1 + \alpha_2 + \lambda_2) + \sqrt{(\alpha_1 + \lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2}, \quad z_1 < z_2,$$

$$\pi_1(T) = \pi_1 - (\pi_1 - \pi_1(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \quad \pi_2(T) = \pi_2 - (\pi_2 - \pi_2(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T},$$

$$\pi_1 = \frac{\alpha_2 + q\lambda_2}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1 + p\lambda_1}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}.$$

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1, \tau_2 = t_3 - t_2, \dots, \tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, – последовательность измеренных в результате наблюдения за потоком на интервале наблюдения $(0, t)$ значений длительностей интервалов между соседними событиями наблюдаемого потока. Упорядочим величины $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(k)}$. Тогда функция правдоподобия, с учетом (1), примет вид

$$L(\gamma_i, \lambda_i, \alpha_i, p, q, T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = 0 < \tau_{\min} < T,$$

$$L(\lambda_i, \alpha_i, p, q, T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}), \quad T \leq \tau_{\min}.$$

Так как основная задача исследования заключается в построении оценки длительности мертвого времени \hat{T} , то согласно методу максимального правдоподобия ее решение есть нахождение максимума функции правдоподобия по неизвестному параметру T :

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}) = \prod_{j=1}^k \left\{ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau^{(j)}-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau^{(j)}-T)} \right\} \Rightarrow \max_T, \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}, \quad (2)$$

где $z_1, z_2, \gamma(T)$ определены в (1).

Значение T , при котором (2) достигает своего глобального максимума, есть оценка \hat{T} длительности мертвого времени.

3. Решение оптимизационной задачи

Сделаем переобозначение: $\tau_{\min} = \tau_m$. Так как функция правдоподобия (2) отлична от нуля при $0 \leq T \leq \tau_m$, то положим $p_T(\tau^{(j)}) = 0$, $j = \overline{2, k}$, при $T > \tau_m$ ($\tau_m > 0$). Изучим поведение функции $p_T(\tau_m)$, $0 \leq T \leq \tau_m$ как функции переменной T . В последующем изложении ситуация, когда принимается

$\tau_m = 0$, означает доопределение изучаемых функций в граничной точке. Рассмотрим производную $p'_T(\tau_m)$ функции $p_T(\tau_m)$ по переменной T . Производная примет вид

$$p'_T(\tau_m) = \frac{F_1(T)e^{-z_1(\tau_m-T)} - F_2(T)e^{-z_2(\tau_m-T)}}{(z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2)},$$

$$F_1(T) = z_1[(\beta_1 + \beta_2)z_1z_2 - z_1f(T) - f'(T)], \quad F_2(T) = z_2[(\beta_1 + \beta_2)z_1z_2 - z_2f(T) - f'(T)], \quad (3)$$

$$f(T) = P_1 + P_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F(T)}, \quad f'(T) = -(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 + \beta_2)z_1z_2 \frac{(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F^2(T)},$$

$$F(T) = z_1z_2 - Pe^{-(\beta_1 + \beta_2)T} > 0, \quad 0 \leq T \leq \tau_m, \quad \tau_m \geq 0,$$

где $\beta_1 = \alpha_1 + p\lambda_1$, $\beta_2 = \alpha_2 + q\lambda_2$, $P_1 = \lambda_1\alpha_2(1-p) + q\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1)$, $P_2 = \lambda_2\alpha_1(1-q) + p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2)$, $P = \lambda_1\lambda_2(1-p-q)$, $z_1z_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1$; z_1, z_2 определены в (1).

Лемма 1. Производная $p'_T(\tau_m)$ – положительная функция переменной τ_m при $T=0$ ($p'_0(\tau_m) > 0$).

Доказательство. Так как τ_m – любое неотрицательное число ($\tau_m \geq 0$), то $p'_0(\tau_m)$ можно рассматривать как функцию переменной τ_m . Подставляя $T=0$ в (3), получаем

$$p'_0(\tau_m) = \frac{C}{(z_2 - z_1)A^2} \left\{ z_1 e^{-z_1\tau_m} (z_2 A - C) - z_2 e^{-z_2\tau_m} (z_1 A - C) \right\}, \quad \tau_m \geq 0, \quad (4)$$

где $A = P_1 + P_2$, $C = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$; P_1, P_2 определены в (3); z_1, z_2 определены в (1).

Значение производной (4) в точке $\tau_m = 0$ примет вид

$$p'_0(0) = p'_0(\tau_m = 0) = (C/A)^2 > 0, \quad (5)$$

где A, C определены в (4).

Предел функции $p'_0(\tau_m)$ при $\tau_m \rightarrow \infty$ определится в виде

$$p'_0(\infty) = \lim_{\tau_m \rightarrow \infty} p'_0(\tau_m) = \pm 0. \quad (6)$$

Исследуем функцию $p'_0(\tau_m)$ ($\tau_m > 0$) на присутствие нуля. Рассмотрим уравнение $p'_0(\tau_m) = 0$, которое приводится к виду

$$e^{-(z_2 - z_1)\tau_m} = \frac{z_1(z_2 A - C)}{z_2(z_1 A - C)}, \quad \tau_m > 0. \quad (7)$$

Обозначим $B = B_1 / B_2$; $B_1 = z_1(z_2 A - C)$, $B_2 = z_2(z_1 A - C)$. Подчеркнем, что если $B_2 = 0$, то $z_1 A - C = 0$, т.е. $z_1 A = C$. Тогда $z_2 A - C = (z_2 - z_1)A > 0$ и из (4) следует $p'_0(\tau_m) > 0, \tau_m \geq 0$.

Преобразовывая B_1 , получаем

$$B_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \left\{ -2A + (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2) + (\beta_1 + \beta_2) \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right\} > \\ > \frac{1}{2} z_1^2 \left\{ -2A + (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2) + (\beta_1 + \beta_2) |\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2| \right\}.$$

Нетрудно показать, что правая часть последнего неравенства всегда строго больше нуля. Тогда $B_1 > 0$. Таким образом, в уравнении (7) имеют место два варианта: 1) $B_1 > 0$, $B_2 < 0$; 2) $B_1 > 0$, $B_2 > 0$. Для первого варианта $B < 0$, и уравнение (7) не имеет решения. Для второго варианта $B > 1$, так как $B_1 - B_2 = (z_2 - z_1)C > 0$, и уравнение (7) также не имеет решения. Отсюда следует, что производная $p'_0(\tau_m)$ не достигает нуля для $\tau_m > 0$. Тогда (6) принимает вид $p'_0(\infty) = +0$. Объединение (5), (6) и утверждения $p'_0(\tau_m) \neq 0, \tau_m > 0$, доказывает лемму 1.

Из леммы 1 следует, что плотность вероятности $p_T(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной T в точке $T=0$ ($\tau_m \geq 0$).

Лемма 2. Производная $p'_T(\tau_m)$ при $T = \tau_m$ ($\tau_m \geq 0$) строго больше нуля ($p'_{T=\tau_m}(\tau_m) = p'_0(\tau_m) > 0$).

Доказательство. Подставляя $T = \tau_m$ в (3), получаем, что

$$p'(\tau_m) = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \left\{ C + (\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) \frac{e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m}}{(z_1 z_2 - P e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m})^2} X(\tau_m) \right\}, \quad (8)$$

$$X(\tau_m) = C + P(z_1 + z_2)(1 - e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m}), \tau_m \geq 0,$$

где C определена в (4); $\beta_1, \beta_2, P_1, P_2, P$ определены в (3); z_1, z_2 определены в (1).

Нетрудно показать, что $X(\tau_m) > 0$ для $\tau_m \geq 0$. Последнее означает, что знак производной $p'(\tau_m)$ определяется множителем $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)$.

Рассмотрим $p'(\tau_m)$ как функцию τ_m ($\tau_m \geq 0$). Имеем

$$p'(\tau_m = 0) = (C/A)^2 > 0; \quad p'(\tau_m = \infty) = \lim_{\tau_m \rightarrow \infty} p'(\tau_m) = C/(\beta_1 + \beta_2) > 0.$$

Знак разности $p'(\tau_m = 0) - p'(\tau_m = \infty) = C(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)/(A^2(\beta_1 + \beta_2))$ определяется знаком множителя $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)$: если $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) > 0$, то $p'(\tau_m = 0) > p'(\tau_m = \infty)$; если $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) < 0$, то $p'(\tau_m = 0) < p'(\tau_m = \infty)$; если $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) = 0$, то $p'(\tau_m = 0) = p'(\tau_m = \infty)$.

Из вида производной $p'(\tau_m)$ следует, что в случае, когда $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) \geq 0$, функция $p'(\tau_m) > 0$, т.е. функция $p_T(\tau_m)$ есть возрастающая функция переменной T в точке $T = \tau_m$ ($\tau_m \geq 0$). Случай $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) < 0$ требует отдельного рассмотрения. Для этого исследуем вторую производную $p''(\tau_m)$ функции $p(\tau_m)$. Производная $p''(\tau_m)$, с учетом (8), примет вид

$$p''(\tau_m) = -(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) z_1 z_2 \frac{e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m}}{F^3(\tau_m)} Y(\tau_m), \quad (9)$$

$$Y(\tau_m) = \left\{ C + (z_1 + z_2)P - (z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)P e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m} \right\}, \tau_m \geq 0,$$

где C определена в (4); $\beta_1, \beta_2, P_1, P_2, P, F(T = \tau_m)$ определены в (3); z_1, z_2 определены в (1).

Так как рассматривается случай $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) < 0$, то множитель в (9) $-(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) z_1 z_2 e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m} / F^3(\tau_m) > 0$; тогда знак производной $p''(\tau_m)$ определяется знаком выражения $Y(\tau_m)$. Исследуем функцию $Y(\tau_m)$. Имеем $Y(\infty) = C + (z_1 + z_2)P \geq 0$, $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2)$, при этом $Y(0) > 0$, либо $Y(0) < 0$, либо $Y(0) = 0$. Производная $Y'(\tau_m)$ примет вид

$$Y'(\tau_m) = (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)P e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m}, \tau_m \geq 0.$$

Знак производной $Y'(\tau_m)$ зависит от множителя P : 1) если $P < 0$, то $Y'(\tau_m) < 0$ ($\tau_m \geq 0$) и тогда $p''(\tau_m) > 0$ ($\tau_m \geq 0$); 2) если $P = 0$, то $Y(\tau_m) = C > 0$ ($\tau_m \geq 0$) и тогда $p''(\tau_m) > 0$ ($\tau_m \geq 0$); 3) если $P > 0$, то $Y'(\tau_m) > 0$ ($\tau_m \geq 0$) и тогда $p''(\tau_m) > 0$, либо $p''(\tau_m) < 0$, либо $p''(\tau_m) = 0$ ($\tau_m \geq 0$).

Для первых двух случаев производная $p'(\tau_m) > 0$ ($\tau_m \geq 0$). Если реализуется третий случай, то возможны варианты поведения функции $p'(\tau_m)$ ($\tau_m \geq 0$): а) если $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2) > 0$, то $p''(\tau_m) > 0$ ($\tau_m \geq 0$); тогда $p'(\tau_m) > 0$ ($\tau_m \geq 0$); б) если $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2) = 0$, то $p''(\tau_m) = 0$ ($\tau_m = 0$), $p''(\tau_m) > 0$ ($\tau_m > 0$); тогда $p'(\tau_m) > 0$ ($\tau_m \geq 0$); в) если $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2) < 0$, то поведение $p''(\tau_m)$ определяется тремя ситуациями: 1) $0 \leq \tau_m < \tau_m^*$, тогда $p''(\tau_m) < 0$; 2) $\tau_m = \tau_m^*$, тогда $p''(\tau_m) = 0$; 3) $\tau_m^* < \tau_m$, тогда $p''(\tau_m) > 0$.

Таким образом, при реализации варианта $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2) < 0$ производная $p'(\tau_m)$ ($\tau_m > 0$) достигает своего глобального минимума в точке $\tau_m = \tau_m^*$. При этом точка τ_m^* определяется выражением

$$\tau_m^* = -\frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \ln \frac{z_1 z_2 (z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2)}{(z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)P}, \quad P > 0. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8), находим выражение для производной $p'(\tau_m)$ в точке минимума $\tau_m = \tau_m^*$:

$$p'(\tau_m^*) = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \left\{ C + (\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) \frac{(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2)^2}{4P(\beta_1 + \beta_2)} \right\}, P > 0. \quad (11)$$

Можно показать, что производная, определяемая в (11), строго больше нуля ($p'(\tau_m^*) > 0$, $P > 0$). Отсюда следует, что при реализации варианта $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2) < 0$ выполняется $p'(\tau_m) > 0$ ($\tau_m \geq 0$). Лемма 2 доказана.

Далее изучим поведение производной $p'_T(\tau_m)$ как функции переменной T на интервале $(0, \tau_m)$.

Рассмотрим на предмет существования корней уравнение $p'_T(\tau_m) = 0$, которое, с учетом (3), преобразуется в выражение

$$\Psi(T) = e^{-(z_2 - z_1)(\tau_m - T)}, \Psi(T) = \frac{F_1(T)}{F_2(T)}, 0 \leq T \leq \tau_m, \quad (12)$$

где $F_1(T), F_2(T)$ определены в (3). Так как, в принципе, τ_m может быть сколь угодно большим числом, то изучим поведение функции $\Psi(T)$ при $T \geq 0$.

Отметим, что $e^{-(z_2 - z_1)\tau_m} \leq e^{-(z_2 - z_1)(\tau_m - T)} \leq 1, 0 \leq T \leq \tau_m, \tau_m \geq 0$.

Обозначим $h = 1 - p - q$, тогда $P = \lambda_1 \lambda_2 h$. Величину $(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)$ представим в виде

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) = -(\lambda_1 \lambda_2)^2 h^2 + \lambda_1 \lambda_2 [2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2)]h - z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2)(z_2 - \beta_1 - \beta_2) = x(h), -1 \leq h \leq 1. \quad (13)$$

Функция (13) достигает нуля в точках $h = h_1$ и $h = h_2$; $h_1 = z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)/\lambda_1 \lambda_2$, $h_2 = z_1(z_2 - \beta_1 - \beta_2)/\lambda_1 \lambda_2$, $h_1 < h_2$.

Исследуем функцию $F_1(T)$, $T \geq 0$, из (12) и определенную в (3).

Лемма 3. Функция $F_1(T) > 0$ при $T \geq 0$.

Доказательство. Имеем

$$F_1(0) = z_1(\beta_1 + \beta_2)(z_2 A - C)C / A^2 > 0, F_1(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_1(T) = z_1(z_2 A - C) > 0,$$

так как $(z_2 A - C) > 0$ (лемма 1).

Тогда $(z_2 A - C) = \lambda_1 \lambda_2 z_1 (h - h_1) > 0$. Отсюда следует, что всегда $h > h_1$.

Для дальнейшего исследования $F_1(T)$ на знак представим ее как функцию, зависящую от параметра h ($F_1(T) = F_1(T, h)$):

$$F_1(T, h) = z_1 [(\beta_1 + \beta_2)z_1 z_2 - z_1 f(T, h) - f'(T, h)], T \geq 0, -1 \leq h \leq 1, \quad (14)$$

$$f(T, h) = A + x(h) \frac{e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F(T, h)}, f'(T, h) = -z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2) x(h) \frac{e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F^2(T, h)},$$

где $x(h)$ определена в (13); A – в (4); β_1, β_2 ; $F(T, h)$ – в (3); z_1, z_2 – в (1).

Знак функции $F_1(T, h)$ зависит от знака функции $x(h)$. Рассмотрим все возможные варианты.

Пусть $x(h) = 0$. Это возможно, как следует из (13), если $h = h_1$ либо $h = h_2$. Так как всегда $h > h_1$, то случай $h = h_1$ исключается. Тогда для случая $h = h_2$ имеем $F_1(T, h = h_2) = z_1^2 (z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2) > 0$, $T \geq 0$.

Пусть $x(h) > 0$. Последнее возможно, если реализуется один из следующих вариантов: $0 < h_1 < h < h_2$; $0 = h_1 < h < h_2$; $h_1 < 0 < h < h_2$; $h_1 < h = 0 < h_2$; $h_1 < h < 0 < h_2$; $h_1 < h < h_2 = 0$; $h_1 < h < h_2 < 0$.

Рассмотрим вариант $0 < h_1 < h < h_2$. Имеем

$$\frac{\partial F_1(T, h)}{\partial T} = \frac{z_1^2 z_2 (\beta_1 + \beta_2) x(h) e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F^3(T, h)} \left\{ z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_1 + \beta_1 + \beta_2) h e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \right\} \quad (15)$$

$$T \geq 0, 0 < h_1 < h < h_2.$$

Знак производной (15) определяется знаком функции:

$$y_1(T, h) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_1 + \beta_1 + \beta_2) h e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}, \quad T \geq 0, 0 < h_1 < h < h_2. \quad (16)$$

Тогда, поскольку $h > 0$, функция (15) – возрастающая функция переменной T (возрастает от $y_1(T=0, h) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_1 + \beta_1 + \beta_2) h$ до $y_1(T=\infty) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) > 0$). Тогда $y_1(T=0, h) < 0$ для $0 < h_1 < h < h_2$. Отсюда следует, что функция (16) проходит через ноль в точке

$$T_1(h) = -\frac{1}{(\beta_1 + \beta_2)} \ln \frac{z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2)}{\lambda_1 \lambda_2 (z_1 + \beta_1 + \beta_2) h}, \quad 0 < h_1 < h < h_2.$$

В силу этого поведение производной $F'_1(T, h)$ (определяемой в (15)) в зависимости от T будет выглядеть следующим образом: $F'_1(T, h) < 0, 0 \leq T < T_1(h)$; $F'_1(T, h) = 0, T = T_1(h)$; $F'_1(T, h) > 0, T > T_1(h)$. Таким образом, функция $F_1(T, h)$ в точке $T = T_1(h)$ достигает своего глобального минимума, при этом $F_1(T=0, h) > F_1(T=\infty, h)$, $0 < h_1 < h < h_2$. Покажем, что в точке $T = T_1(h)$ функция $F_1(T, h)$ строго больше нуля ($F_1(T = T_1, h) > 0, 0 < h_1 < h < h_2$). Имеем

$$F_1(T = T_1(h), h) = z_1 \left\{ (\lambda_1 \lambda_2)^2 (z_1 + \beta_1 + \beta_2)^2 h^2 - \lambda_1 \lambda_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) [z_1 (z_1 - \beta_1 - \beta_2)(z_2 - \beta_1 - \beta_2) + \right. \\ \left. + z_2 (z_1 + \beta_1 + \beta_2)^2] h + z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2)^3 (z_2 - \beta_1 - \beta_2) \right\}, \quad 0 < h_1 < h < h_2. \quad (17)$$

Функция (17), в частности, достигает нуля в точке $h = h_1$. Тогда при $h > h_1$ имеет место $F_1(T = T_1, h) > 0$. Используя формулы (15), (16), показывается, что $F_1(T, h) > 0, T \geq 0$, для оставшихся вариантов, реализующихся для $x(h) > 0$.

Пусть $x(h) < 0$. Это возможно, если реализуется один из следующих вариантов: $0 < h_1 < h_2 < h \leq 1$; $0 = h_1 < h_2 < h \leq 1$; $h_1 < 0 < h_2 < h \leq 1$; $h_1 < h_2 = 0 < h \leq 1$; $h_1 < h_2 < 0 < h \leq 1$; $h_1 < h_2 < h = 0$; $h_1 < h_2 < h < 0$.

Используя формулы (15)–(17), показывается, что для всех приведенных вариантов функция $F_1(T, h) > 0, T \geq 0, h > h_2$. Лемма 3 доказана.

Перейдем к рассмотрению функции $F_2(T)$, $T \geq 0$, из (12) и определенной в (3).

Лемма 4. 1) Функция $F_2(T) = 0$ ($T \geq 0$), если $x(h) = 0$; 2) функция $F_2(T) < 0$ ($T \geq 0$), если $x(h) > 0$.

Доказательство. Имеем

$$F_2(0) = \lambda_1 \lambda_2 z_2^2 (\beta_1 + \beta_2) (h - h_2) C / A^2, \quad F_2(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_2(T) = \lambda_1 \lambda_2 z_2^2 (h - h_2).$$

Для дальнейшего исследования функции $F_2(T)$ на знак представим ее как функцию, зависящую от параметра h ($F_2(T) = F_2(T, h)$):

$$F_2(T, h) = z_2 [(\beta_1 + \beta_2) z_1 z_2 - z_2 f(T, h) - f'(T, h)], \quad T \geq 0, -1 \leq h \leq 1, \quad (18)$$

где $f(T, h)$, $f'(T, h)$ определены в (14).

Знак функции $F_2(T, h)$ зависит от знака функции $x(h)$, определенной в (13).

Пусть $x(h) = 0$. Это возможно, как следует из (13), если $h = h_1$ либо $h = h_2$. Так как всегда $h > h_1$ (лемма 3), то случай $h = h_1$ исключается. Тогда для случая $h = h_2$, подставляя h_2 в (18), имеем $F_2(T, h = h_2) = 0, T \geq 0$.

Пусть $x(h) > 0$. Неравенство выполняется, если реализуется один из вариантов, приведенных в лемме 3 для $x(h) > 0$.

Рассмотрим вариант $0 < h_1 < h < h_2$. Имеем

$$\frac{\partial F_2(T, h)}{\partial T} = \frac{z_1 z_2^2 (\beta_1 + \beta_2) x(h) e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F^3(T, h)} \left\{ z_1 z_2 (z_2 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_2 + \beta_1 + \beta_2) h e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \right\}, \quad (19)$$

$$T \geq 0, 0 < h_1 < h < h_2.$$

Знак производной (19) определяется знаком функции:

$$y_2(T, h) = z_1 z_2 (z_2 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_2 + \beta_1 + \beta_2) h e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}, \quad T \geq 0, \quad 0 < h_1 < h < h_2. \quad (20)$$

Тогда, поскольку $h > 0$, функция (20) – возрастающая функция переменной T (возрастает от $y_2(T=0, h) = z_1 z_2 (z_2 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_2 + \beta_1 + \beta_2) h$ до $y_2(T=\infty, h) = z_1 z_2 (z_2 - \beta_1 - \beta_2) > 0$). Здесь возможны две ситуации: а) $y_2(T=0, h) < 0$, $0 < h_1 < h < h_2$; б) $y_2(T=0, h) > 0$, $0 < h_1 < h < h_2^*$; $y_2(T=0, h) = 0$, $h = h_2^*$, $y_2(T=0, h) < 0$, $h_2^* < h < h_2$, где $h_2^* = z_1 z_2 (z_2 - \beta_1 - \beta_2) [\lambda_1 \lambda_2 (z_2 + \beta_1 + \beta_2)]^{-1}$.

Рассмотрим ситуацию а). Тогда функция (20) проходит через ноль в точке

$$T_2(h) = -\frac{1}{(\beta_1 + \beta_2)} \ln \frac{z_1 z_2 (z_2 - \beta_1 - \beta_2)}{\lambda_1 \lambda_2 (z_2 + \beta_1 + \beta_2) h}, \quad 0 < h_1 < h < h_2.$$

В силу этого поведение производной $F_2'(T, h)$ (определяемой в (19)) в зависимости от T будет выглядеть следующим образом: $F_2'(T, h) < 0$, $0 \leq T < T_2(h)$; $F_2'(T, h) = 0$, $T = T_2(h)$; $F_2'(T, h) > 0$, $T > T_2(h)$. Таким образом, функция $F_2(T, h)$ в точке $T = T_2(h)$ достигает своего глобального минимума, при этом $F_2(0) = F_2(T=0, h) < 0$, $F_2(\infty) = F_2(T=\infty, h) < 0$, $F_2(T=0, h) < F_2(T=\infty, h)$, $0 < h_1 < h < h_2$. Все это доказывает, что $F_2(T, h) < 0$, $T \geq 0$, для ситуации а). Аналогично доказывается, что для ситуации б) функция $F_2(T, h) < 0$, $T \geq 0$.

Используя формулы (19), (20), показывается, что для оставшихся вариантов, приведенных в лемме 3, $F_2(T, h) < 0$, $T \geq 0$. Лемма 4 доказана.

Для случая $x(h) < 0$ имеет место лемма.

Лемма 5. Функция $F_2(T) > 0$ ($T \geq 0$), если $x(h) < 0$.

Доказательство осуществляется применением формул (19), (20) (аналогично применению этих формул в лемме 4) для вариантов изменения параметра h , приведенных в лемме 3 для случая $x(h) < 0$. Лемма 5 доказана.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(T, h) = F_1(T, h) - F_2(T, h) = (z_2 - z_1) [-z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2) + (z_1 + z_2) f(T, h) + f'(T, h)], \quad T \geq 0, \quad -1 \leq h \leq 1, \quad (21)$$

где $F_1(T, h)$, $f(T, h)$, $f'(T, h)$ определены в (14); $F_2(T, h)$ – в (18).

Лемма 6. Функция $\Phi(T, h) > 0$, $T \geq 0$, если $x(h) \geq 0$.

Доказательство. Имеем

$$\Phi(T=0, h) = (z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2)(C/A)^2 > 0, \quad \Phi(T=\infty, h) = \lim_{T \rightarrow \infty} \Phi(T, h) = (z_2 - z_1)C > 0.$$

Знак функции $\Phi(T, h)$ зависит от знака функции $x(h)$, определенной в (13).

Пусть $x(h) = 0$. Это возможно, как следует из (13), если $h = h_1$ либо $h = h_2$. Так как всегда $h > h_1$ (лемма 3), то случай $h = h_1$ исключается. Тогда для случая $h = h_2$, подставляя h_2 в (21), получаем $\Phi_2(T, h = h_2) = (z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2)z_1^2 > 0$, $T \geq 0$.

Пусть $x(h) > 0$. Неравенство выполняется, если реализуется один из вариантов, приведенных в лемме 3 для $x(h) > 0$.

Рассмотрим вариант $0 < h_1 < h < h_2$. Имеем

$$\begin{aligned} \partial \Phi(T, h) / \partial T = & -(1/F^3(T, h)) z_1 z_2 (z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2) x(h) e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \times \\ & \times \left\{ z_1 z_2 (z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2) h e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \right\}, \quad T \geq 0, \quad 0 < h_1 < h < h_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Знак производной (22) определяется знаком функции:

$$y(T, h) = z_1 z_2 (z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2) h e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}, \quad T \geq 0, \quad 0 < h_1 < h < h_2. \quad (23)$$

Тогда, поскольку $h > 0$, функция (23) – возрастающая функция переменной T (возрастает от $y(T=0, h) = z_1 z_2 (z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2) h$ до $y(T=\infty, h) = z_1 z_2 (z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) > 0$).

Здесь возможны три ситуации: а) $y(T=0, h) > 0$, $0 < h_1 < h < h_2$; б) $y(T=0, h=h_2) = 0$; в) $y(T=0, h) > 0$, $0 < h_1 < h^*$; $y(T=0, h) = 0$, $h = h^*$; $y(T=0, h) < 0$, $h^* < h < h_2$, где $h^* = z_1 z_2 (z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) \times [\lambda_1 \lambda_2 (z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)]^{-1}$.

Рассмотрим ситуацию а). Тогда функция (23) – положительная функция переменной T ($y(T, h) > 0, T \geq 0$). В силу этого производная (22) – отрицательная функция переменной T ($T \geq 0$). Все это означает, что функция (21) убывает от $\Phi(T=0, h) > 0$ до $\Phi(T=\infty, h) > 0$. Отсюда следует, что для ситуации а) функция $\Phi(T, h) > 0, T \geq 0$. Аналогично доказывается, что для ситуаций б), в) функция $\Phi(T, h) > 0, T \geq 0$.

Используя формулы (22), (23), показывается, что для оставшихся вариантов, приведенных в лемме 3 для $x(h) > 0$, функция $\Phi(T, h) > 0, T \geq 0$. Лемма 6 доказана.

Для случая $x(h) < 0$ имеет место лемма.

Лемма 7. Функция $\Phi(T, h) > 0, T \geq 0$, если $x(h) < 0$.

Доказательство осуществляется применением формул (22), (23) (аналогично применению этих формул в лемме 6) для вариантов изменения параметра h , приведенных в лемме 3 для случая $x(h) < 0$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Функции $F_1(T, h)$, $F_2(T, h)$ подчиняются неравенству: $F_1(T, h) > F_2(T, h)$, $T \geq 0$, $-1 \leq h \leq 1$.

Доказательство осуществляется объединением результатов лемм 6, 7. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Уравнение (12) решения не имеет.

Доказательство вытекает из последовательного применения лемм 3–5 и леммы 8. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. Производная $p'(\tau_m)$, определяемая формулой (3), является положительной функцией переменной T ($p'(\tau_m) > 0, 0 \leq T \leq \tau_m, \tau_m \geq 0$).

Доказательство осуществляется применением результатов лемм 1, 2, 9. Лемма 10 доказана.

Теорема 1. Плотность вероятности $p_T(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной T ($0 \leq T \leq \tau_m, \tau_m \geq 0$).

Доказательство осуществляется применением результата леммы 10. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Плотность вероятности $p_T(\tau_m)$ достигает своего глобального максимума в точке $T = \tau_m$ ($0 \leq T \leq \tau_m, \tau_m \geq 0$).

Доказательство вытекает из результата теоремы 1.

Следствие 1. Из теоремы 1 следует, что функции $p_T(\tau^{(j)})$, $j = \overline{1, k}$, из (2) – возрастающие функции переменной T ($0 \leq T \leq \tau_m, \tau_m \geq 0$).

Следствие 2. Из теоремы 2 следует, что функция правдоподобия $L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)})$, определяемая в (2), достигает своего глобального максимума в точке $T = \tau_m$, т.е. решением оптимизационной задачи (2) является оценка длительности мертвого времени $\hat{T} = \tau_m$.

Заключение

Полученный результат делает возможным решение задачи оценки длительности мертвого времени без привлечения численных методов: в процессе наблюдения (в течение временного интервала (t_0, t)) потока событий вычисляются величины τ_k , $k = \overline{1, n}$, после чего находится $\tau_m = \min \tau_k$ ($k = \overline{1, n}$) и полагается $\hat{T} = \tau_m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горцев А.М., Голофастова М.Н. Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 42–53.

2. Сиротина М.Н. Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1 (26). С. 63–74.
3. Gortsev A., Sirotina M. Joint Probability Density Function of Modulated Synchronous Flow Interval Duration // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. 487. P. 145–152.
4. Сиротина М.Н., Горцев А.М. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями в модулированном синхронном потоке при непродлевающемся мертвом времени // Материалы Международной научной конференции, посвящ. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Геннадия Алексеевича Медведева. Минск. 23–26 февраля 2015. Минск : Изд-во РИВШ, 2015. С. 299–304.
5. Дудин А.Н., Клименок В.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
6. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Математическая теория телетрафика и ее применения к анализу мультисервисных сетей связи следующих поколений // Автоматика и вычислительная техника. 2013. № 2. С. 11–21.
7. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No. 4. P. 923–930.
8. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
9. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
10. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communication in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
11. Lucantoni D.M., Neuts, M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communication in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10. P. 575–598.
12. Лившиц К.Н., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1 (10). С. 66–77.
13. Yang Y.W. Woo Shin. BMAP/G/1 queue with correlated arrivals of customers and disasters // Operation Research Letters. 2004. V. 32, Issue 4. P. 364–373.
14. Artalejo Jesus R., Chakravarthy Srinivas R. Computational analysis of the maximal queue length in the MAP/M/c retrieval queue // Applied Mathematics and Computation. 2006. V. 183, Issue 2. P. 1399–1409.
15. Best J. Doubly Stochastic Processes: an Approach for Understanding Central Nervous System Activity // Selected Topics on Applied Mathematics, Circuits, Systems and Signals. WSEAS Press, 2009. P. 155–158.
16. Bushalnov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2008. V. 69, No. 9. P. 1517–1533.
17. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. 2004. № 10. С. 8–16.
18. Василевская Т.П., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо непроявлением событий // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 9. С. 129–138.
19. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 6. С. 232–239.
20. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 24–29.
21. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного альтернирующего пуассоновского потока событий методом моментов // Радиотехника. 1995. № 7–8. С. 6–10.
22. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
23. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
24. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного синхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
25. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, No. 3. P. 283–290.
26. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров асинхронного потока с иницированием лишних событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 18. С. 267–273.
27. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Шевченко Т.И. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Известия высших учебных заведений. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.
28. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой рос. конф. с междунар. участием (9–13 июня 2014 г.). Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. С. 96–97.

29. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2 (11). С. 66–81.
30. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
31. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
32. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 18–23.
33. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
34. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-поток и MAP-поток событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1 (14). С. 13–21.
35. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Died Time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
36. Горцев А.М., Шмырин И.С. Оптимальная оценка состояний дважды стохастического потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 52–66.
37. Горцев А.М., Леонова М.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1 (10). С. 33–47.
38. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2 (11). С. 44–65.
39. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 254 с.
40. Горцев А.М., Васильева Л.А. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 179–184.
41. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10, № 3. С. 273–280.
42. Горцев А.М., Климов И.С. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий в условиях частичной его ненаблюдаемости // Радиотехника. 1991. № 12. С. 3–7.
43. Горцев А.М., Паршина М.Е. Оценивание параметров альтернирующего потока событий в условиях «мертвого времени» // Изв. вузов. Физика. 1999. № 4. С. 8–13.
44. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Изв. вузов. Физика. 2005. № 10. С. 35–40.
45. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишнего события // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 137–145.
46. Горцев А.М., Климов И.С. Оценивание периода ненаблюдаемости и интенсивности пуассоновского потока событий // Радиотехника. 1996. № 2. С. 8–11.
47. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika). 1996. V. 50, No. 1. P. 56–63.
48. Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний синхронного МС-поток событий // Избранные доклады международной конференции «Всесибирские чтения по математике и механике». Томск : Изд-во Том. гос. ун-та, 1997. Т. 1. С. 97–102.
49. Bushlanov I.V., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events // Automation and Remote Control. 2004. V. 65, No. 9. P. 1389–1399.
50. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow // Radiotekhnika. 2004. No. 10. P. 8–16.
51. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Синхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы международной конференции. Минск : Изд-во БГУ, 2005. С. 60–69.
52. Бушланов И.В., Горцев А.М. Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2004. № 9. С. 40–51.
53. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 27–37.
54. Горцев А.М., Соловьев А.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов потока физических событий при непродлеваемом мертвом времени // Известия высших учебных заведений. Физика. 2014. Т. 57, № 7. С. 103–111.
55. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.

56. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3 (32). С. 23–32.
57. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
58. Горцев А.М., Соловьев А.А. Оценка максимального правдоподобия длительности непродлевающегося мертвого времени в потоке физических событий // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58, № 11. С. 141–149.
59. Горцев А.М., Соловьев А.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности непродлевающегося мертвого времени в МАР-потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 4 (33). С. 13–22.

Сиротина Мария Николаевна. E-mail: mashuliagol@mail.ru

Горцев Александр Михайлович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: gam@fpmk.tsu.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 12 ноября 2015 г.

Sirotina Maria N., Gortsev Alexander M. (Tomsk State University, Russian Federation).

Maximum likelihood estimator of dead time duration in modulated synchronous twice stochastic flow of events.

Keywords: modulated synchronous flow; dead time; the likelihood function; the maximum likelihood function estimation; dead time duration.

DOI: 10.17223/19988605/34/6

Consider the modulated synchronous twice stochastic flow of events, which rate is piecewise constant random process $\lambda(t)$ with two states: λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). The time when process $\lambda(t)$ is staying in the i -th state has exponential probability density function with a parameter $\alpha_i, i = 1, 2$. During the time random interval when $\lambda(t) = \lambda_i$ there is a Poisson flow with the rate $\lambda_i, i = 1, 2$. A state transition of process $\lambda(t)$ occurs at the moment of arrival of a Poisson flow event, moreover, the passing from the first to the second state is realized with probability p , the passing from the second to the first state is realized with probability q .

The flow functions in conditions of dead time, which is one of the falsifying factors of the state and the parameter estimation of the flow. After each registered event there is some time of fixed duration T (dead time), during which another flow events is inaccessible for observation. Consider non-extendable dead time. Such time is all events, which happen during the dead time interval without its prolongation. When the duration of the dead time period finishes, the first happened event creates the dead time period of duration T again, and etc. Note that for the flow, which functions in dead time conditions, events are observable if they did not get into the dead time interval. For the flow, which functions in dead time absence, all events are observable.

One of confounding factor by the flow state and parameter estimation is the dead time of recording device, which is generated by the observable flow of events. All other events occurred during the dead time interval are not accessible for observation.

The main purpose of this paper is to estimate the dead time T . On the base of the maximum likelihood function method, the solution of the problem is obtained. It is shown that the likelihood function $L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)})$ reaches its maximum at the point $\hat{T} = \tau_m = \min \tau_k (k = \overline{1, n})$. So, the solution of optimization problem is the dead time estimator $\hat{T} = \tau_m$.

REFERENCES

1. Gortsev, A.M. & Golofastova, M.N. (2013) Optimal state estimation of modulated synchronous twice-stochastic flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 42–53. (In Russian).
2. Sirotina, M.N. (2014) Optimal state estimation of modulated synchronous twice-stochastic flow of events in conditions of fixed dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(26). pp. 63–74. (In Russian).
3. Gortsev, A. & Sirotina, M. (2014) Joint Probability Density Function of Modulated Synchronous Flow Interval Duration. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 145–152. (In Russian). DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_17
4. Sirotina, M.N. & Gortsev, A.M. (2015) [Probability density function of interval duration between two adjacent events of modulated synchronous flow in conditions of fixed dead time]. *Proceedings International Scientific Conference devoted to the 80th anniversary of Prof. G.A. Medvedev*. Belorussia, 23–26 February, 2015. Minsk: RIVSH. pp. 299–304.
5. Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BSU.
6. Basharin, G.P., Gajdamaka, U.V. & Samyjlov, K.E. (2013) Mathematical theory of teletraffic and its applications to analysis of multi-service network systems of the nextages. *Automation and computation*. 2. pp. 11–21.
7. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930.
8. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi [About the method of renewal of subnetwork computation]. *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika*. 6. pp. 92–99.
9. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143

10. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1-46. DOI: 10.1080/15326349108807174
11. Lucantoni, D.M. & Neuts, M.F. (1994) Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 10. pp. 575-598. DOI: 10.1080/15326349408807311
12. Livshits, K.N. & Bublik, Ya.S. (2010) The probability of insurance company collapse with twice stochastic flow of insurance payouts. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 66-77. (In Russian).
13. YangWoo Shin, Y.W. (2004). BMAP/G/1 queue with correlated arrivals of customers and disasters. *Operation Research Letters*. 32(4). pp. 364-373. DOI: 10.1016/j.orl.2003.09.005
14. Artalejo, J.R. & Chakravarthy, S.R. (2006) Computational analysis of the maximal queue length in the MAP/M/c retrival queue. *Applied Mathematics and Computation*. 183(2). pp. 1399-1409.
15. Best, J. (2009) Doubly Stochastic Processes: an Approach for Understanding Central Nervous System Activity. In: Pardalos, P. et al. (eds) *Selected Topics on Applied Mathematics, Circuits, Systems and Signals*. WSEAS Press. pp. 155-158.
16. Bushalnov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 69(9). pp. 1517-1533. DOI: 10.1134/S0005117908090075
17. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radioengineering*. 10. pp. 8-16.
18. Vasilevskaya, T.P., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka s proyavleniem libo neproyavleniem sobytiy [Dead time and parameters estimation of synchronous alternating flow with or without event manifestation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 9. pp. 129-138.
19. Gortsev, A.M. & Nezhel'skaya, L.A. (2003) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy [Dead time period and parameter estimation of synchronous alternating flow of events]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 6. pp. 232-239.
20. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Parameter estimation of synchronous twice-stochastic flow of events using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. pp. 24-29.
21. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (1995) Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments. *Radiotechnics*. 7-8. pp. 6-10.
22. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54-63. (In Russian).
23. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) Joint probability density function of interval duration of generic asynchronous event flow in conditions of fixed dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(21). pp. 14-25. (In Russian).
24. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) Error probability of state estimation of generic synchronous flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88-101. (In Russian).
25. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21(3). pp. 283-290. DOI: 10.4213/dm1141.
26. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2006) Otsenivanie parametrov asinkhronnogo potoka s initsirovaniem lishnikh sobytiy metodom momentov [Parameter estimation of asynchronous flow with additional event initiation using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 18. pp. 267-273.
27. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal*. 36(12). pp. 1153-1167.
28. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) [Dead time period estimation of generic semi-synchronous flow of events]. *Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur* [New information technologies in complex structure investigation]. *Proceedings of 10th Russian conference with international participation* (9-13 of June, 2014). Tomsk: Tomsk State University. pp. 96-97.
29. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2010) Optimal state estimation of generic semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 66-81. (In Russian).
30. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semi-synchronous twice-stochastic event flow in conditions of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(1). pp. 31-41. (In Russian).
31. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
32. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Parameter estimation of semi-synchronous twice-stochastic event flow using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. pp. 18-23.
33. Nezhelskaya, L.A. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobytiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyudaemosti [Optimal state estimation of semi-synchronous flow in conditions of its incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95-98.

34. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) About connectivity of MC-flows and MAP-flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 13-21. (In Russian).
35. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Solovov, A.A. (2012) Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. *Automation and Remote Control*. 73(8). pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
36. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999) Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events under conditions of time moments measurement errors. *Automation and Remote Control*. 60(1). pp. 41-51.
37. Gortsev, A.M. & Leonova, M.A. (2010) Optimal state estimation of generic asynchronous doubly stochastic flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 33-47. (In Russian).
38. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal state estimation of generic asynchronous doubly stochastic flow with random number of states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 44-65. (In Russian).
39. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [Statistical analysis of stochastic flows in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
40. Gortsev, A.M. & Vasileva, L.A. (2002) Parameter estimation of a doubly stochastic flow of events under incomplete observability. *Avtomatika i Telemekhanika*. 3. pp. 179-184.
41. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (1997) Otsenka parametrov al'terniruyushchego potoka sobytiy pri uslovii ego chastichnoy nablyudaemosti [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of particulate observability]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 10(3). pp. 273-280.
42. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) An estimate for intensity of Poisson flow of events under the condition of its partial missing. *Radiotekhnika*. 12. pp. 3-7.
43. Gortsev, A.M. & Parshina, M.E. (1999) Otsenivanie parametrov al'terniruyushchego potoka sobytiy v usloviyakh "mertvogo vremeni" [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of dead time]. *Russian Physics Journal*. 4. pp. 8-13.
44. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2005) Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal*. 48(10). pp. 1039-1054. DOI: 10.1007/s11182-006-0023-y.
45. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) Dead time and parameter estimation of asynchronous alternating flow with additional event initiation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 284. pp. 137-145. (In Russian).
46. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1996) Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow. *Radiotekhnika*. 2. pp. 8-11.
47. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (1996) Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method. *Telecommunications and Radio Engineering*. 50(1). pp. 56-63.
48. Nezhelskaya, L.A. (1997) [Optimal state estimation of synchronous MC-flow of events]. *Vsesibirskie chteniya po matematike i mekhanike* [Siberian readings on mathematics and mechanics]. Proc. of the International Conference. Vol. 1. Tomsk: Tomsk state University. pp. 97-102.
49. Bushlanov, I.V. & Gortsev, A.M. (2004) Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 65(9). pp. 1389-1399. DOI: 10.1023/B:AURC.0000041418.09187.63
50. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotekhnika*. 10. pp. 8-16.
51. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2005) [Synchronous twice-stochastic flow of events in conditions of fixed dead time]. *Teoriya veroyatnostey, sluchaynye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya* [Probability theory, stochastic processes, mathematic statistics and applications]. Proc. of the International Conference. Minsk: BSU. pp. 60-69. (In Russian).
52. Bushlanov, I.V. & Gortsev, A.M. (2004) Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 65(9). pp. 1389-1399. DOI: 10.1023/B:AURC.0000041418.09187.63
53. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time of generic semichronous flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27-37. (In Russian).
54. Gortsev, A.M. & Solovyov, A.A. (2014) Joint Probability Density of Interarrival Interval of a Flow of Physical Events with Unextendable Dead Time Period. *Russian Physics Journal*. 57(7). pp. 973-983. DOI: 10.1007/s11182-014-0333-4
55. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Comparison of MP- and MM-estimations of dead time in generic asynchronous flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32-42. (In Russian).
56. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Comparison of MP- and MM-estimations of dead time in generic semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(32). pp. 23-32. (In Russian).
57. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time in generic asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54-63. (In Russian).
58. Gortsev, A.M. & Solovyov, A.A. (2015) Maximum likelihood estimation of fixed dead time in physical flow of events. *Russian Physics Journal*. 58(11). pp. 141-149.
59. Gortsev, A.M. & Solovyov, A.A. (2015) Comparison of MP- and MM-estimations of fixed dead time in MAP-flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(33). pp. 13-22. (In Russian).