ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2016 Математика и механика № 2(40)

УДК 512.543
DOI 10.17223/19988621/40/4

А.В. Розов

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ π-ГРУППАМИ НЕКОТОРЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ[1]

Пусть π – некоторое множество простых чисел, G – свободное произведение групп A и B с собственными нормальными объединенными подгруппами H и K. И пусть A – нильпотентная группа конечного ранга, а H содержится в ее центре. Доказано, что группа G аппроксимируема конечными π-группами тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/K аппроксимируемы конечными π-группами.

Ключевые слова: *нильпотентная группа конечного ранга*, *центр группы*, *обобщенное свободное произведение групп*, *аппроксимируемость конечными π-группами.*

1. Введение

Пусть π – некоторое множество простых чисел, F_π – класс всех конечных π-групп. Напомним, что конечная группа называется π-группой, если все простые делители ее порядка принадлежат множеству π. Группа G называется аппроксимируемой конечными π-группами (или, короче, F_π-аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную π-группу, при котором образ элемента x отличен от единицы. В случае, когда множество π состоит из одного простого числа p, говорят об F_π-аппроксимируемости.

Перейдем теперь к свободным произведениям групп с объединенными подгруппами. Пусть A и B – произвольные группы, H и K – подгруппы групп A и B соответственно, φ – изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$$

– свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Напомним, что группа G порождается всеми порождающими групп A и B и определяется всеми определяющими соотношениями этих групп, а также соотношениями вида $h\varphi = h$, где $h \in H$.

Очевидным необходимым условием F_π-аппроксимируемости группы G является F_π-аппроксимируемость групп A и B. Несложные примеры показывают, что это условие не является достаточным. Для изучения F_π-аппроксимируемости группы G будем накладывать на группы A и B и подгруппы H и K некоторые дополнительные ограничения.

Далее будем требовать, чтобы подгруппы H и K содержались в центрах групп A и B соответственно. При таком ограничении может быть доказано, что если A и B – конечные π-группы, то группа G F_π-аппроксимируема (см. доказанное ниже

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках выполнения НИР по государственному заданию.

предложение 3). Аналогичный результат может быть получен, если ослабить требование конечности групп A и B до требования конечности объединенных подгрупп H и K: свободное произведение двух F_π-аппроксимируемых групп с конечными центральными объединенными подгруппами является F_π-аппроксимируеой группой (см. предложение 4). Группа G оказывается F_π-аппроксимируемой и в том случае, когда группы A и B F_π-аппроксимируемы, а фактор-группы A/H и B/K являются конечными π-группами (см. предложение 5).

Заметим, что в последнем утверждении требование конечности фактор-групп A/H и B/K не может быть заменено на более слабое требование F_π-аппроксимируемости этих фактор-групп. Соответствующий пример будет приведен в четвертом разделе данной статьи. Тем не менее в случае, когда A – нильпотентная группа конечного ранга, имеет место следующий критерий.

Теорема 1. Пусть G – свободное произведение групп A и B с нормальными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B. И пусть A – нильпотентная группа конечного ранга, а H содержится в ее центре. Тогда группа G F_π-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/K F_π-аппроксимируемы.

Напомним, что группа G называется группой конечного ранга, если существует целое положительное число r, такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами.

Заметим, что необходимость в теореме 1 имеет место и без предположения о том, что A – нильпотентная группа конечного ранга (см. ее доказательство). Заметим еще, что теорема 1 обобщает аналогичный критерий F_π-аппроксимируемости группы G, полученный автором работы [1], в котором наряду с требованиями конечности ранга группы A, ее нильпотентности и центральности подгруппы H в группе A накладываются такие же требования на группу B и на ее подгруппу K. Кроме того, частным случаем теоремы 1 является один из результатов работы [2, теор. 4], доказанный для случая, когда A – конечно порожденная нильпотентная группа.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

2. Вспомогательные утверждения

Предложение 1. Пусть G – нильпотентная группа конечного ранга. Если группа G является расширением конечной π-группы с помощью F_π-аппроксимируемой группы, то группа G F_π-аппроксимируема.

Это утверждение было доказано автором в [1].

Пусть G – свободное произведение групп A и B с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами H и K. Хорошо известно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. Поэтому можно считать, что A и B – подгруппы группы G. Тогда $A \cap B = H = K$. Далее в некоторых случаях для группы G будем использовать более компактное обозначение $G = (A * B; H)$ и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H.

Предложение 2. Пусть $G = (A * B; H)$, M и N – нормальные подгруппы групп A и B соответственно, такие, что $M \cap H = N \cap H$. Тогда естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$ могут быть продолжены до гомоморфизма ρ_{MN} группы G на свободное произведение G_{MN} групп A/M и B/N с объединенной подгруппой $H_{MN} = HM/M = HN/N$.

Это утверждение хорошо известно и легко проверяется (см. [3]).

Напомним, что группа G называется расщепляемым расширением группы A с помощью группы B, если A – нормальная подгруппа группы G, B – подгруппа группы G, $A \cap B = 1$ и $G = AB$. Очевидно, что $G / A \cong B$ и $[G : B] = |A|$.

Предложение 3. Пусть G – свободное произведение конечных π-групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. Если H центральна в A, то группа G F_π-аппроксимируема.

Доказательство. Заметим, что фактор-группа G/H F_π-аппроксимируема, поскольку представляет из себя свободное произведение конечных π-групп A/H и B/H. Обозначим через D/H ее декартову подгруппу, т. е. ядро гомоморфизма группы G/H на прямое произведение групп A/H и B/H, продолжающего тождественные отображения $A/H \to A/H$ и $B/H \to B/H$. По хорошо известной теореме Куроша о подгруппах свободных произведений групп (см., напр., [4, с. 253]) подгруппа D/H свободна. Кроме того, D/H нормальна в группе G/H и имеет в ней конечный π-индекс. Поэтому подгруппа D нормальна в группе G, имеет в ней конечный π-индекс и представляет из себя расширение группы H с помощью свободной группы. Хорошо известно, что такое расширение расщепляемо. Таким образом, D – расщепляемое расширение конечной π-группы H с помощью некоторой свободной группы F, изоморфной D/H. Покажем, что группа D F_π-аппроксимируема.

Пусть ρ – гомоморфизм группы G в группу автоморфизмов группы H, сопоставляющий каждому элементу x из G ограничение на H внутреннего автоморфизма группы G, производимого элементом x. Так как H лежит в центре группы A, то $A\rho = 1$. Отсюда и из того, что G порождается подгруппами A и B следует, что $G\rho = B\rho$ и, следовательно, $G\rho$ – конечная π-группа. Обозначим через N ядро гомоморфизма ρ. Тогда $F \cap N$ – нормальная подгруппа группы F и $F / F \cap N \cong FN / N \leq G / N \cong G\rho$. Отсюда и из того, что $G\rho$ – конечная π-группа, следует, что $[F : F \cap N]$ – π-число. С другой стороны, так как D – расщепляемое расширение группы H с помощью группы F, то $[D : F] = |H|$, и поэтому $[D : F]$ – π-число. Следовательно, $[D : F \cap N]$ – π-число. Так как $D = HF$, $F \cap N$ – нормальная подгруппа группы F и $F \cap N$ поэлементно перестановочна с H, то $F \cap N$ – нормальная подгруппа группы D. Таким образом, D содержит свободную нормальную подгруппу $F \cap N$ конечного π-индекса. Поэтому группа D F_π-аппроксимируема. При этом D является нормальной подгруппой конечного π-индекса группы G. Поэтому группа G также F_π-аппроксимируема. Предложение доказано.

Напомним, что подгруппа H группы G называется F_π-отделимой, если для каждого элемента x группы G, не принадлежащего H, существует гомоморфизм φ группы G на конечную π-группу, такой, что $x\varphi \notin H\varphi$. Хорошо известно, что в случае, когда H нормальна в G, ее F_π-отделимость равносильна F_π-аппроксимируемости группы G/H.

Предложение 4. Пусть G – свободное произведение F_π-аппроксимируемых групп A и B с конечной нормальной объединенной подгруппой H. Если H центральна в A, то группа G F_π-аппроксимируема.

Доказательство. Для доказательства F_π-аппроксимируемости группы G достаточно для каждого ее неединичного элемента g указать гомоморфизм группы G на F_π-аппроксимируемую группу, образ g относительно которого отличен от 1.

Рассмотрим сначала случай, когда $g \notin H$. Покажем, что подгруппа H F_π-отделима в группе A. Пусть $a \in A \setminus H$. Так как группа A F_π-аппроксимируема, то для каждого элемента $h \in H$ существует гомоморфизм φ_h группы A на конечную π-группу такой, что $a\varphi_h \neq h\varphi_h$. Так как подгруппа H конечна, то группа $P = A / \bigcap_{h \in H} \operatorname{Ker} \varphi_h$ является конечной π-группой. Если теперь через δ обозначить естественный гомоморфизм $A \to P$, то $a\delta \notin H\delta$. Таким образом, подгруппа H группы A F_π-отделима, и поэтому фактор-группа A/H F_π-аппроксимируема. То же самое можно сказать и о группе B/H. Следовательно, группа G/H, изоморфная свободному произведению групп A/H и B/H, также F_π-аппроксимируема. Так как образ элемента g относительно естественного гомоморфизма ε: $G \to G/H$ отличен от 1, то этот гомоморфизм является искомым.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in H$. Так как H – конечная подгруппа F_π-аппроксимируемой группы A, то в A существует нормальная подгруппа M конечного π-индекса, такая, что $M \cap H = 1$. Аналогично, в B существует нормальная подгруппа N конечного π-индекса такая, что $N \cap H = 1$. Поэтому в силу предложения 2 можно рассмотреть группу $G_{MN} = (A/M * B/N; H_{MN})$ и гомоморфизм ρ_{MN}: $G \to G_{MN}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$. Заметим, что G_{MN} F_π-аппроксимируема по предложению 3, и поэтому в качестве искомого гомоморфизма может быть взят ρ_{MN}. Предложение доказано.

Предложение 5. Пусть G – свободное произведение F_π-аппроксимируемых групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, причем H имеет конечный π-индекс в A и B. Если H центральна в A, то группа G F_π-аппроксимируема.

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущего предложения, укажем для каждого неединичного элемента g из G гомоморфизм группы G на F_π-аппроксимируемую группу, образ g относительно которого будет отличен от 1.

Если $g \notin H$, то искомым, очевидно, снова будет естественный гомоморфизм ε: $G \to G/H$.

Рассмотрим случай, когда $g \in H$. Так как B F_π-аппроксимируема, то существует нормальная подгруппа M конечного π-индекса группы B, не содержащая элемент g. Тогда подгруппа $N = M \cap H$ является нормальной подгруппой группы B и центральной подгруппой группы A, причем ее индекс в группе H, а значит, и в группах A и B является π-числом. Таким образом, можно рассмотреть естественный гомоморфизм ε: $G \to G/N$, где G/N – свободное произведение конечных π-групп A/N и B/N с нормальной объединенной подгруппой H/N, содержащейся в центре A/N. Поскольку группа G/N F_π-аппроксимируема в силу предложения 3, то ε – искомый гомоморфизм. Предложение доказано.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G – свободное произведение F_π-аппроксимируемых групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. И пусть A – нильпотентная группа конечного ранга, а H содержится в ее центре. Докажем, что группа G F_π-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H F_π-аппроксимируемы.

Пусть группы A, B, A/H и B/H F_π-аппроксимируемы. Докажем, что группа G F_π-аппроксимируема. Для этого достаточно для каждого неединичного элемента g

из G указать гомоморфизм группы G на F_π-аппроксимируемую группу, при котором образ g будет отличен от 1.

Рассмотрим сначала случай, когда $g \notin H$. Поскольку группа $G/H = A/H * B/H$ F_π-аппроксимируема, то естественный гомоморфизм ε: $G \to G/H$ будет искомым.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in H$. Так как группа B F_π-аппроксимируема, то в ней существует нормальная подгруппа N конечного π-индекса, не содержащая g. Обозначим через S подгруппу $N \cap H$ группы A. Тогда S, как и H, центральна в A, а ее индекс в группе H, очевидно, является π-числом. Рассмотрим фактор-группу A/S. Так как она является расширением конечной π-группы H/S с помощью F_π-аппроксимируемой группы A/H, то в силу предложения 1 она сама F_π-аппроксимируема. Отсюда следует, что в A/S существует нормальная подгруппа M/S конечного π-индекса, тривиально пересекающаяся с H/S. Заметим, что M – нормальная подгруппа конечного π-индекса группы A, и $M \cap H = S$.

Используя предложение 2, построим теперь группу $G_{MN} = (A/M * B/N, H_{MN})$ и гомоморфизм ρ_{MN}: $G \to G_{MN}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$. Заметим, что группа G_{MN} является свободным произведением конечных π-групп A/M и B/N с нормальной объединенной подгруппой H_{MN}, причем H_{MN} центральна в A/M. Поэтому в силу предложения 3 G_{MN} F_π-аппроксимируема. Остается отметить, что $g\rho_{MN} \neq 1$, поскольку $g \notin N$, и что ρ_{MN} – искомый гомоморфизм.

Докажем теперь необходимость в теореме 1. Пусть группа G F_π-аппроксимируема. Покажем, что группы A/H и B/H F_π-аппроксимируемы. Для этого достаточно доказать F_π-отделимость подгруппы H в группах A и B.

Предположим, что подгруппа H не является F_π-отделимой в группе A. Тогда в группе A существует элемент a, не принадлежащий H и такой, что для каждого гомоморфизма φ группы A на конечную π-группу $a\varphi \in H\varphi$. Зафиксируем элемент b группы B, не принадлежащий H, и рассмотрим коммутатор c элементов a и $b^{-1}ab$, т. е. элемент вида

$$c = [a, b^{-1}ab] = a^{-1}b^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab.$$

Элемент c имеет в группе G несократимую запись длины 8, и поэтому отличен от 1. Отсюда и из того, что G F_π-аппроксимируема, следует, что существует гомоморфизм ψ группы G на конечную π-группу, такой, что $c\psi \neq 1$. Из сделанного выше предположения заключаем, что $a\psi \in H\psi$, т. е. $a\psi = h\psi$ для некоторого элемента h группы H. Заметим, что группа H абелева, так как она центральна в группе A. Отсюда и из нормальности подгруппы H в группе B получаем

$$c\psi = [a, b^{-1}ab]\psi = [h, b^{-1}hb]\psi = 1\psi = 1.$$

Однако раньше было сказано, что $c\psi \neq 1$. Таким образом, подгруппа H F_π-отделима в группе A. Аналогично может быть доказана F_π-отделимость подгруппы H в группе B. Теорема доказана.

4. О существенности требования конечности ранга в теореме 1

Покажем, что свободное произведение G F_π-аппроксимируемых групп A и B с собственными центральными объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами H и K не обязано быть F_π-аппроксимируемой группой при условии, что фактор-группы A/H и B/K F_π-аппроксимируемы.

Пусть p и q – различные простые числа. Рассмотрим абелевы группы

$$A = \langle a_i \ (i \in \mathrm{N});\ a_i a_l = a_l a_i,\ a_i^{p^i} = a_l^{p^l} \ (i, l \in \mathrm{N}) \rangle$$

и
$$B = \langle b_j \ (j \in \mathbf{N});\ b_j b_l = b_l b_j,\ b_j^{q^j} = b_l^{q^l} \ (j, l \in \mathbf{N}) \rangle .$$

Обозначим через h элемент группы A, совпадающий со всеми $a_i^{p^i}$, а через k – элемент группы B, совпадающий со всеми $b_j^{q^j}$. Тогда для любых неотрицательных целых m и n уравнения

$$x^{p^m} = h \quad \text{и} \quad y^{q^n} = k \tag{1}$$

разрешимы в группах A и B соответственно.

Рассмотрим циклические подгруппы $H = (h)$ и $K = (k)$ групп A и B и группу

$$G = (A * B;\ H = K,\ \varphi),$$

где $\varphi \colon H \to K$ – изоморфизм, продолжающий отображение $h \mapsto k$. Пусть $\pi = \{p, q\}$. Покажем, что группы A, B, A/H и B/K F_π-аппроксимируемы, а группа G – нет.

Очевидно, что фактор-группа A/H имеет представление

$$A / H = \langle a_i \ (i \in \mathbf{N});\ a_i a_l = a_l a_i,\ a_i^{p^i} = 1 \ (i, l \in \mathbf{N}) \rangle , \tag{2}$$

и поэтому может быть представлена как прямое произведение счетного числа циклических p-групп. Легко понять, что такое прямое произведение F_p-аппроксимируемо, и поэтому F_π-аппроксимируемо. Аналогично устанавливается, что группа B/K F_q-аппроксимируема, и поэтому F_π-аппроксимируема.

Покажем теперь, что группа A F_π-аппроксимируема. Для этого укажем для каждого неединичного элемента a из A гомоморфизм группы A на конечную π-группу, переводящий a в неединичный элемент.

Рассмотрим сначала случай, когда $a \notin H$. Пусть $\varepsilon \colon A \to A/H$ – естественный гомоморфизм. Тогда $a\varepsilon \neq 1$, и поскольку A/H F_p-аппроксимируема, то существует гомоморфизм ψ группы A/H на конечную p-группу такой, что $a\varepsilon\psi \neq 1$. При этом $\varepsilon\psi$ – искомый гомоморфизм.

Теперь рассмотрим случай, когда $a \in H$. Так как H – бесконечная циклическая группа, то существует целое положительное число r такое, что a не принадлежит подгруппе $L = H^{q^r}$ группы H. Очевидно, что H/L – конечная q-группа. Кроме того, группа A/L периодическая, так как она является расширением конечной группы H/L с помощью периодической группы A/H. Заметим, что H/L совпадает с q-компонентой группы A/L. Действительно, пусть xL – q-элемент группы A/L. Тогда xH – q-элемент группы A/H. Отсюда и из того, что A/H – p-группа (см. (2)), а простые числа p и q различны, следует, что $x \in H$, и поэтому $xL \in H / L$.

Хорошо известно, что любая периодическая абелева группа раскладывается в прямое произведение своих примарных компонент. Поэтому H/L выделяется в A/L прямым множителем, т. е.

$$A/L = H/L \times X/L.$$

Рассмотрим проекцию $\sigma \colon A/L \to H/L$. Так как aL – неединичный элемент группы H/L, то $(aL)\sigma \neq 1$. И если $\varepsilon \colon A \to A/L$ – естественный гомоморфизм, то гомоморфизм $\varepsilon\sigma$ является искомым гомоморфизмом.

Таким образом, группа A F_π-аппроксимируема. Аналогично может быть доказана F_π-аппроксимируемость группы B.

Покажем теперь, что группа G не F_π-аппроксимируема. Пусть ψ – гомоморфизм группы G на конечную π-группу P и пусть s – порядок группы P. Тогда s можно записать в виде

$$s = p^m \cdot q^n,$$

где m и n – целые неотрицательные числа. Так как в группе G выполняется равенство $h = k$ и разрешимы уравнения (1), то $a^{p^m} = h = b^{q^n}$ для подходящих элементов a и b группы G. Поэтому

$$(h\psi)^{p^m} = (b^{q^n}\psi)^{p^m} = (b\psi)^s = 1$$

и

$$(h\psi)^{q^n} = (a^{p^m}\psi)^{q^n} = (a\psi)^s = 1.$$

Отсюда и из того, что p и q взаимно просты, следует, что $h\psi = 1$. Поэтому группа G не является F_π-аппроксимируемой.

Автор выражает благодарность Д. Н. Азарову за помощь при написании данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розов А.В.* Об аппроксимируемости конечными π-группами свободных произведений нильпотентных групп конечного ранга с центральными объединенными подгруппами // Ярославский пед. вестн. Т. 3. Естественные науки. 2013. № 2. С. 7–13.
2. *Tumanova E.A.* On the residual π-finiteness of generalized free products of groups // Math. Notes. 2014. V. 95. No. 4. P. 544–551.
3. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.
4. *Магнус В.*, *Каррас А.*, *Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 456 с.

Статья поступила 12.02.2016 г.

Rozov A.V. ON THE RESIDUAL π-FINITENESS OF SOME FREE PRODUCTS OF GROUPS WITH CENTRAL AMALGAMATED SUBGROUPS

DOI 10.17223/19988621/40/4

Let π be a set of primes. A criterion of residual π-finiteness for free products of two groups with central amalgamated subgroups has been obtained for the case where one factor is a nilpotent finite rank group. Recall that a group G is said to be a residually finite π-group if for every non-identity element x of G there exists a homomorphism of the group G onto some finite π-group such that the image of the element x differs from 1. A group G is said to be a finite rank group if there exists a positive integer r such that every finitely generated subgroup of group G is generated by at most r elements. Let G be a free product of groups A and B with normal amalgamated subgroups H and K. Let also A and B be residually finite π-groups and H be a central subgroup of the group A. If H and K are finite, then G is a residually finite π-group. The same holds if the groups A/H and B/K are finite π-groups. However, G is not obligatorily a residually finite π-group if we replace the requirement of finiteness of the groups A/H and B/K by a weaker requirement of A/H and B/K to be residually finite π-groups. A corresponding example is provided in the article. Nevertheless, we prove that if A is a nilpotent finite rank group, then G is a residually finite π-group if and only if A/H and B/K are residually finite π-groups.

Keywords: nilpotent finite rank group, group center, generalized free product of groups, residually finite π-group.

ROZOV Alexei Vyacheslavovich (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation)

E-mail: post-box023@mail.ru

REFERENCES

1. Rozov A.V. (2013) Ob approksimiruemosti konechnymi π-gruppami svobodnykh proizvedeniy nil'potentnykhgrupp konechnogo ranga s tsentral'nymi ob"edinennymi podgruppami [On the residual π -finiteness of free products of nilpotent finite rank groups with central amalgamated subgroups]. *Yaroslavskiy ped. vestn. Tom 3. Estestvennye nauki – Yaroslavl Pedagogical Bulletin. Vol. 3. Natural Sciences.* 2. pp. 7–13.
2. Tumanova E.A. (2014) On the residual π-finiteness of generalized free products of groups. *Math. Notes*. 95(4). pp. 544–551. DOI: 10.1134/S0001434614030262.
3. Baumslag G. (1963) On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups. *Trans. Amer. Math. Soc*. 106. pp. 193–209.
4. Magnus W., Karrass A., and Solitar D. (1966) *Combinatorial Group Theory*. New York: Wiley.