

## МЕХАНИКА

УДК 539.374

DOI 10.17223/19988621/40/5

Д.В. Гоцев, Н.С. Перунов

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ  
В ПОРИСТОМ СФЕРИЧЕСКОМ ТЕЛЕ  
С УЧЕТОМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ**

Построена математическая модель, описывающая напряженно-деформированное состояние сферического тела, находящегося под действием всестороннего сжатия. При этом в качестве модели материала выбиралась пористая среда, сжатый скелет которой обладает упрочняющимися упругопластическими свойствами. Деформирование пористой среды под действием заданных равномерно распределенных сжимающих нагрузок разделяется на два этапа: упругое деформирование пористой среды и дальнейшее упругопластическое деформирование полностью сжатой матрицы. Получены аналитические соотношения, определяющие поля напряжений и перемещений на каждом этапе деформирования. Дана оценка влияния на величину упругопластической границы начальной пористости и других констант материала.

**Ключевые слова:** пористые материалы при неупругой работе сжатого скелета, сферическое тело при сжатии, напряженно-деформированное состояние.

В качестве модели пористого тела, учитывающей неупругую работу сжатого скелета, будем использовать модель, рассмотренную в работе [1]. Деформирование пористого материала с начальным раствором пор –  $\varepsilon_0$  разделим на два этапа. При этом, в отличие от [2], за первый этап примем упругое деформирование сжимаемой пористой среды под действием нагрузок, которые подлежат дальнейшему определению и представляют собой нагрузки, при которых происходит полное сжатие пор.

Второй этап – неупругое деформирование сжатого скелета под действием исходных нагрузок за вычетом из них той их части, которая пошла на полное сжатие пор.

Напряженно-деформированное состояние (НДС), полученное на первом этапе, предполагается начальным состоянием тела для второго этапа деформирования. Итоговое НДС получается путем сложения решений, полученных на каждом из этапов по следующим формулам для перемещений, деформаций и напряжений соответственно:

$$u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}; \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} + \varepsilon_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)}; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}, \quad (1)$$

где величины с индексом (1) относятся к первому этапу, с индексом (2) – ко второму.

Связь между напряжениями и деформациями на первом этапе деформирования берется в виде закона Гука для сжимаемого тела. На втором этапе упругие деформации сжатого скелета подчиняются закону Гука для несжимаемого тела. В зоне пластического деформирования сжатого скелета будем использовать модель несжимаемого упрочняющегося упругопластического тела [3] с поверхностью нагружения

$$F = \left( S_j^\beta - c \varepsilon_j^\beta \right) \left( S_\beta^j - c \varepsilon_\beta^j \right) - k^2, \quad (2)$$

где  $S_{j\beta}$  – компоненты тензора девиатора напряжений;  $\varepsilon_{j\beta}^p$  – компоненты тензора пластических деформаций;  $c$  – коэффициент упрочнения;  $k$  – предел текучести материала.

Полная деформация в пластической зоне складывается из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_{j\beta} = \varepsilon_{j\beta}^e + \varepsilon_{j\beta}^p, \quad (3)$$

причем пластическая и упругая составляющие объемной деформации соответственно удовлетворяют условиям несжимаемости

$$\varepsilon_{nn}^p = 0, \quad \varepsilon_{nn}^e = -\varepsilon_0, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_{j\beta}^e$  и  $\varepsilon_{j\beta}^p$  компоненты тензора полных и упругих деформаций соответственно.

Ниже рассмотрим задачу определения НДС сферического тела с внешним и внутренним радиусами  $b$  и  $a$  соответственно. По внешней поверхности действует равномерно распределенная сжимающая нагрузка интенсивностью  $q_b$ , по внутренней поверхности – интенсивностью  $q_a$ .

НДС в рамках центрально симметричной постановки задачи в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  на первом этапе деформирования будем моделировать следующими соотношениями геометрически линейной теории:

уравнение равновесия:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + 2(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0; \quad (5)$$

соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}; \quad (6)$$

закон Гука для упругого сжимаемого тела

$$\sigma_r = (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_r + 2\lambda_1\varepsilon_\theta, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \lambda_1\varepsilon_r + 2(\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_\theta, \quad (7)$$

где  $u$  – радиальная составляющая вектора перемещений;  $\sigma_r, \sigma_\theta$  – нормальные компоненты тензора напряжений;  $\lambda_1, \mu_1$  – параметры Ламе сжимаемого тела.

Граничные условия:

$$\sigma_r|_{r=b} = -q_b, \quad \sigma_r|_{r=a} = -q_a. \quad (8)$$

Из системы (5) – (7) объемная деформация определится в виде

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = 3C,$$

где  $C$  – константа интегрирования.

Следовательно, объемная деформация не зависит от координаты, то есть она одинакова во всем теле. Поэтому сжатие пор произойдет одновременно во всем теле при достижении объемной деформацией некоторого заданного значения.

Пусть предельное значение объемной деформации будет равно  $-\varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0 > 0$ ), тогда условие наличия несжатых пор в сферическом теле представимо в форме

$$-3C < \varepsilon_0. \quad (9)$$

С учетом граничных условий (8) неравенство (9) примет вид

$$\frac{3(q_a a^3 - q_b b^3)}{(3\lambda_1 + 2\mu_1)(a^3 - b^3)} < \varepsilon_0. \quad (10)$$

Таким образом, если выполнено условие (10), то в теле остаются несжатые поры и НДС описывается соотношениями, приведенными в работе [2]. Если нагрузки  $q_a$  и  $q_b$  таковы, что неравенство (10) обращается в равенство, то есть выполняется условие

$$q_b = q_a \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \frac{\varepsilon_0}{3}(3\lambda_1 + 2\mu_1) \cdot \frac{b^3 - a^3}{b^3}, \quad (11)$$

то во всем теле произойдет полное сжатие пор.

НДС на момент полного сжатия пор согласно работе [2] при учете (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(1)} &= -\frac{\varepsilon_0}{3} \tilde{r} + \frac{1}{4} \left( \theta(\varepsilon_0) \tilde{q}_a - \frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2) \right) \frac{\tilde{a}^3}{\tilde{r}^2}, \\ \varepsilon_r^{(1)} &= -\frac{\varepsilon_0}{3} - \frac{1}{2} \left( \theta(\varepsilon_0) \tilde{q}_a - \frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2) \right) \frac{\tilde{a}^3}{\tilde{r}^3}, \\ \varepsilon_\theta^{(1)} = \varepsilon_\varphi^{(1)} &= -\frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{1}{4} \left( \theta(\varepsilon_0) \tilde{q}_a - \frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2) \right) \frac{\tilde{a}^3}{\tilde{r}^3}, \\ \tilde{\sigma}_r^{(1)} &= -\frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2) - \left( \theta(\varepsilon_0) \tilde{q}_a - \frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2) \right) \frac{\tilde{a}^3}{\tilde{r}^3}, \\ \tilde{\sigma}_\theta^{(1)} = \tilde{\sigma}_\varphi^{(1)} &= -\frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2) + \left( \theta(\varepsilon_0) \tilde{q}_a - \frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2) \right) \frac{\tilde{a}^3}{2\tilde{r}^3}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{где } \theta(\varepsilon_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varepsilon_0 \neq 0 \\ 0, & \text{если } \varepsilon_0 = 0 \end{cases}.$$

В (12) и далее все соотношения записаны в безразмерном виде, при этом все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к величине  $\mu_1$ , а имеющие размерность длины – к внешнему радиусу  $b$ . Здесь и далее безразмерные величины отмечены знаком  $\sim$ .

Второй этап деформирования будет реализовываться при выполнении условия  $\tilde{q}_b > \tilde{q}_a \tilde{a}^3 + \frac{\varepsilon_0}{3} (3\tilde{\lambda}_1 + 2)(1 - \tilde{a}^3)$ . При этом около внутренней поверхности толсто-стенной сферической оболочки возникнет и будет расти пластическая зона, препятствовать развитию которой будет упрочнение материала, то есть сжатый скелет будет деформироваться как упрочняющаяся несжимаемая упругопластическая среда с параметрами  $\tilde{\mu} = 1 + \tilde{\mu}_0$ ,  $\tilde{k}$ ,  $\tilde{c}$ , где  $\tilde{\mu}_0$  – модуль сдвига элемента характеризующего несжимаемую среду. В этом случае сплошная среда разделяется на две зоны – упругую и пластическую.

НДС на втором этапе деформирования будем моделировать формулами (3) – (6), присоединяя к ним реологические соотношения

$$\tilde{s}_r = 2\tilde{\mu}\varepsilon_r, \quad \tilde{s}_\theta = 2\tilde{\mu}\varepsilon_\theta, \quad \tilde{s}_\varphi = 2\tilde{\mu}\varepsilon_\varphi; \quad (13)$$

в упругой области и соотношения

$$\tilde{s}_r = 2\tilde{\mu}\varepsilon_r^e, \quad \tilde{s}_\theta = 2\tilde{\mu}\varepsilon_\theta^e, \quad \tilde{s}_\varphi = 2\tilde{\mu}\varepsilon_\varphi^e \quad (14)$$

$$\text{и} \quad (\tilde{s}_r - \tilde{c}\varepsilon_r^p)^2 + (\tilde{s}_\theta - \tilde{c}\varepsilon_\theta^p)^2 + (\tilde{s}_\varphi - \tilde{c}\varepsilon_\varphi^p)^2 = 2\tilde{k}^2 \quad (15)$$

– в пластической зоне.

Граничные условия на этом этапе возьмем в виде

$$\tilde{\sigma}_r|_{r=a} = -(\tilde{q}_a - \tilde{q}_a^*), \quad \tilde{\sigma}_r|_{r=b} = -(\tilde{q}_b - \tilde{q}_b^*). \quad (16)$$

Условия совместности, на границе раздела упругой и пластической зон выберем в форме

$$\tilde{\sigma}_r^p|_{r=\gamma} - \tilde{\sigma}_r^e|_{r=\gamma} = 0, \quad \varepsilon_r^p|_{r=\gamma} = 0. \quad (17)$$

НДС сферического тела при неупругом деформировании сжатого скелета определяется следующими соотношениями:

- в упругой области ( $\tilde{\gamma} < \tilde{r} < 1$ )

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_r^{(2)} &= -\tilde{q}_b + \frac{8}{3} \left( \frac{\varepsilon_0}{3} (2\tilde{\mu} + 1) + A \right) \left( \tilde{\gamma}^3 - \frac{\tilde{\gamma}^3}{\tilde{r}^3} \right), \\ \tilde{\sigma}_\theta^{(2)} &= -\tilde{q}_b + \frac{4}{3} \left( \frac{\varepsilon_0}{3} (2\tilde{\mu} + 1) + A \right) \left( \frac{\tilde{\gamma}^3}{\tilde{r}^3} + 2\tilde{\gamma}^3 \right); \end{aligned} \quad (18)$$

- в пластической области ( $a < r < \gamma$ )

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{p(2)} &= \frac{2}{2\tilde{\mu} + \tilde{c}} \left( \frac{\varepsilon_0}{3} (2\tilde{\mu} + 1) - \frac{2D}{\tilde{r}^3} \tilde{\mu} + A \right), \\ \tilde{\sigma}_r^{(2)} &= -\tilde{q}_a - \frac{2}{2\tilde{\mu} + \tilde{c}} \left( \tilde{c} \left( \frac{\varepsilon_0}{3} (2\tilde{\mu} + 1) + A \right) \left( \frac{\tilde{\gamma}^3}{\tilde{r}^3} - \frac{\tilde{\gamma}^3}{\tilde{a}^3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - (2\varepsilon_0\tilde{\mu}(\tilde{\mu} - 1) + 6\tilde{\mu}A - \varepsilon_0(\tilde{\mu} + 1)(2\tilde{\mu} + \tilde{c})) \ln \frac{\tilde{r}}{\tilde{a}} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_\theta^{(2)} = & -\tilde{q}_a + \frac{1}{2\tilde{\mu} + \tilde{c}} \left( \tilde{c} \left( \frac{2}{3} \varepsilon_0 (\tilde{\mu} + 2) + A \right) \left( \frac{\tilde{\gamma}^3}{\tilde{r}^3} + \frac{2\tilde{\gamma}^3}{\tilde{a}^3} \right) + \right. \\ & \left. + \left( 2 \ln \frac{\tilde{r}}{\tilde{a}} + 1 \right) \left( 2\varepsilon_0 \tilde{\mu}^2 - \tilde{c} \varepsilon_0 (\tilde{\mu} + 1) + 6A\tilde{\mu} \right) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Перемещения и полные деформации в упругой и пластической областях определяются соотношениями

$$\tilde{u} = \frac{D}{\tilde{r}^2} - \frac{\varepsilon_0}{3} \tilde{r}, \quad \varepsilon_r = -\frac{2D}{\tilde{r}^3} - \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{2D}{\tilde{r}^3} - \frac{\varepsilon_0}{3}. \quad (21)$$

Из первого условия сопряжения (16) с учетом (17) и (19) получим уравнение для определения радиуса  $\tilde{\gamma}$  раздела зон упругого и пластического деформирования сжатого скелета в виде

$$\begin{aligned} \tilde{q}_b - \tilde{q}_a - \frac{2}{2\tilde{\mu} + \tilde{c}} \left( \left( \frac{\varepsilon_0}{3} (2\tilde{\mu} + 1) + A \right) \left( \tilde{c} \left( 1 - \frac{\tilde{\gamma}^3}{\tilde{a}^3} \right) + \frac{4}{3} (2\tilde{\mu} + \tilde{c}) (1 - \tilde{\gamma}^3) \right) - \right. \\ \left. - (\varepsilon_0 (\tilde{\mu} (2\tilde{\mu} - 4 - \tilde{c}) - \tilde{c}) + 6\tilde{\mu}A) \ln \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{a}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь в (20) – (22)

$$\chi = \text{sign}(\tilde{q}_a - \tilde{q}_b), \quad A = \chi \sqrt{3\tilde{k}^2 - 2\varepsilon_0^2 \tilde{\mu}^2}, \quad D = \frac{(2\tilde{\mu} + 1)\varepsilon_0 + 3A}{6\tilde{\mu}} \tilde{\gamma}^3.$$

Таким образом, итоговое НДС толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенных сжимающих нагрузок при учете начальной пористости материала и неупругих свойств сжатого скелета, определяется по формулам (1). При этом компоненты с индексом (1) определяются по соотношениям (12), а компоненты с индексом (2) – по соотношениям (18) – (22).

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1, *a* кривая 1 соответствует  $\tilde{k} = 0.002$ , кривая 2 –  $\tilde{k} = 0.005$ , кривая 3 –  $\tilde{k} = 0.008$ . На рис. 1, *б* кривая 1 соответствует  $\tilde{\mu}_0 = 1$ , кривая 2 –  $\tilde{\mu}_0 = 2$ , кривая 3 –  $\tilde{\mu}_0 = 3$ .

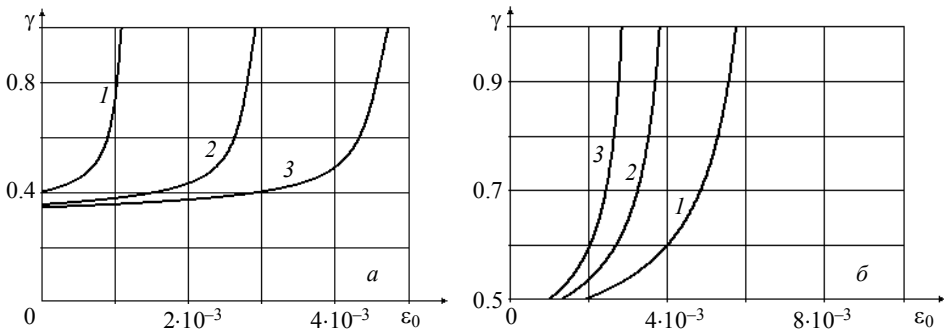


Рис. 1. Зависимость радиуса упруго-пластической границы от величины начального раствора пор при различных значениях параметра пластичности  $\tilde{k}$  (*a*) и при различных значениях параметра  $\tilde{\mu}_0$  (*б*)

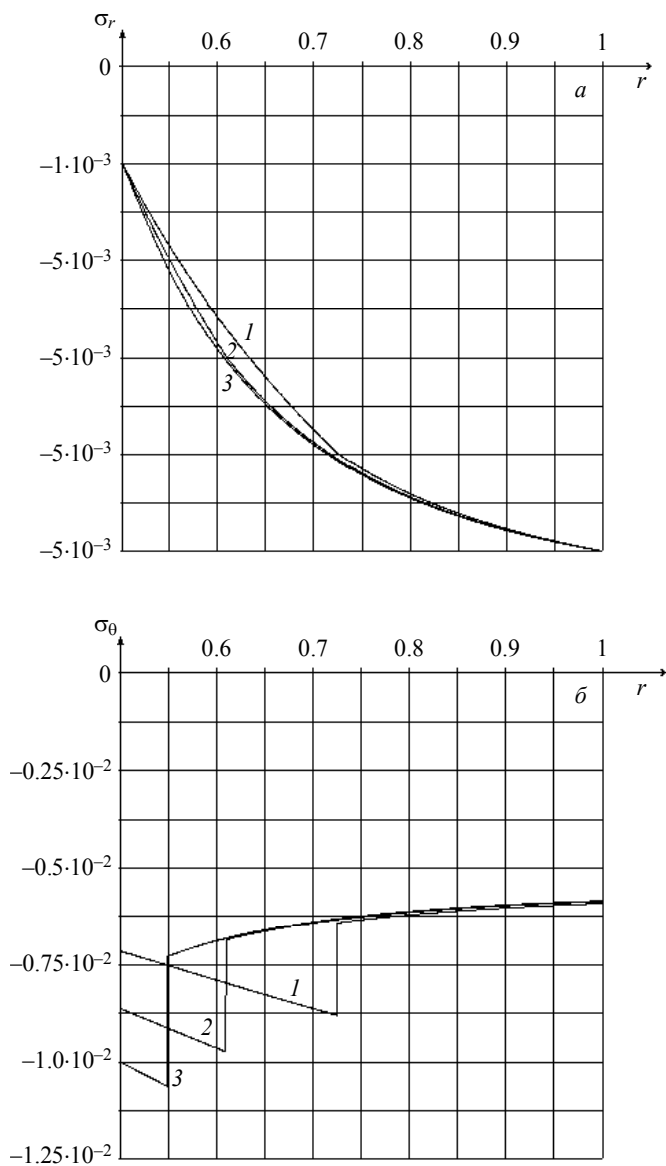


Рис. 2. Зависимости радиальной компоненты напряжений (а) и второй компоненты напряжений (б) от радиуса при различных значениях параметра пластичности  $\tilde{k}$

На рис. 2 кривые 1 соответствуют  $\tilde{k} = 0.0011$ , кривые 2 –  $\tilde{k} = 0.0012$ , кривая 3 –  $\tilde{k} = 0.0013$ . Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, брались следующими:  $\tilde{q}_a = 0.001$ ,  $\tilde{q}_b = 0.005$ ,  $\tilde{a} = 0.5$ ,  $\tilde{b} = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 0.0005$ ,  $\tilde{k} = 0.0012$ ,  $\tilde{c} = 0.005$ ,  $\tilde{\mu}_0 = 1$ ,  $\tilde{\lambda} = 3$ ,  $\tilde{\mu}_1 = 1$ .

Из анализа результатов численного эксперимента следует, что с ростом прочностных свойств материала радиус упруго пластической границы уменьшается, а с ростом значения начального раствора пор радиус упруго пластической границы увеличивается.

Таким образом, в работе построена математическая модель для описания напряженно-деформированного состояния сплошной среды, учитывающая пористую структуру материала и упруго-пластические свойства сжатого скелета. В рамках предложенного подхода на основе соотношений геометрически-линейной теории малых деформаций решена задача об определении полей напряжений и перемещений толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием всестороннего равномерного сжатия. Получены аналитические соотношения, описывающие НДС на этапах упругого сжатия пор и неупругого деформирования сжатого скелета. Выведена зависимость между внешней и внутренней нагрузками, необходимыми для полного сжатия пор во всем теле. При этом из анализа решений следует, что как при увеличении предела текучести, так и с ростом модуля сдвига сжатой матрицы величина радиуса раздела зон упругого и пластического деформирования сжатого скелета уменьшается. Увеличение величины начального раствора пор приводит к расширению области неупругих деформаций сжатой матрицы.

Необходимо отметить, что для полученных решений справедлив предельный переход, а именно, если в соотношениях (12), (18) – (22) устремить значение величины  $\varepsilon_0$  к нулю, то мы получим результаты, представленные в работе [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гоцев Д.В., Спорыхин А.Н. Метод возмущений в задачах устойчивости подкрепленных горных выработок. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2010. 299 с.
2. Гоцев Д.В., Бунтов А.Е., Перунов Н.С. Математическое моделирование напряженно-деформированных состояний пористых цилиндрических и сферических тел при сжатии с учетом неупругого поведения сжатого скелета // Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы». Чувашский гос. пед. ун-т, 2015. С. 91–99.
3. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред: в 2 т. Т. 2. М.: Физматлит, 2002. 448 с.

Статья поступила 17.01.2016 г.

Gotsev D. V., Perunov N. S. DISTRIBUTION OF STRESS AND DISPLACEMENT FIELDS IN A POROUS SPHERICAL BODY WITH ALLOWANCE FOR ELASTIC AND PLASTIC PROPERTIES

DOI 10.17223/19988621/40/5

A mathematical model of the intense deformed state of a spherical body under hydrostatic compression has been constructed. A porous continuum the squeezed skeleton of which possesses strengthened elasto-plastic properties was chosen as the material model. Deformation of the porous environment under the action of uniformly distributed squeezing loads is divided into two stages: elastic deformation of the porous environment and inelastic deformation of the squeezed matrix. At the first stage, only the deformation caused by partial external pressure and leading to complete compression of the initial porosity in the whole body is considered. The resulting solution of the first tasks of the intense deformed state is taken as the initial state for the second phase in which the remainder of the external pressure is applied to the body. Constructing a mathematical model describing the stress field and displacement field for a spherical body was carried out within the centrally symmetric formulation. The relations determining fields of tension and dis-

placements at the first stage of deformation have been found. The squeezing pressure under which the initial porosity of material in the entire body reaches the zero value has been determined. At the second stage of the deformation process, analytical expressions for fields of tension and displacements in elastic and plastic deformation zones of the squeezed skeleton are derived, and the equation for determining the radius of the elasto-plastic border is obtained. The effect of hardening and fluidity limits on the size of the border area between elastic and plastic deformations of the initial porosity is estimated.

Keywords: porous materials during an inelastic work of a squeezed skeleton, spherical body under compressive loads, intense deformed state.

*GOTSEV Dmitry Viktorovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Voronezh State University, Russian Federation).

E-mail: [rbgotsev@mail.ru](mailto:rbgotsev@mail.ru)

*PERUNOV Nikolay Sergeyevich* (Student, Voronezh State University, Russian Federation).

E-mail: [perunovnikolays@gmail.com](mailto:perunovnikolays@gmail.com)

#### REFERENCES

1. Gotsev D.V., Sporykhin A.N. (2010) *Metod vozmushcheniy v zadachakh ustoychivosti podkreplennykh gornykh vyrabotok* [Method of perturbations in problems of stability of supported excavations]. Voronezh: Voronezh State University.
2. Gotsev D.V., Buntov A.E., Perunov N.S. (2015) Matematicheskoe modelirovanie napryazhenno-deformirovannykh sostoyaniy poristyykh tsilindricheskikh i sfericheskikh tel pri szhatii s uchetom neuprugogo povedeniya szhatogo skeleta [Mathematical modeling of stress-strain states of porous cylindrical and spherical bodies under compression with allowance for inelastic behavior of the compressed skeleton]. In: *Materialy Vserossiyskoy nauchnoy shkoly-konferentsii "Mekhanika predel'nogo sostoyaniya i smezhnye voprosy"* [Proceedings of All-Russia Scientific School-Conference "Mechanics of the limit state and related problems"]. Chuvash State Pedagogical University.
3. Ivlev D.D. (2002) *Mekhanika plasticheskikh sred: v 2 t. T. 2.* [Mechanics of plastic media: in 2 volumes. Vol. 2]. Moscow: FIZMATLIT.