

МАТЕМАТИКА

УДК 514.8, 62.342

DOI 10.17223/19988621/42/1

**А.М. Бубенчиков, С.М. Казакиявичюс, А.А. Костарев,
Н.Р. Щербаков, И.В. Щербакова**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОФИЛЬНОЙ ФРЕЗЫ
ДЛЯ ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ**

При обработке поверхностей деталей передаточного механизма используются различные типы фрез (сферические, тороидальные и др.). Стоимость специального профильного инструмента несколько выше, чем таких фрез. Но увеличение стоимости инструмента окупается значительным сокращением машинного времени обработки деталей. Построена математическая модель поверхности профильной фрезы (как поверхности вращения) для обработки деталей цилиндрической передачи с эксцентриково-циклоидальным зацеплением. Создана компьютерная программа для определения радиусов круговых сечений фрезы для заданного набора смещений по оси вращения.

***Ключевые слова:** профильная фреза, эксцентриково-циклоидальное зацепление, касание кривых.*

В [1, 2] были построены математические модели процесса формообразования деталей цилиндрического и конического передаточного механизмов с эксцентриково-циклоидальным зацеплением (ЭЦ-зацеплением [3]) с помощью сферических и тороидальных фрез. В [4] было рассмотрено построение поверхности профильной фрезы для обработки входной детали цилиндрического механизма с ЭЦ-зацеплением. В данной работе моделируется построение поверхности профильной фрезы для обработки обеих деталей (входной и выходной) цилиндрического механизма с ЭЦ-зацеплением. Профильные фрезы позволяют получать поверхность впадины зубчатых колёс методом копирования «за один заход», в отличие от сферических и тороидальных фрез, обработка которыми происходит последовательным (многозаходным) удалением части металла с заготовки детали. Увеличение стоимости профильного инструмента окупается значительным сокращением машинного времени обработки деталей. Входную и выходную детали передаточного механизма принято называть «шестерней» и «колесом» соответственно.

**1. Моделирование поверхности профильной фрезы
для обработки зуба шестерни**

Выпишем константы, входящие в уравнения поверхностей деталей:

A_w – межцентровое расстояние (расстояние между параллельными осями вращения деталей);

ε – эксцентриситет;

z_1 – количество зубьев шестерни;

z_2 – количество зубьев колеса;

$n = z_2/z_1 + 1$;

ρ – радиус окружности сечения зуба шестерни;

l – размер деталей по оси вращения;

r_c – радиус цилиндрического барабана, на котором расположены зубья шестерни;

K – количество сечений поверхности фрезы;

μ_i – высота подъема сечения ($i = 0, 1, \dots, K$);

r_i – радиусы окружностей сечения фрезы, для различных значений μ_i ;

η – сдвиг оси фрезы.

Поверхность зуба шестерни в цилиндрической передаче с ЭЦ-зацеплением [1] образована окружностями, расположенными в параллельных плоскостях, причем центры этих окружностей лежат на винтовой линии, принадлежащей цилиндру радиуса ε (червячный элемент). Примем ось вращения колеса за ось OZ , а ось вращения шестерни направим по прямой, параллельной оси OZ , смещенной вдоль оси OX на величину Aw . Тогда параметрические уравнения поверхности зуба шестерни можно записать в виде вектор-функции двух аргументов:

$$S(v, \alpha) = \begin{pmatrix} Aw - \varepsilon \cos v + \rho \cos \alpha \\ -\varepsilon \sin v + \rho \sin \alpha \\ \frac{lr v z_1}{2\pi} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\alpha = 0, \dots, 2\pi$, $v = 0, \dots, 2\pi/z_1$.

Поверхность фрезы будем строить как семейство окружностей в плоскостях, перпендикулярных оси фрезы, с центрами, лежащими на этой оси. При этом радиус каждой из этих окружностей будет определяться из условия касания ее с плоской кривой – сечением зуба плоскостью окружности. Идеальная прямая оси фрезы пересекает ось вращения шестерни под прямым углом и расположена на равных удалениях от зубьев шестерни. На практике, дабы при обработке одной боковой поверхности зуба избежать контакта с другой боковой поверхностью, вводят величину η малого параллельного сдвига оси фрезы (сохраняя перпендикулярность оси вращения шестерни). На рис. 1 изображено положение оси фрезы в плоском сечении шестерни, перпендикулярном оси ее вращения, для $z_1 = 4$. Четыре окружности – сечения зубьев шестерни имеют радиус ρ , большая окружность – радиус r_c .

При таком расположении оси фрезы ее уравнения в плоскости сечения имеют вид

$$Osf(\mu) = \begin{pmatrix} Aw - r_c \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) + \eta \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \\ r_c \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) + \eta \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

При $\mu = 0$ из (2) получаем координаты точки M_0 , через которую проходит плоскость первой окружности сечения поверхности фрезы. Положение плоскости последней такой окружности определяет точка пересечения M_1 оси фрезы с касательной к окружности сечения зуба шестерни, перпендикулярной этой оси (см. рис. 1). Запишем уравнение этой касательной в нормальном виде:

$$\cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \left[x - \left(Aw - \rho \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) - \varepsilon \right) \right] - \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \left(y - \rho \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \right) = 0. \quad (3)$$

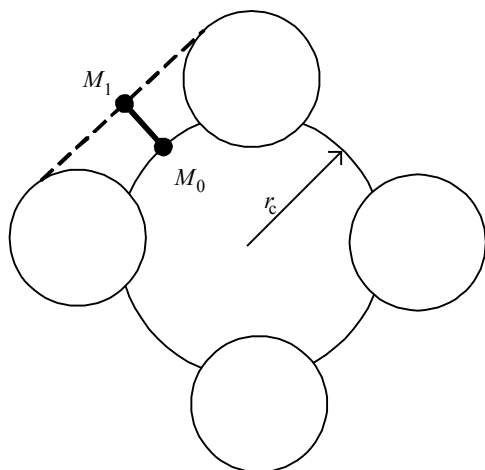


Рис. 1. Сечение входной детали (шестерни) цилиндрической передачи в ЭЦ-зацеплении для $z_1 = 4$. Показано положение оси профильной фрезы и касательной к окружности сечения первого зуба шестерни, перпендикулярной оси фрезы (пунктирная линия)

Fig. 1. Cross section of the cylindrical transmission inlet part (gear) in EC-gearing for $z_1 = 4$. Position of the profile cutter axis and tangent to the section circle of the first gear tooth perpendicular to the cutter axis (dashed line)

Тогда расстояние μ_1 от точки M_0 до касательной (3) получится в результате подстановки в (3) координат точки M_0 :

$$\mu_1 = \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) + \rho - r_c.$$

Таким образом, плоскости, перпендикулярные оси фрезы, в которых располагаются окружности, образующие поверхность фрезы, проходят через точки M_0 и M_1 оси фрезы, т.е. при изменении параметра μ в (2) от 0 до μ_1 . Уравнения семейства этих плоскостей можно записать в виде

$$\cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \left[x - \left(Aw - (r_c + \mu) \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \right) \right] - \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \left[y - (r_c + \mu) \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \right] = 0, \quad (4)$$

где $\mu = 0, \dots, \mu_1$.

Теперь получим уравнения семейства кривых – сечений поверхности зуба шестерни плоскостями семейства (4). Для этого подставим в (4) вместо x и y две первые координаты вектор-функции (1), задающей поверхность зуба шестерни. В результате получим соотношение между параметрами v , α , и μ , из которого можно получить выражение v через α и μ :

$$v(\alpha, \mu) = \frac{-\pi}{z_1} + \arccos\left(\frac{\rho \cos\left(\frac{\pi + \alpha z_1}{z_1}\right) + r_c + \mu}{\varepsilon} \right). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (1), получаем искомые уравнения семейства плоских кривых – сечений зуба шестерни плоскостями семейства (4):

$$\text{Sem}(\alpha, \mu) = \begin{pmatrix} Aw - \varepsilon \cos(v(\alpha, \mu)) + \rho \cos \alpha \\ -\varepsilon \sin(v(\alpha, \mu)) + \rho \sin \alpha \\ \frac{lr v(\alpha, \mu) z_1}{2\pi} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Именно этих кривых должны касаться окружности, образующие поверхность профильной фрезы. Эти окружности располагаются в плоскостях семейства (4), их центры лежат на оси фрезы (2), а радиусы r меняются в зависимости от

параметра μ семейства (4). Исходя из этого, запишем уравнения семейства таких окружностей (пока с произвольным радиусом r) в виде

$$Okr(\beta, \mu) = \begin{pmatrix} Aw - (r_c + \mu) \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) + (r \cos \beta + \eta) \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \\ (r_c + \mu) \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) + (r \cos \beta + \eta) \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \\ r \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В формулах (5) – (7) $\mu = 0, \dots, \mu_1$. В каждом сечении μ окружность (7) должна касаться кривой (6), т.е. должно обращаться в нуль скалярное произведение векторов:

$$(M_0 - Sem(\alpha, \mu), Sem'(\alpha, \mu)) = 0, \quad (8)$$

здесь $M_0 = Osf(0)$, а через $Sem'(\alpha, \mu)$ обозначена производная вектор-функции $Sem(\alpha, \mu)$ по параметру α :

$$Sem'(\alpha, \mu) = \begin{pmatrix} \varepsilon \sin(v(\alpha, \mu)) v'(\alpha, \mu) - \rho \sin \alpha \\ \varepsilon \cos(v(\alpha, \mu)) v'(\alpha, \mu) - \rho \cos \alpha \\ \frac{lr v'(\alpha, \mu) z_1}{2\pi} \end{pmatrix},$$

$$v'(\alpha, \mu) = \frac{\rho \sin\left(\frac{\pi + \alpha z_1}{z_1}\right)}{\left(\varepsilon^2 - \left[\rho \cos\left(\frac{\pi + \alpha z_1}{z_1}\right) + r_c + \mu\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Для решения уравнения (8) составлена компьютерная программа, которая для каждого значения

$$\mu_i = \frac{\mu_1}{K} i$$

(K – задаваемое количество сечений поверхности фрезы) определяет начальное приближение для нахождения корня функции в левой части уравнения (8), а затем с помощью встроенной функции *root* пакета MathCad находит этот корень α_i . Далее, для определения радиуса окружности r_i , касающейся сечения зуба шестерни, соответствующего μ_i , потребуем наличия общей точки у этих кривых, т.е. приравняем координаты вектор-функций (6) и (7). Равенство вторых и третьих координат дает систему двух уравнений:

$$r \cos \beta = \frac{-\varepsilon \sin(v(\alpha, \mu)) + \rho \sin \alpha - (r_c + \mu) \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right)} - \eta,$$

$$r \sin \beta = \frac{lr v(\alpha, \mu) z_1}{2\pi},$$

из которой находим искомые радиусы окружностей для каждого значения μ_i :

$$r_i = \sqrt{\left\{ \frac{-\varepsilon \sin(v(\alpha_i, \mu_i)) + \rho \sin \alpha_i - (r_c + \mu_i) \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right)} - \eta \right\}^2 + \left\{ \frac{lr v(\alpha_i, \mu_i) z_1}{2\pi} \right\}^2}.$$

Таким образом, поверхность профильной фрезы получена как семейство окружностей вида (7), т.е. как поверхность вращения:

$$Fr(\beta, i) = \begin{pmatrix} Aw - (r_c + \mu_i) \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) + (r_i \cos \beta + \eta) \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \\ (r_c + \mu_i) \sin\left(\frac{\pi}{z_1}\right) + (r_i \cos \beta + \eta) \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \\ r_i \sin \beta \end{pmatrix}.$$

На рис. 2 изображена профильная фреза, смоделированная по вышеописанной схеме. Показана плоскость сечения фрезы, перпендикулярная ее оси. В этой плоскости выделена линия сечения зуба шестерни; этой линии касается окружность сечения фрезы.

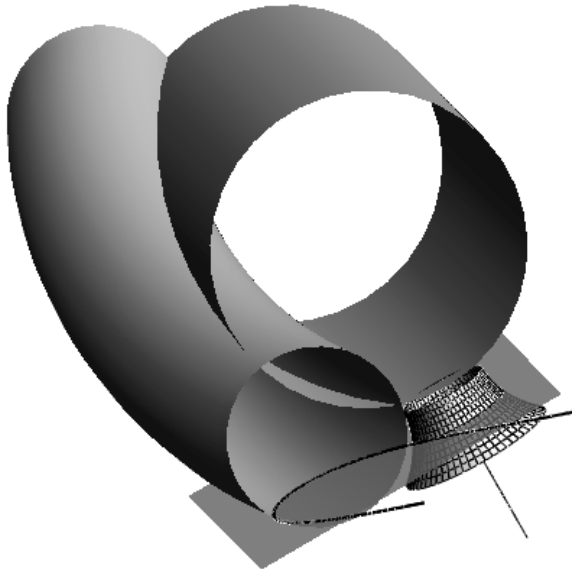


Рис. 2. Профильная фреза для обработки поверхности зуба шестерни в передаче с ЭЦ-зацеплением. Показана плоскость сечения, перпендикулярная оси фрезы, и линия сечения зуба шестерни этой плоскостью

Fig. 2. Profile cutter for processing the surface of the gear tooth in a transmission with EC-gearing. The cross section plane (perpendicular to the cutter axis) and line of the tooth section by this plane are shown

2. Моделирование поверхности профильной фрезы для обработки зуба колеса

Поверхность выходной детали (колеса) образована вращением плоской циклоидальной кривой вокруг оси вращения колеса с одновременным смещением ее вдоль этой оси. Этой кривой является эквидистанта эпитрохоиды [5]. Зададим эпитрохоиду в виде вектор-функции аргумента $\tau = 0, \dots, 2\pi l$:

$$Te(\tau) = \begin{pmatrix} -\varepsilon \cos \tau + Aw \cos \frac{\tau}{n} \\ -\varepsilon \sin \tau + Aw \sin \frac{\tau}{n} \end{pmatrix}.$$

Эквидистанту эпитрохоиды (кривую, удаленную по нормальям от эпитрохоиды на величину ρ) запишем в виде

$$E(\tau) = Te(\tau) + \rho \frac{Ne(\tau)}{|Ne(\tau)|}, \quad (9)$$

где

$$Ne(\tau) = \begin{pmatrix} \varepsilon \cos \tau - \frac{Aw}{n} \cos \frac{\tau}{n} \\ \varepsilon \sin \tau - \frac{Aw}{n} \sin \frac{\tau}{n} \end{pmatrix}$$

– вектор нормали в точке эпитрохоиды.

Поверхность выходной детали запишем в виде вектор-функции двух аргументов:

$$Ev(v, \tau) = \begin{pmatrix} \cos \frac{v}{n-1} E(\tau)_1 + \sin \frac{v}{n-1} E(\tau)_2 \\ -\sin \frac{v}{n-1} E(\tau)_1 + \cos \frac{v}{n-1} E(\tau)_2 \\ \frac{lr}{2\pi} v \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $v = 0, \dots, 2\pi$ – угол поворота входной детали, $v/(n-1)$ – угол поворота эквидистанты. Здесь обозначения $E(\tau)_1$, $E(\tau)_2$ означают соответствующие координаты вектор-функции (9), которые являются скалярными функциями.

Ось OX лежит на оси симметрии первого профиля зуба колеса и проходит через точку $Ev(0,0)$. Начальное положение оси фрезы – параллельно оси OX со смещением по оси OY на малую величину η . Это смещение, как и в случае шестерни (см. п.1), необходимо для того, чтобы при обработке одной боковой поверхности зуба не касаться другой боковой поверхности. Уравнение оси фрезы можно записать в виде вектор-функции

$$Osf(\mu) = \begin{pmatrix} E(0)_1 + \mu \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь запишем уравнение семейства плоскостей, перпендикулярных оси фрезы, в виде

$$X = E(0)_1 + \mu \quad (11)$$

и найдем кривые, получающиеся в сечениях этими плоскостями поверхности (10). Для этого приравняем правую часть (11) первой координате вектор-функции (10) и из получившегося уравнения

$$\cos\left(\frac{\nu}{n-1}\right)E(\tau)_1 + \sin\left(\frac{\nu}{n-1}\right)E(\tau)_2 = E(0)_1 + \mu$$

найдем зависимость между параметрами ν и τ :

$$\nu(\tau, \mu) = (n-1) \cdot \arctg \left(\frac{E(\tau)_1 [E(\tau)_2 (E(0)_1 + \mu) + Ed(\tau, \mu)]}{E(\tau)_1^2 (E(0)_1 + \mu) - E(\tau)_2 Ed(\tau, \mu)} \right),$$

где
$$Ed(\tau, \mu) = \sqrt{-E(\tau)_1^2 ((E(0)_1 + \mu)^2 - E(\tau)_1^2 - E(\tau)_2^2)}.$$

Подставляя $\nu(\tau, \mu)$ в (10) вместо ν , получаем уравнение семейства сечений зуба колеса плоскостями, перпендикулярными оси фрезы (μ – параметр семейства):

$$Sem(\tau, \mu) = \begin{pmatrix} E(0)_1 + \mu \\ -\sin\left(\frac{\nu(\tau, \mu)}{n-1}\right)E(\tau)_1 + \cos\left(\frac{\nu(\tau, \mu)}{n-1}\right)E(\tau)_2 \\ \nu(\tau, \mu) \frac{z}{2\pi} lr \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Этих кривых должны касаться окружности, образующие поверхность профильной фрезы. Эти окружности располагаются в плоскостях семейства (13), их центры лежат на оси фрезы, а радиусы r меняются в зависимости от параметра μ семейства (13). Исходя из этого, запишем уравнения семейства таких окружностей в виде

$$Okr(\alpha, \mu) = \begin{pmatrix} E(0)_1 + \mu \\ r \cos(\alpha) + \eta \\ r \sin(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Требование касания окружностей (14) с плоскими кривыми сечений (13) осуществляется как и в п.1 в два этапа. Во-первых, приравниваем координаты вектор-функций (13) и (14), что приводит к системе двух уравнений (первые координаты совпадают тождественно), из которых можно найти зависимости r и α от τ для каждого значения μ :

$$r(\tau, \mu) = \sqrt{\left[-\sin\left(\frac{\nu(\tau, \mu)}{n-1}\right)E(\tau)_1 + \cos\left(\frac{\nu(\tau, \mu)}{n-1}\right)E(\tau)_2 - \eta \right]^2 + \left(\nu(\tau, \mu) \frac{z}{2\pi} lr \right)^2}, \quad (15)$$

$$\alpha(\tau, \mu) = \arctg \frac{lr \nu(\tau, \mu) z}{2\pi \left[-\sin\left(\frac{\nu(\tau, \mu)}{n-1}\right)E(\tau)_1 + \cos\left(\frac{\nu(\tau, \mu)}{n-1}\right)E(\tau)_2 - \eta \right]} + \pi. \quad (16)$$

Во-вторых, как и в п.1 (см. (8)), должно обращаться в нуль скалярное произведение векторов:

$$(Osf(\mu) - Sem(\tau, \mu), Sem'(\tau, \mu)) = 0.$$

Это уравнение на τ при переходе к координатам имеет весьма громоздкий вид и решается с помощью специальной компьютерной программы. В результате для каждого значения высоты подъема сечения μ получаем значение $\tau\mu = \tau(\mu)$. Подставляя в (15) $\tau(\mu)$ получаем значения радиусов $r(\mu)$ окружностей сечений фрезы для каждого значения μ . Теперь из (14) получается уравнение поверхности фрезы:

$$Fr(\alpha, \mu) = \begin{pmatrix} E(0)_1 + \mu \\ r(\mu) \cos(\alpha) + \eta \\ r(\mu) \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Если $\tau(\mu)$ подставить в (16), то получим параметр $\alpha(\mu)$ точки касания окружности сечения фрезы с кривой сечения зуба колеса (для каждого значения μ). Координаты всех точек касания получатся при подстановке $\alpha(\mu)$ в (17). Эти точки показаны на рис. 3.

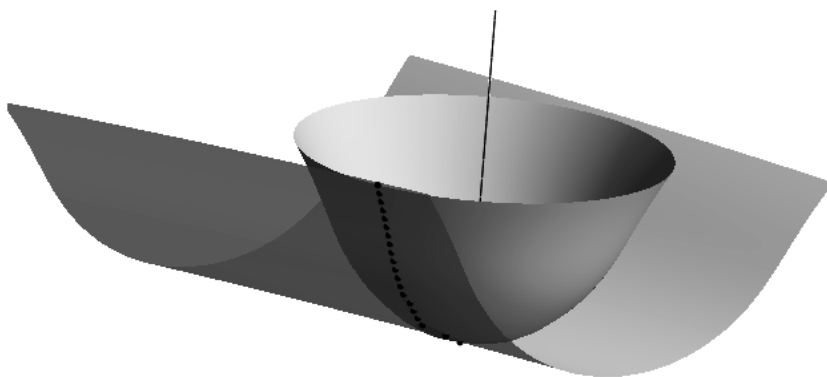


Рис. 3. Профильная фреза для обработки зуба колеса

Fig. 3 Profile cutter for processing the wheel tooth

Полученные координаты точек поверхности профильного инструмента используются для изготовления такого инструмента на специальных станках. Это с успехом используется в ЗАО «Технология маркет» (Томск, ОЭЗ) при необходимости резкого сокращения времени обработки зубчатых колёс для мелкосерийного производства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Камчатный С.А., Сквородин А.В., Становской А.В., Щербаков Н.Р. Математическое моделирование процесса сближения поверхностей при формообразовании деталей передаточного механизма с ЭЦ-зацеплением // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2012. № 4(20). С. 15–24.
2. Камчатный С.А., Кузнецов В.М., Сквородин А.В., Щербаков Н.Р. Математическое моделирование процесса формообразования деталей конического передаточного механизма с ЭЦ-зацеплением // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2014. 2(28). С. 5–17.
3. Kazakyavichyus S.M., Stanovskoy V.V., Remneva T.A., Kuznetsov W.M., Bubentchikov A.M., Shcherbakov N.R.. Perfomance of eccentric-cycloid engagement with change in the interaxial distance: Modification of tooth configuration // Russian Engineering Research. 2011. V. 31. No. 3. P. 197–199.

4. Bubenchikov A.M., Kazakavitschyus S.M., Shcherbakov N.R. Mathematical simulation of a profile cutter as a surface of revolution // IOP Conf. Series. Materials Science and Engineering. 124 (2016) 012095. doi:10.1088/1757-899X/124/1/012095.
5. Савелов А.А. Плоские кривые. М.: ГИФМЛ, 1960. С. 118.

Статья поступила 16.05.2016 г.

Bubenchikov A.M, Kazakavichyus S.M., Kostarev A.A., Scherbakov N.R., Scherbakova I.V. (2016) MATHEMATICAL SIMULATION OF A PROFILE CUTTER FOR PROCESSING PARTS OF A CYLINDRICAL GEAR. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(42), pp. 5–14

DOI 10.17223/19988621/42/1

Various types of cutters (spherical, toroidal, etc.) are used for processing surfaces of transmission gear parts. The cost of a special forming tool is somewhat higher than that of such cutters. However, the increase in the cost pays a significant reduction in time necessary for processing parts. The paper presents mathematical simulation of a profile cutter (as a surface of revolution) for processing parts of a cylindrical transmission gear with an eccentrically cycloidal gearing (EC-gearing). In part 1 this problem is solved for the input part. The surface of the cutter is constructed as a family of circles with increasing radii in planes perpendicular to the axis of the cutter, the centres lying on this axis. We have obtained an equation for the family of curves, which are cross sections of the tooth surface of the gear by these planes. It is these curves that must be touched by circles forming the surface of the profile cutter. The requirement of the circles touching the curves of the family leads to a system of equations which allows finding the radii of the circles depending on the height of the cross section rise. The solution to this system is found analytically, which eventually leads to one equation for one unknown. The root of this transcendental equation is found numerically. A similar scheme is used in part 2 to find the equation of the profile cutter's surface for the output part. A computer program has been made aiming to specify the radii of the cutter's circular cross-sections for a given set of displacements along the axis of rotation. The work provided substantial assistance in manufacturing EC-engagement parts for gears of various types.

Keywords: profile cutter, eccentrically cycloidal (EC) gearing, contingency of curves.

BUBENCHIKOV Aleksey Michailovich (Doctor of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: alexy121@mail.ru

KAZAKAVITSCHJUS Sergei Matveevich
(CJSC Technology market Tomsk, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: tm@ec-gearing.ru

KOSTAREV Artem Andreevich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: artem_kost@bk.ru

SHCHERBAKOV Nikolay Romanovich (Doctor of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: nrs@math.tsu.ru

SHCHERBAKOVA Irina Vladimirovna (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: nrs@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Kamchatnyy S.A., Skovorodin A.V., Stanovskoy A.V., Shcherbakov N.R. (2012) Matematicheskoe modelirovanie protsessa sblizheniya poverkhnostey pri formoobrazovanii detaley peredatochnogo mekhanizma s ETs-zatsepleniem [Mathematical simulation of the process of surface approaching when generating the geometry of details of the driving gear with EC-gearing]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(20). pp. 15–24.
2. Kamchatnyy S.A., Kuznetsov W.M., Skovorodin A.V., Shcherbakov N.R. (2014) Matematicheskoe modelirovanie protsessa formoobrazovaniya detaley konicheskogo peredatochnogo mekhanizma s ETs-zatsepleniem [Mathematical simulation of the formbuilding of the conic driving gear details]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 5–17.
3. Kazakyavichyus S.M. et al. (2011) Performance of eccentric-cycloid engagement with change in the interaxial distance: Modification of tooth configuration. *Russian Engineering Research*. 31(3). pp. 197–199.
4. Bubenichikov A.M., Kazakavitschyus S. M., Shcherbakov N. R. Mathematical simulation of a profile cutter as a surface of revolution. *IOP Conf. Series. Materials Science and Engineering*. 124 (2016) 012095. doi:10.1088/1757-899X/124/1/012095.
5. Savelov A.A. (1960) *Flat Curves*. Moscow: St. Publ. Phys. Math. Lit.