

УДК 532.5:532.517.4

DOI 10.17223/19988621/42/8

И.В. Ершов

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА ДВУХАТОМНОГО ГАЗА В УСЛОВИЯХ ВЯЗКОЙ СТРАТИФИКАЦИИ И ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ МОДЫ¹

В рамках линейной теории исследована устойчивость вязких двумерных возмущений в сверхзвуковом плоском течении Куэтта совершенного и колебательно-возбужденного газа. В обоих случаях исследовалась альтернатива, когда коэффициенты переноса принимались либо постоянными, либо зависящими от статической температуры потока. Для учета температурной зависимости сдвиговой вязкости использовалась модель Сазерленда, при этом коэффициенты теплопроводности выражались соотношениями Эйкана. Для совершенного газа проведено подробное сравнение характеристик устойчивости I и II акустических мод рассматриваемых моделей вязкости. Показано, что «вязкая» стратификация значительно повышает устойчивость течения по сравнению со случаем постоянной вязкости. Вместе с тем для более простой модели постоянной вязкости сохраняются все характерные особенности развития вязких возмущений, отмеченные для модели Сазерленда. При учете температурной зависимости коэффициентов переноса диссипативный эффект возбуждения колебательной моды сохраняется. Относительное уменьшение инкрементов нарастания вязких возмущений мод I и II, вызванное колебательным возбуждением, одинаково для обеих моделей вязкости. При этом увеличение критического числа Рейнольдса составляет около 12 %.

Ключевые слова: *линейная устойчивость, формула Сазерленда, колебательная релаксация, акустические моды.*

Плоское течение Куэтта широко используется в линейной теории устойчивости в качестве простой модели для исследования влияния различных факторов, таких, как реология, физико-химические процессы, механические характеристики граничных поверхностей на устойчивость потока. В работах [1, 2] рассматривалась линейная устойчивость сверхзвукового течения Куэтта совершенного газа при конечных числах Рейнольдса. Температурная зависимость вязкости описывалась формулой Сазерленда, число Прандтля принималось постоянным, объемная вязкость исключалась из рассмотрения с помощью соотношения Стокса. В [2] была изучена зависимость инкрементов нарастания и критических чисел Рейнольдса наиболее неустойчивых вязких мод от числа Маха потока. Эти исследования на современном этапе при тех же предположениях были продолжены в работе [3], где дополнительно к модели Сазерленда рассматривался случай постоянной вязкости. Основное внимание здесь было посвящено изучению промежуточного интегрального нарастания вязких возмущений на базе немодального энергетического подхода. В рамках классической (модальной) линейной теории сопоставление двух вязкостных моделей ограничилось в основном сравнением

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00274).

критических параметров течения наиболее неустойчивой вязкой моды для нескольких значений числа Маха. Было показано, что «вязкая» стратификация в несколько раз увеличивает критические числа Рейнольдса относительно соответствующих значений для случая постоянной вязкости.

В работе [4], где на основе линейной теории исследовалось влияние колебательного возбуждения на устойчивость сжимаемого течения Куэтта в невязком пределе, было зафиксировано заметное стабилизирующее воздействие колебательной релаксации на невязкие акустические моды. В [5] рассматривалась линейная устойчивость вязких возмущений в сверхзвуковом течении Куэтта колебательно возбужденного и совершенного газа с независимыми от температуры коэффициентами переноса. Основным результатом этой работы состоял в том, что колебательное возбуждение на уровне, который достигим, например, в нерасчетных струях или с помощью лазерной накачки, увеличивает устойчивость течения в широком диапазоне чисел Маха и Рейнольдса. При этом относительное увеличение критического числа Рейнольдса по сравнению с совершенным газом может достигать 12 %.

В связи с отмеченным в [3] чрезвычайно сильным влиянием «вязкой» стратификации на критические параметры течения возникает естественный вопрос. Сохранится ли в этих условиях заметное стабилизирующее влияние колебательной релаксации? Кроме того, представляет самостоятельный интерес провести подробное сравнение характеристик линейной устойчивости течения Куэтта совершенного газа для двух моделей вязкости. Это позволит сделать заключение о том, насколько в данном случае содержательна более простая модель постоянной вязкости, одним из преимуществ которой является возможность использовать при линеаризации известное точное решение уравнений Навье – Стокса.

Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается линейная устойчивость плоского вязкого течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. В координатной плоскости поток ограничен двумя бесконечными параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии h друг от друга. Считается, что плоскость $y = 0$ покоится, а граница $y = h$ движется равномерно в собственной плоскости со скоростью U_0 . Течение описывается в рамках модели двухтемпературной аэродинамики, в которых учитывается зависимость коэффициентов переноса от температуры потока [6–8]. В частности, для вязкости, как и в [1–3], использовалась формула Сазерленда [9]. Обусловленные поступательным λ_t , вращательным λ_r и колебательным λ_v движением молекул газа коэффициенты теплопроводности определяются соотношениями Эйкена [6–8]. Предполагается, что удельные теплоемкости не зависят от статической (поступательной) T и колебательной T_v температур газа и постоянны. В качестве характерных величин для обезразмеривания были выбраны ширина канала h , скорость границы U_0 , плотность ρ_0 и температура T_0 основного течения на движущейся границе канала и образованные из них время $t_0 = L/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$. Коэффициенты переноса обезразмеривались на их значения при температуре T_0 . В безразмерных переменных система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta(T) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta(T) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right]; \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + (\gamma - 1) \rho T \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\gamma}{\text{RePr}} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_v \rho (T_v - T)}{\tau} +$$

$$+ \frac{\gamma(\gamma - 1) M^2 \eta(T)}{2 \text{Re}} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \left(\alpha_1 - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right]; \quad (3)$$

$$\gamma_v \rho \left(\frac{\partial T_v}{\partial t} + u_i \frac{\partial T_v}{\partial x_i} \right) = \frac{20 \gamma \gamma_v}{33 \text{RePr}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta(T) \frac{\partial T_v}{\partial x_i} \right] - \frac{\gamma_v \rho (T_v - T)}{\tau}; \quad (4)$$

$$\gamma M^2 p = \rho T, \quad \gamma_v = \frac{\gamma_{\text{vib}}}{1 - \gamma_{\text{vib}}}, \quad i, j = 1, 2, \quad (5)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Параметры, входящие в уравнения системы (1) – (5), определяются следующим образом. Коэффициент $\alpha_1 = \eta_{0,b}/\eta_0$ есть отношение объемной и сдвиговой вязкостей. Коэффициент $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, $c_v = c_{vt} + c_{vr}$, $c_p = c_v + R$ – соответственно удельные теплоемкости при постоянных объеме и давлении, где выделены составляющие, обусловленные поступательным c_{vt} и вращательным c_{vr} движением молекул газа, R – газовая постоянная. Коэффициент $\gamma_{\text{vib}} = c_{vv}/(c_{vt} + c_{vr} + c_{vv})$ характеризует степень неравновесности колебательной моды, c_{vv} – удельная теплоемкость при постоянном объеме, связанная с колебательным движением молекул газа, τ – характерное время колебательной релаксации. Параметры $\text{Re} = \rho_0 h U_0 / \eta_0$ и $M = U_0 / (\gamma R T_0)^{1/2}$ есть соответственно числа Рейнольдса и Маха несущего потока. $\text{Pr} = \eta_0 c_v / \lambda_0$ – число Прандтля, где коэффициент теплопроводности $\lambda_0 = \lambda_{0t} + \lambda_{0r}$ определяется поступательными и вращательными степенями свободы молекул газа.

Нижний предел $\gamma_{\text{vib}} = 0$ соответствует случаю невозбуждения колебательной моды молекул. С другой стороны, равномерное распределение энергии по степеням свободы молекул не является здесь верхним пределом для параметра γ_{vib} . Поскольку закон равномерного распределения энергии неприменим в неравновесной ситуации, описываемой системой уравнений (1) – (5), когда разрыв между статической температурой потока T и колебательной температурой T_v может быть достаточно велик. В [6] показано, что при $T = 300$ К неравновесная теплоемкость $c_{vv} \approx 1.8R$. Используя равномерное распределение энергии в состоянии термодинамического квазиравновесия по поступательным и вращательным модам молекул, получаем, что параметр $\gamma_{\text{vib}} \approx 0.42$. С ростом разрыва между температурами T_v и T значение γ_{vib} увеличивается, приближаясь в пределе к единице, когда энергия колебательной моды молекул существенно превышает температуру квазиравновесного термостата, определяемого поступательными и вращательными степенями свободы молекул. В расчетах максимальное значение параметра γ_{vib} было выбрано равным $\gamma_{\text{vib}} = 0.4$, с тем, чтобы остаться в рамках используемой модели, избежав возбуждения высоких колебательных уровней энергии.

В качестве решения для среднего течения (несущего потока) выбрано равновесное стационарное решение, где $\gamma_{\text{vib}} = 0$ и $T = T_v$. При этом считалось, что гидродинамические переменные среднего течения зависят только от поперечной координаты y :

$$u_x = U_s(y), u_y = 0, T = T_s(y), T_v = T_{v,s}(y) = T_s(y), p = p_s(y) \quad (6)$$

и удовлетворяют граничным условиям

$$U_s(0) = 0, U_s(1) = 1, \left. \frac{dT_s}{dy} \right|_{y=0} = 0, T_s(1) = 1, p_s(0) = p_s(1) = \frac{1}{\gamma M^2}. \quad (7)$$

В силу геометрии профилей среднего течения (6) уравнение неразрывности (1) удовлетворяется автоматически. Уравнение Ландау – Теллера (4) также выполняется тождественно, поскольку для рассматриваемого равновесного решения параметр $\gamma_{\text{vib}} = 0$ и $T = T_v$. При этом из уравнений импульсов (2), энергии (3) и уравнения (7) определяются $\rho_s T_s = 1$, $p_s(y) = 1/(\gamma M^2)$, а профили скорости $U_s(y)$ и температуры $T_s(y)$ вычисляются из системы уравнений:

$$\frac{d}{dy} \left(\eta_s \frac{dU_s}{dy} \right) = 0, \quad \frac{d}{dy} \left(\eta_s \frac{dT_s}{dy} \right) + (\gamma - 1) \text{Pr} M^2 \eta_s \left(\frac{dU_s}{dy} \right)^2 = 0, \quad \eta_s = \eta(T_s). \quad (8)$$

Для вязкости, определяемой формулой Сазерленда [2–4]

$$\eta_s(y) = \frac{1,5 T_s^{3/2}(y)}{T_s(y) + 0,5}, \quad (9)$$

и различных чисел Маха M при $\gamma = 1.4$; $\text{Pr} = 3/4$ система (8) с данными Коши (7) интегрировалась численно с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка на интервале $y = [0; 1]$ с шагом $\Delta y = 10^{-3}$. Результаты расчетов зависимостей скорости $U_s(y)$ и температуры $T_s(y)$ для $M = 0.5$; 2 и 5 представлены на рис. 1.

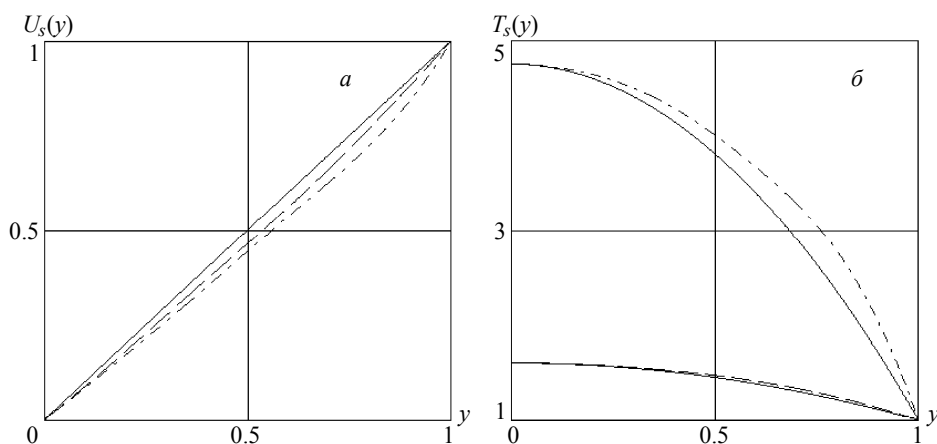


Рис. 1. Профили скорости $U_s(y)$ (а) и температуры $T_s(y)$ (б) среднего течения (сплошная линия – модель постоянной вязкости при $M = 0.5$; штриховая и штрихпунктирная линии – модель Сазерленда (9) при $M = 2$ и 5)

Fig. 1. Profiles of the (a) velocity $U_s(y)$ and (б) temperature $T_s(y)$ of the average flow (the solid line is the constant viscosity model at $M = 0.5$; the dotted and dashed lines are the Sutherland model (9) at $M = 2$ and 5)

Мгновенные значения гидродинамических переменных представим в виде

$$u_x = U_s + \hat{u}_x, u_y = \hat{u}_y, \rho = \rho_s + \hat{\rho}, T = T_s + \hat{T}, T_v = T_{v,s} + \hat{T}_v, \\ p = p_s + \hat{p}, \eta = \eta_s + \hat{\eta} = \eta_s + \eta_{T,s} \hat{T}, \quad \eta_{T,s} = \left. \frac{d\eta}{dT} \right|_{T=T_s}, \quad (10)$$

где возмущения гидродинамических переменных представляются в виде бегущих плоских волн

$$\mathbf{q}(x, y, t) = \mathbf{q}_0(y) e^{i\alpha(x-ct)}, \quad \mathbf{q}(x, y, t) = (\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{\rho}, \hat{T}, \hat{T}_v, \hat{p}), \quad \mathbf{q}_0(y) = (u, \alpha v, \rho, \theta, \theta_v, p). \quad (11)$$

Здесь α – волновое число вдоль периодической переменной x , $c = c_r + ic_i$ – комплексная фазовая скорость, i – мнимая единица. Подставляя (10), (11) в уравнения системы (1) – (5) и линеаризуя ее относительно среднего течения, получаем систему уравнений для амплитуды возмущений:

$$D\rho + \alpha\rho'_s v + \rho_s \sigma = 0, \\ \frac{\eta_s}{\text{Re}} \Delta u - \rho_s D u - \alpha\rho_s v U'_s - i\alpha\varepsilon + \frac{\eta_{T,s} T'_s}{\text{Re}} u' + \frac{(\eta_{T,s} U'_s)'}{\text{Re}} \theta + \frac{\eta_{T,s} U'_s}{\text{Re}} \theta' = 0, \\ \frac{\alpha}{\text{Re}} \Delta v - \alpha\rho_s D v - \varepsilon' + \frac{\alpha\eta_{T,s} T'_s}{\text{Re}} v' = 0, \\ \frac{\gamma\eta_s}{\text{RePr}} \Delta \theta - \rho_s D \theta - \alpha\rho_s v T'_s - \alpha(\gamma-1)\sigma + \frac{2\gamma(\gamma-1)\eta_s M^2}{\text{Re}} (u' + i\alpha^2 v) U'_s + \frac{\gamma_v \rho_s}{\tau} (\theta_v - \theta) + \\ + \frac{2\gamma\eta_{T,s} T'_s}{\text{RePr}} \theta' + \left[\frac{\gamma(\eta_{T,s} T'_s)'}{\text{RePr}} + \frac{\gamma(\gamma-1)\eta_{T,s} M^2 U'^2_s}{\text{Re}} \right] \theta = 0; \quad (12) \\ \frac{20\gamma\gamma_v}{33\text{RePr}} \Delta \theta_v - \gamma_v \rho_s D \theta_v - \alpha\gamma_v \rho_s v T'_s - \frac{\gamma_v \rho_s}{\tau} (\theta_v - \theta) + \frac{20\gamma\gamma_v \eta_{T,s} T'_s}{33\text{RePr}} \theta'_v + \\ + \frac{20\gamma\gamma_v \eta_{T,s} T'_s}{33\text{RePr}} \theta' + \frac{20\gamma\gamma_v (\eta_{T,s} T'_s)'}{33\text{RePr}} \theta = 0, \\ \gamma M^2 p = \rho_s \theta + \rho T_s, \\ u|_{y=0} = u|_{y=1} = v|_{y=0} = v|_{y=1} = \theta|_{y=0} = \theta|_{y=1} = \theta_v|_{y=0} = \theta_v|_{y=1} = p|_{y=0} = p|_{y=1} = 0, \quad (13)$$

$$D = i\alpha(U_s - c), \quad \sigma = v' + iu, \quad \varepsilon = p - \frac{\alpha\eta_s}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \sigma, \quad \gamma_v = \frac{\gamma_{\text{vib}}}{1 - \gamma_{\text{vib}}}, \quad \Delta = \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2.$$

Здесь и далее штрих у функций обозначает дифференцирование по переменной y .

Спектральная задача и метод решения

Система (12) вместе с однородными граничными условиями (13) определяет спектральную задачу, в которой собственными значениями являются комплексные фазовые скорости возмущений $c = c_r + ic_i$, а числа Маха M , Рейнольдса Re и

волновое число α служат параметрами. Для расчета собственных значений $c = c_r + ic_i$ неустойчивых мод система (12) сводилась к матричному виду и далее решалась численно в среде пакета Matlab. Использовался метод коллокаций [10, 11], ранее примененный в работах [12, 13]. Следует отметить, что в работах [1–3], посвященных исследованию линейной устойчивости течения Куэтта в невозбужденном совершенном газе, также применялся метод коллокаций, причем в [1–3] использовался инструмент Matlab. В данном случае спектральная задача записывалась в матричном представлении:

$$A_1 \varphi'' + A_2 \varphi' + A_3 \varphi = c A_4 \varphi, \quad \varphi|_{y=0} = \varphi|_{y=1} = 0, \quad (14)$$

где $\varphi = (\rho, u, v, \theta, \theta_v)$, а матрицы A_k ($k = 1, 2, 3, 4$) размера (5×5) имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\eta_s}{\text{Re}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha \eta_s}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma \eta_s}{\text{RePr}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{20 \gamma \gamma_v \eta_s}{33 \text{RePr}} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\rho_s & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & \frac{i \alpha^2 \eta_s}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) & a_5 & 0 \\ -\frac{T_s}{\gamma M^2} & \frac{i \alpha \eta_s}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) & \alpha a_2 & -\frac{\rho_s}{\gamma M^2} & 0 \\ 0 & \frac{2 \gamma (\gamma - 1) \eta_s M^2 U'_s}{\text{Re}} & -\alpha (\gamma - 1) & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & a_4 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -i U_s & -i \rho_s & -\rho'_s & 0 & 0 \\ \frac{i \alpha T_s}{\gamma M^2} & -\alpha b_1 & -\alpha \rho_s U'_s & -\frac{i \alpha \rho_s}{\gamma M^2} + a'_5 & 0 \\ -\frac{T'_s}{\gamma M^2} & i \alpha b_5 & -\alpha^2 b_2 & -\frac{\rho'_s}{\gamma M^2} & 0 \\ 0 & -i \alpha (\gamma - 1) & \alpha b_6 & -b_3 & \frac{\gamma_v \rho_s}{\tau} \\ 0 & 0 & -\alpha \gamma_v \rho_s T'_s & \gamma_v b_7 & -\gamma_v b_4 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i \alpha \rho_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \alpha^2 \rho_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \alpha \rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \alpha \gamma_v \rho_s \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\eta_{T,s} T'_s}{\text{Re}}, a_2 = a_1 \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right), a_3 = \frac{2\gamma a_1}{\text{Pr}}, a_4 = \frac{10\gamma_v a_3}{33}, \\
a_5 &= \frac{\eta_{T,s} U'_s}{\text{Re}}, b_1 = i\rho_s U_s + \frac{\eta_s \alpha}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right), b_2 = i\rho_s U_s + \frac{\eta_s \alpha}{\text{Re}}, \\
b_3 &= i\alpha\rho_s U_s + \frac{\gamma_v \rho_s}{\tau} + \frac{\gamma \eta_s \alpha^2}{\text{RePr}} - \frac{\gamma a'_1}{\text{Pr}} - \gamma(\gamma-1)a_5 M^2 U'_s, b_4 = i\alpha\rho_s U_s + \frac{\rho_s}{\tau} + \frac{20\gamma \eta_s \alpha^2}{33\text{RePr}}, \\
b_5 &= a_1 \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right), b_6 = \frac{2i\alpha\gamma(\gamma-1)\eta_s M^2 U'_s}{\text{Re}} - \rho_s T'_s, b_7 = \frac{\gamma_v \rho_s}{\tau} + \frac{20\gamma\gamma_v(\eta_{T,s} T'_s)'}{33\text{RePr}}.
\end{aligned}$$

В качестве узлов коллокации выбирались точки Гаусса – Лобатто

$$y_n = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi n}{N} \right) \right], \quad n=0,1,\dots,N,$$

в которых полином Чебышева N -й степени имеет экстремумы на отрезке $y = [0, 1]$. Дифференциальные операторы первого порядка, входящие в спектральную задачу, аппроксимируются на данном шаблоне матрицей коллокационных производных D_N^1 [10, 11] размером $(N+1) \times (N+1)$. Дифференциальные операторы второго порядка аппроксимируются суперпозицией $D_N^2 = D_N^1 D_N^1$ [10, 11].

Построенная таким образом дискретная аппроксимация позволяет свести задачу (14) к обобщенной задаче на собственные значения (линейному спектральному матричному пучку) относительно спектрального параметра c :

$$\sum_{j=0}^{5N+4} (G_{kj} - cF_{kj})r_j = 0, \quad k=0,1,2,\dots,5N+4, \quad (15)$$

где вектор неизвестных \mathbf{r} размером $5(N+1)$ состоит из значений собственных функций в узлах коллокации:

$$\mathbf{r}(x_2) = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N, u_0, u_1, \dots, u_N, v_0, v_1, \dots, v_N, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N, \theta_{v,0}, \theta_{v,1}, \dots, \theta_{v,N}),$$

а матрицы G, F размером $5(N+1) \times 5(N+1)$ вычисляются с использованием специальной процедуры Matlab по формулам

$$G = A_1 \otimes D_N^2 + A_2 \otimes D_N^1 + A_3 \otimes I_N, \quad F = A_4 \otimes I_N$$

(знак « \otimes » обозначает прямое (тензорное) произведение матриц [14]), I_N – единичная матрица размером $(N+1) \times (N+1)$. Однородные граничные условия (13) для уравнения (15) учитываются неявно через оператор D_N^1 и на дискретном уровне реализуются заменой матриц D_N^k на окаймленные матрицы размером $(N-1) \times (N-1)$, которые получаются при выполнении условий [10, 11]:

$$D_{0,j}^k = D_{N,j}^k = 0, \quad D_{i,0}^k = D_{i,N}^k = 0, \quad i=0,1,\dots,N, \quad j=0,1,\dots,N, \quad k=1,2.$$

Для нахождения всех собственных значений и функций обобщенной спектральной задачи (15) использовалась процедура Matlab, реализующая QZ-алгоритм, который позволяет одновременным ортогональным преобразованием привести пару матриц G, F к обобщенной верхней треугольной форме [15]. В результате применения данной процедуры для фиксированных значений чисел Рей-

нольдса Re и Маха M , объемной вязкости α_1 , степени неравновесности колебательной энергии γ_{vib} , времени колебательной релаксации τ и волнового числа α получается набор $(N+1)$ -го собственных значений $c = c_r + ic_i$.

Для проверки точности вычислений параллельно были проведены расчеты собственных значений $c = c_r + ic_i$ с помощью метода «стрельбы». Для этого уравнения (12) заменялись фундаментальной системой уравнений и граничными условиями для вещественных и мнимых частей функций ρ , u , v , θ и θ_v . Полученная система при фиксированных наборах параметров Re , M , γ_{vib} , τ и α интегрировалась численно с помощью процедуры Рунге-Кутты четвертого порядка на интервалах $y \in [0; 0.5]$ и $y \in [0.5; 1]$ с шагом $\Delta y = 10^{-3}$. Шаг по волновому числу $\Delta \alpha = 10^{-3}$. Точкой «прицеливания» служила середина канала – $y = 0.5$. Значения c_r и c_i подбирались таким образом, чтобы вычисленные «слева» и «справа» в точке $y = 0.5$ значения функций ρ_r , u_r , v_r , θ_r , $\theta_{v,r}$ и ρ_i , u_i , v_i , θ_i , $\theta_{v,i}$ совпадали с точностью до 10^{-8} . Соответствующее такому совпадению значение c принималось в качестве собственного значения при заданном наборе параметров Re , M , α_1 , γ_{vib} , τ , α . Сравнение результатов, полученных с помощью методов коллокаций и «стрельбы» показало, что различия в значениях $c = c_r + ic_i$, наблюдаются лишь в шестом-седьмом десятичных знаках после запятой. Таким образом, была обеспечена необходимая точность вычисления инкрементов (декрементов) возмущений.

Расчеты велись при следующих значениях параметров: $\gamma_{vib} = 0 - 0.4$; $\tau = 10^{-2} - 10$; $\alpha_1 = 0 - 2$; $M = 0.5 - 25$; $Pr = 3/4$; $\gamma = 7/5$. Значение волнового числа менялось в диапазоне $\alpha = 0 - 10$ с шагом $\Delta \alpha = 10^{-3}$. Число узлов коллокаций в интервале $y \in [0; 1]$ варьировалось в диапазоне от $N+1 = 100$ до $N+1 = 500$ и в большинстве расчетов принималось равным $N+1 = 300$.

Результаты расчетов

Для модели постоянной вязкости и модели Сазерленда параметрические расчеты спектральной задачи (15) показали, что изменение значений времени колебательной релаксации в диапазоне $10^{-2} \leq \tau \leq 10$ слабо влияет на поведение спектров вязких возмущений. Поэтому ниже расчетные данные приведены для одного значения времени $\tau = 1$.

Показано, что для модели постоянной вязкости и модели Сазерленда множество собственных значений линейной задачи устойчивости сверхзвукового вязкого течения Куэтта термически возбужденного молекулярного газа, как и в случае совершенного газа, делится на два непересекающихся множества S_a и S_v [1–3]. Собственные значения из множества S_a сходятся в пределе $Re \rightarrow \infty$ к собственным значениям для невязких акустических мод I, II, III и т.д. Собственные значения из S_v не имеют асимптотической связи с невязкой задачей и характеризуются большими декрементами затухания [16]. Разбиение множества мод S_a на четные и нечетные, классифицированное для невязких возмущений в равновесном и колебательно-возбужденном газах [4], сохраняется и для вязких возмущений. Представление об общей структуре спектра вязких возмущений дает рис. 2.

Графики зависимостей волновых скоростей $c_r(\alpha)$ для семейств четных и нечетных мод возмущений из S_a приведены на рис. 3. Здесь сплошной и штриховой линиями показаны зависимости $c_r(\alpha)$ для четных и нечетных мод невязких возмущений соответственно для невозбужденного ($\gamma_{vib} = 0$) и колебательно-возбужденного ($\gamma_{vib} = 0.4$) газов. Из рис. 3 следует, что диссипативные эффекты, связанные с «вязкой» стратификацией, варьированием числа Рейнольдса и с возбужде-

нием внутренних степеней свободы молекул, практически не меняют поведения кривых $c_r(\alpha)$, рассчитанных в невязком приближении при $Re \rightarrow \infty$ [4]. Выделенные моды I и II, как видно из рис. 3, раньше других переходят в интервал $c_r = [0, 1]$, где, как было показано в [4, 12], возможно развитие невязкой неустойчивости, и в этом смысле являются наиболее неустойчивыми.

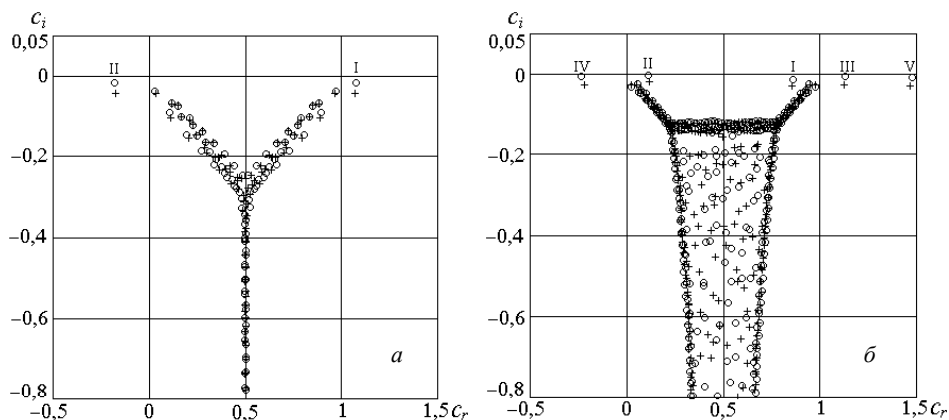


Рис. 2. Спектры собственных значений для $M = 5$, $Re = 5 \cdot 10^5$ при $\alpha = 0.1$ (а) и $\alpha = 2.5$ (б) (кружки – совершенный газ, крестики – максимальное возбуждение колебательной моды)

Fig. 2. Spectra of eigenvalues for $M = 5$ and $Re = 5 \cdot 10^5$ at $\alpha = (a) 0.1$ and $(b) 2.5$ (the circles denote the perfect gas; the crosses, the maximum excitation of the vibrational mode)

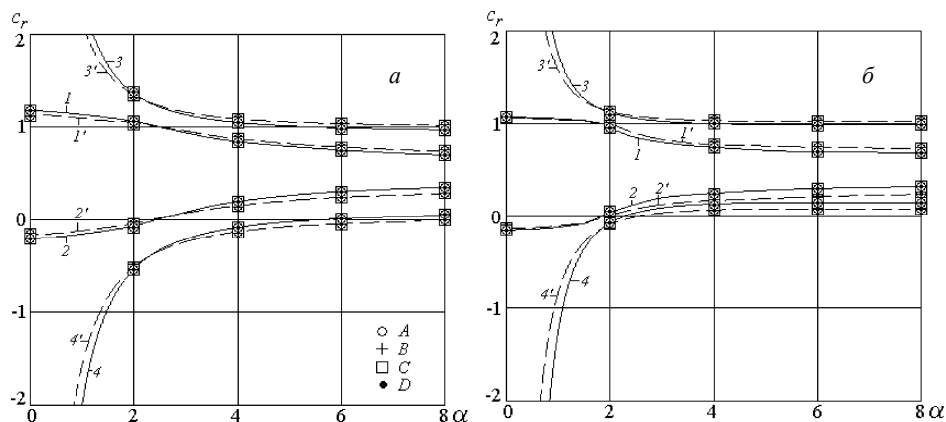


Рис. 3. Зависимости $c_r(\alpha)$ для чисел Маха $M = 3$ (а) и $M = 5$ (б) при $\alpha_1 = 0$ (1, 1' – мода I; 2, 2' – мода II; 3, 3' – мода III; 4, 4' – мода IV; сплошные линии – невязкие моды при $\gamma_{vib} = 0$; штриховые – невязкие моды при $\gamma_{vib} = 0.4$; A – модель постоянной вязкости при $Re = 10^5$; B – модель постоянной вязкости при $Re = 10^6$; C – модель Сазерленда (9) при $Re = 10^5$; D – модель Сазерленда (9) при $Re = 10^6$)

Fig. 3. Dependencies $c_r(\alpha)$ for a Mach number $M = (a) 3$ and $(b) 5$ at $\alpha_1 = 0$ (1, 1' are mode I; 2, 2' are mode II; 3, 3' are mode III; 4, 4' are mode IV; solid lines, non-viscous modes at $\gamma_{vib} = 0$; dashed line, non-viscous modes at $\gamma_{vib} = 0.4$; A, constant viscosity model at $Re = 10^5$; B, constant viscosity model at $Re = 10^6$; C, Sutherland model (9) at $Re = 10^5$; D, Sutherland model (9) at $Re = 10^6$)

При числе Маха $M = 2$ кривые мод I и II практически зеркально симметричны относительно линии $c_r = 0.5$, соответствующей положению критического слоя на оси канала. Можно обратить внимание, что с ростом числа Маха точки перехода мод I и II в интервал $c_r = [0; 1]$ сдвигаются в область меньших волновых чисел α , а симметрия относительно $c_r = 0.5$ несколько нарушается. Последнее связано с увеличением несимметрии профиля температуры среднего течения T_s при возрастании числа Маха (см. рис. 1).

Сравнение декрементов (инкрементов) $\omega_i = \alpha c_i$ мод I и II для двух моделей вязкости в совершенном газе представлено на рис. 4. На графиках рис. 4, а можно заметить, что дестабилизирующее влияние вязкости на устойчивую [4] в невязком пределе моду I при $M = 3$ имеет место для обеих моделей. При этом влияние «вязкой» стратификации по сравнению со случаем $\eta = \text{const}$ [5] сводится к смещению зоны неустойчивости в сторону больших волновых чисел и небольшому снижению максимального инкремента. Следует отметить, что такая вязкая дестабилизация моды I проявляется лишь в очень узком диапазоне чисел Маха $M \approx 3$. При всех других числах Маха мода I остается устойчивой и вязкость оказывает на нее исключительно дополнительное стабилизирующее воздействие. В частности, это подтверждается кривыми декрементов для $M = 5$.

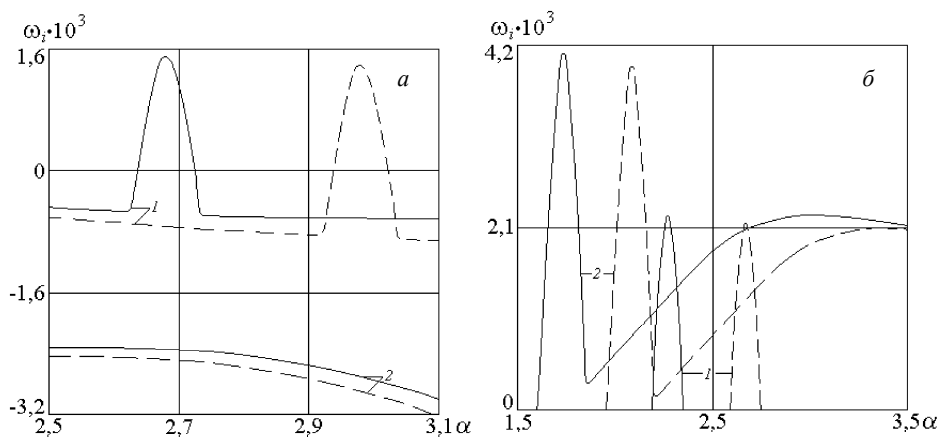


Рис. 4. Зависимости $\omega_i(\alpha)$ для совершенного газа при $Re = 5 \cdot 10^5$ (а – мода I, б – мода II; 1 – $M = 3$, 2 – $M = 5$; сплошные линии – модель постоянной вязкости, штриховые – модель Сазерленда (9))

Fig. 4. Dependencies $\omega_i(\alpha)$ for a perfect gas at $Re = 5 \cdot 10^5$ (а, mode I; б, mode II; $M = (1) 3$ and $(2) 5$; the solid line is the constant viscosity model; the dashed line, Sutherland model (9))

Как следует из рис. 4, б стратификация также сдвигает кривые инкрементов моды II в сторону коротковолновых возмущений, незначительно снижая их максимумы. Вместе с тем для обеих моделей вблизи $\alpha \approx 1.5$ при $M = 5$ фиксируется резкое локальное возрастание инкремента ω_i , вызванное дополнительным дестабилизирующим воздействием вязкости. Этот эффект сохраняется и при дальнейшем продвижении в зону дальнего сверхзвука [2].

Влияние возбуждения колебательной моды на наиболее неустойчивые акустические моды возмущений в стратифицированном течении можно оценить по графикам рис. 5. Видно, что в основной части диапазона неустойчивости возбужде-

ние приводит к уменьшению инкрементов нарастания. При этом относительная величина подавления возмущений остается такой же, как и для модели постоянной вязкости [5].

Общее представление об устойчивости течения Куэтта дают кривые нейтральной устойчивости $\omega_i(\text{Re}, \alpha) = 0$ на рис. 6. Влияние возбуждения на стратифицированный поток при $M = 3$ для обеих мод I и II представлено графиками рис. 6, а. Пунктирные кривые, отвечающие предельному возбуждению колебательной моды, можно рассматривать как сдвиг соответствующих сплошных кривых для совершенного невозбужденного газа в область больших чисел Re и α без изменения формы, в частности без деформации внутренней области неустойчивости. Точки K_1, K'_1 соответствуют минимальным (критическим) числам Рейнольдса $\text{Re}_{\text{кр}}$, определяющим порог, ниже которого все возмущения затухают. Видно, что наиболее неустойчивой является мода II, у которой существенно меньше критические числа Рейнольдса и заметно шире внутренняя зона неустойчивости в направлении оси волновых чисел α . Можно констатировать, что учет зависимости вязкости от температуры никак не сказывается на диссипативном эффекте колебательного возбуждения, которое повышает устойчивость обеих мод, увеличивая критические числа Рейнольдса.

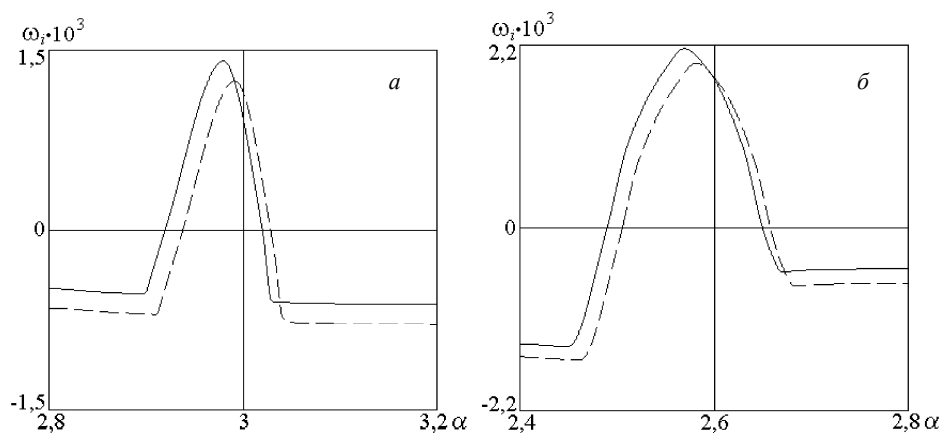


Рис. 5. Зависимости $\omega_i(\alpha)$ для модели Сазерленда (9) при $\text{Re} = 5 \cdot 10^5$, $M = 3$ (а – мода I; б – мода II; сплошные линии – совершенный газ, штриховые – колебательно-возбужденный газ ($\alpha_1 = 2$, $\gamma_{\text{vib}} = 0.4$))

Fig. 5. Dependencies $\omega_i(\alpha)$ for Sutherland model (9) at $\text{Re} = 5 \cdot 10^5$, $M = 3$ (а, mode I; б, mode II; the solid line is the perfect gas; the dashed line, the vibrationally excited gas ($\alpha_1 = 2$, $\gamma_{\text{vib}} = 0.4$))

На рис. 6, б сравниваются нейтральные кривые для совершенного газа и обеих моделей вязкости при числе Маха $M = 5$. Анализ графиков позволяет заключить, что во всем диапазоне чисел Рейнольдса влияние стратификации по вязкости сводится в основном к усилению диссипативного эффекта, проявляясь в сужении зоны неустойчивости и существенном возрастании критического числа Рейнольдса, что видно из сравнения точек K_2, K'_2 . Вместе с тем характерные особенности поведения кривых нейтральной устойчивости в дальней сверхзвуковой области при $M \geq 5$ остаются неизменными для обеих моделей. В частности, здесь область неустойчивости при возрастании числа Рейнольдса расширяется (ср. рис. 6, а).

Кроме того, в обоих случаях кривые имеют два минимума по числу Рейнольдса. При этом острый пик вблизи $\alpha \approx 1.5$ соответствует острому пику инкремента нарастания на графике рис. 4, б, связанному с дополнительной вязкой неустойчивостью. Минимум на пологой части кривых, наоборот, определяется диссипативным влиянием вязкости на максимальный инкремент инерционной неустойчивости при $M = 5$ [4].

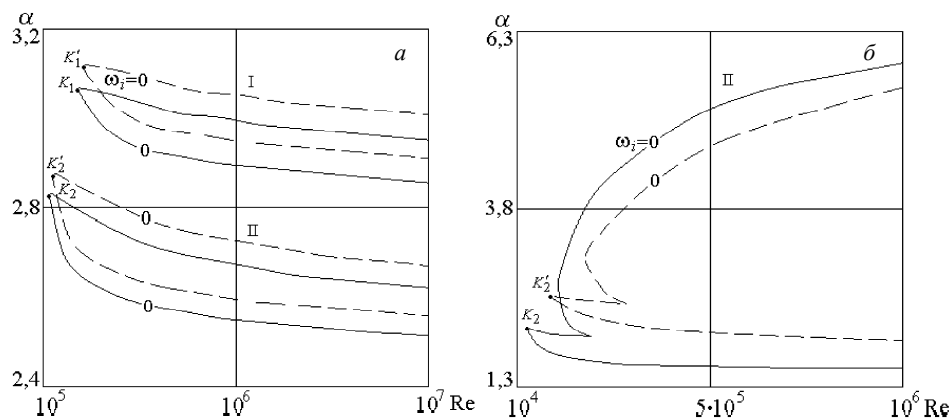


Рис. 6. Кривые нейтральной устойчивости $\omega_i(Re, \alpha) = 0$ (I – мода I, II – мода II; K_1, K'_1 – критические точки моды I, K_2, K'_2 – критические точки моды II; а – модель Сазерленда (9) при $M = 3$ (сплошные линии – совершенный газ, штриховые – колебательно-возбужденный газ ($\alpha_1 = 2, \gamma_{vib} = 0.4$)); б – совершенный газ при $M = 5$ (штриховая – модель Сазерленда (9), сплошная линия – модели постоянной вязкости))

Fig. 6. Curves of neutral stability $\omega_i(Re, \alpha) = 0$ (I, mode I; II, mode II; K_1, K'_1 , critical points of mode I; K_2, K'_2 , critical points of mode II; а, model of Sutherland (9) at $M = 3$ (solid line, the perfect gas; dashed line, the vibrationally excited gas ($\alpha_1 = 2, \gamma_{vib} = 0.4$)); б, perfect gas at $M = 5$ (dashed line, Sutherland model (9); solid line, the constant viscosity model))

Поведение кривых нейтральной устойчивости $\omega_i(M, \alpha) = 0$ и изолиний фазовых скоростей $\omega_r(M, \alpha) = \text{const}$ моды II во всем расчетном диапазоне чисел Маха для обеих моделей вязкости в совершенном газе показано на рис. 7. Из графиков $\omega_r(M, \alpha) = \text{const}$ следует, что независимость фазовых скоростей от диссипативных эффектов, отмеченная на рис. 3 для $M = 3; 5$, имеет место для всех чисел M . Кривые $\omega_i(M, \alpha) = 0$ показывают, что расхождение между моделями вязкости резко усиливается с возрастанием числа Рейнольдса. Это прослеживается по максимальному размеру основной области неустойчивости вдоль оси M . Если для модели Сазерленда этот размер остается неизменным, то в случае постоянной вязкости при $Re = 10^6$ обе ветви кривой выходят далеко за предел $M = 25$.

Графики рис. 8 дают возможность качественно оценить влияние модели вязкости, сжимаемости и колебательного возбуждения на критические параметры моды II. Можно видеть, что во всем диапазоне чисел Маха для совершенного газа «вязкая» стратификация в несколько раз увеличивает значение Re_{cr} по сравнению со случаем постоянной вязкости, хотя длины волн наиболее неустойчивых возмущений (критические волновые числа) при переходе от модели к модели меняются незначительно. Для обеих моделей возбуждение колебательной моды увеличивает критические числа Рейнольдса и критические волновые числа при всех числах

Маха, хотя и существенно меньше, чем стратификация. Видно, что немонотонность всех кривых в зависимости от числа Маха имеет одинаковый характер: в области умеренных сверхзвуковых значений $M \leq 6$ с ростом сжимаемости понижается устойчивость течения, а ее дальнейшее увеличение, наоборот, стабилизирует поток.

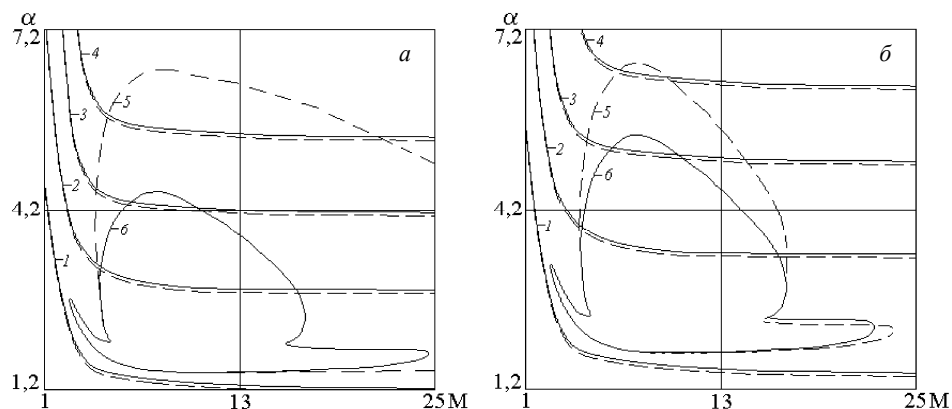


Рис. 7. Изолинии $\omega_r(M, \alpha)$ и $\omega_r(M, \alpha)$ моды II для совершенного газа (a – модель постоянной вязкости; b – модель Сазерленда (9); кр. 1 – $\omega_r = 0$, кр. 2 – $\omega_r = 1$, кр. 3 – $\omega_r = 2$, кр. 4 – $\omega_r = 3$; кр. 5, 6 – $\omega_r = 0$; сплошные линии – $Re = 2 \cdot 10^5$, штриховые – $Re = 2 \cdot 10^6$)

Fig. 7. Isolines of $\omega_r(M, \alpha)$ and $\omega_r(M, \alpha)$ of mode II for the perfect gas (a , the constant viscosity model; b , Sutherland model (9); $\omega_r = (1) 0, (2) 1, (3) 2, (4) 3$, and $(5, 6) 0$; solid line, $Re = 2 \cdot 10^5$, dashed line, $Re = 2 \cdot 10^6$)

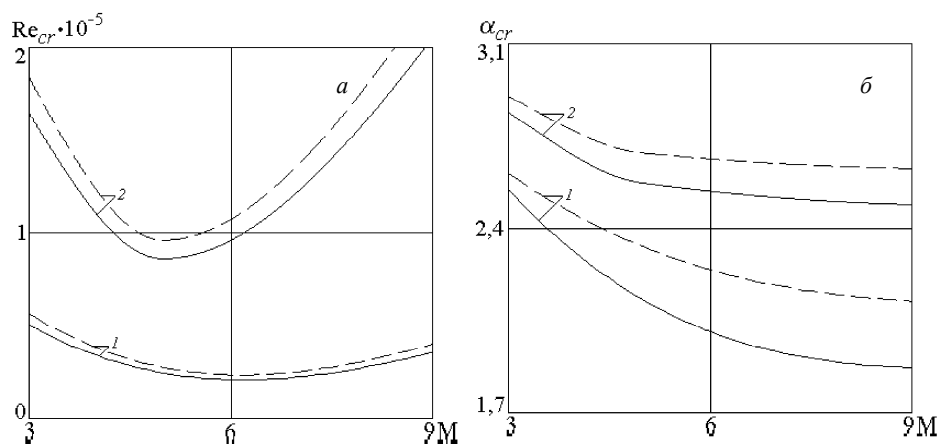


Рис. 8. Зависимости $Re_{cr}(M)$ (a) и $\alpha_{cr}(M)$ (b) (1 – модель постоянной вязкости, 2 – модель Сазерленда (9); сплошные линии – совершенный газ, штриховые – колебательно-возбужденный газ ($\alpha_1 = 2, \gamma_{vib} = 0.4$))

Fig. 8. Dependencies (a) $Re_{cr}(M)$ and (b) $\alpha_{cr}(M)$ (1, the constant viscosity model; 2, Sutherland model (9); solid line, the perfect gas; dashed line, the vibrationally excited gas ($\alpha_1 = 2, \gamma_{vib} = 0.4$))

**Критические числа Рейнольдса Re_{cr}
и соответствующие им значения волновых чисел α_{cr}**

M	Совершенный газ ($\alpha_1 = 0, \gamma_{vib} = 0$)				Колебательно-возбужденный газ ($\alpha_1 = 2, \gamma_{vib} = 0.4$)			
	Модель постоянной вязкости		Модель Сазерленда (9)		Модель постоянной вязкости		Модель Сазерленда (9)	
	Re_{cr}	α_{cr}	Re_{cr}	α_{cr}	Re_{cr}	α_{cr}	Re_{cr}	α_{cr}
3	50060	2.5460	164870	2.8398	56060	2.6039	184190	2.9025
5	23830	2.1310	85720	2.5688	26930	2.3377	95750	2.6831
7	21640	1.9301	121830	2.5156	24230	2.1801	136080	2.6435
9	35080	1.8706	205110	2.4884	39630	2.1226	229110	2.6241
11	55750	1.8790	308170	2.4851	62720	2.1144	344230	2.6218
13	75240	1.8840	461550	2.4872	84940	2.1119	515550	2.6255
15	85150	1.8110	655850	2.4950	96150	2.0660	732580	2.6394

Точные количественные оценки влияния каждого рассматриваемого фактора на критические числа Рейнольдса и критические волновые числа моды II можно извлечь из приведенной таблицы. В частности, учет температурной зависимости вязкости по модели Сазерленда (9) при $3 \leq M \leq 15$ увеличивает Re_{cr} от трех до шести раз. При этом α_{cr} возрастает в пределах 30 %. Относительное возрастание чисел Re_{cr} при возбуждении колебательной моды практически совпадает для обеих моделей вязкости и составляет примерно 10–12 %.

Заключение

Численное исследование устойчивости двумерных возмущений в сверхзвуковом течении Куэтта для двух моделей вязкости в совершенном и колебательно возбужденном газах позволяет сделать следующие выводы.

«Вязкая» стратификация совершенного газа в форме модели Сазерленда значительно усиливает стабилизацию течения. В частности, в диапазоне чисел Маха $3 \leq M \leq 15$ критическое число Рейнольдса моды II, остающейся наиболее неустойчивой при всех числах Маха $M \geq 3$, возрастает примерно в 3–6 раз по сравнению с моделью постоянной вязкости, хотя соответствующие волновые числа α увеличиваются в пределах 30 %.

Относительное уменьшение инкрементов нарастания вязких возмущений мод I и II при колебательном возбуждении практически одинаково для обеих моделей вязкости. При этом увеличение критического числа Рейнольдса в обоих случаях лежит в пределах 10–12 %.

Более простая модель постоянной вязкости на качественном уровне полностью воспроизводит все характерные особенности развития вязких возмущений акустических мод I и II в совершенном газе:

Дестабилизация устойчивой в невязком пределе моды I в узком диапазоне волновых чисел α в окрестности $M \approx 3$. Существенное увеличение инкремента нарастания моды II по сравнению с невязким пределом при $\alpha \approx 1.5$ для сверхзвукового диапазона $5 \leq M \leq 15$.

Характерное поведение кривых нейтральной устойчивости в координатах (Re, α) при $5 \leq M \leq 15$, в частности расширение области неустойчивости с ростом Re и наличие двух минимумов на верхней ветви. Немонотонную зависимость критического числа Рейнольдса Re_{cr} от числа Маха с незначительным сдвигом минимума в точку $M \approx 6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y. On the linear stability of compressible plane Couette flow // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 258. P. 131–165.
2. Hu S., Zhong X. Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow // *Phys. Fluids.* 1998. V. 10. No. 3. P. 709–729.
3. Malik M., Dey J., Alam M. Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow // *Phys. Rev. E.* 2008. V. 77. No. 3. P. 036322(15).
4. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Линейная устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. 1. Невязкая задача // *ПМТФ.* 2014. Т. 55. № 2. С. 80–93.
5. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Линейная устойчивость течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. 2. Вязкая задача // *ПМТФ.* 2016. Т. 57. № 2. С. 64–75.
6. Нагнибеда Е. А., Кустова Е.В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2003.
7. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Устойчивость течений релаксирующих молекулярных газов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012.
8. Ферziger Дж., Канер Г.К. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
9. Кэй Дж., Лэби Т. Таблицы физических и химических постоянных. М.: Физматгиз, 1962.
10. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. *Spectral Methods in Fluid Dynamics.* Berlin: Springer, 1988.
11. Trefethen L.N. *Spectral Methods in Matlab.* Philadelphia: Soc. for Indus. and Appl. Math., 2000.
12. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Линейная устойчивость невязкого сдвигового течения колебательно возбужденного двухатомного газа // *ПММ.* 2011. Т. 75. Вып. 4. С. 581–593.
13. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Критические числа Рейнольдса в течении Куэтта колебательно возбужденного двухатомного газа. Энергетический подход // *ПМТФ.* 2012. Т. 53. № 4. С. 57–73.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1970.
15. Moler C.B., Stewart G.W. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 1973. V. 10. No. 2. P. 241–256.
16. Morawetz C.S. The eigenvalues of some stability problems involving viscosity // *J. Rat. Mech. Anal.* 1952. V. 1. P. 579–603.

Статья поступила 16.06.2016 г.

Ershov I.V. (2016) STABILITY OF THE COUETTE FLOW OF A DIATOMIC GAS IN CONDITIONS OF VISCOUS STRATIFICATION AND VIBRATIONAL MODE EXCITATION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 4(42). pp. 84–99

DOI 10.17223/19988621/42/8

Stability of the viscous two-dimensional perturbations in a supersonic plane Couette flow of perfect and vibrationally excited gases is investigated within the framework of the linear theory. In both cases, the transport coefficients were taken to be both constant and dependent on the static temperature of the flow. The Sutherland viscosity law was used in order to take into account the temperature dependence of shear viscosity. The thermal conductivity coefficients caused by the translational, rotational, and vibrational motions of gas molecules are determined by Eucken's relations. A detailed comparison of the stability characteristics of the acoustic modes I and II for both viscosity models is carried out for a perfect gas. It is shown that the «viscous» stratification significantly increases the flow stability as compared to the case of the constant viscosity model. At the same time, the characteristic features in the development of viscous disturbances, typical for the Sutherland model, remain valid in the case of a simpler constant viscosity model. The dissipative effect of the vibrational mode excitation is preserved in the case when the temperature dependence of the transport coefficients is taken into account. The relative reduction caused in the

growth rates of viscous disturbances for modes I and II by the vibrational excitation is practically the same for both viscosity models. The increase in the critical Reynolds number is approximately 12 % in both cases.

Keywords: linear stability, Sutherland formula, vibrational relaxation, acoustic modes.

ERSHOV Igor Valer'evich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russian Federation)

E-mail: i_ershov@ngs.ru

REFERENCES

1. Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y. (1994) On the linear stability of compressible plane Couette flow. *J. Fluid Mech.* 258. pp. 131–165. DOI 10.1017/S0022112094003277.
2. Hu S., Zhong X. (1998) Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow. *Phys. Fluids*. 10(3). pp. 709–729. DOI 10.1063/1.869596.
3. Malik M., Dey J., Alam M. (2008) Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow. *Phys. Rev. E*. 77(3). pp. 036322(15). DOI: 10.1103/PhysRevE.77.036322.
4. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. (2014) Linear stability of the Couette flow of a vibrationally excited gas. 1. Inviscid problem. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 55(2). pp. 258–269. DOI 10.1134/S0021894414020084.
5. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. (2016) Linear stability of the Couette flow of a vibrationally excited gas. 2. Viscous problem. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 57(2). pp. 247–257. DOI 10.1134/S0021894416020073.
6. Nagnibeda E.A., Kustova E.V. (2009) *Non-equilibrium reacting gas flows. Kinetic theory of transport and relaxation processes*. Berlin: Springer.
7. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. (2012) *Ustoychivost' techeniy relaksiruyushchikh molekulyarnykh gazov* [Stability of the flows of the relaxing molecular gases]. Novosibirsk: Izd. Sib. Otd. Ross. Akad. Nauk.
8. Ferziger J.H., Kaper H.G. (1972) *Mathematical theory of transport processes in gases*. Amsterdam, London: North Holland Publ. Comp.
9. Kaye G.W., Laby T.H. (1958) *Tables of physical and chemical constants*. London, New York, Toronto: Longmans, Green & Co.
10. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. (1988) *Spectral methods in fluid dynamics*. Berlin: Springer.
11. Trefethen L.N. (2000) *Spectral methods in Matlab*. Philadelphia: Soc. for Indus. and Appl. Math. DOI 10.1137/1.9780898719598.
12. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. (2011) The linear stability of inviscid shear flow of a vibrationally excited diatomic gas. *J. Appl. Math. Mech.* 75(4). pp. 410–418. DOI 10.1016/j.jappmathmech.2011.09.006.
13. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. (2012) Critical Reynolds number of the Couette flow in a vibrationally excited diatomic gas. Energy approach. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 53(4). pp. 517–531. DOI 10.1134/S0021894412040062.
14. Korn G.A., Korn T.M. (1961) *Mathematical handbook for scientists and engineers*. New York: McGraw-Hill.
15. Moler C.B., Stewart G.W. (1973) An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems. *SIAM J. Numer. Anal.* 10(2). pp. 241–256. DOI 10.1137/0710024.
16. Morawetz C.S. (1952) The eigenvalues of some stability problems involving viscosity. *J. Rat. Mech. Anal.* 1. pp. 579–603.