

Д.В. Березин, Л.А. Нежелская

**СРАВНЕНИЕ МП- И ММ-ОЦЕНОК ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ  
В МОДУЛИРОВАННОМ МАР-ПОТОКЕ СОБЫТИЙ**

Построены оценки длительности мертвого времени методом моментов и методом максимального правдоподобия. Проведены численные эксперименты по сравнению оценок, а также по выявлению зависимости качества оценок от параметров потока и времени наблюдения за потоком. Проведен анализ результатов.

**Ключевые слова:** модулированный МАР-поток событий; метод моментов; метод максимального правдоподобия; оценивание параметров; непродлевающееся мертвое время.

Интенсивное развитие компьютерной техники и информационных технологий послужило стимулом к созданию важной сферы приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей, телекоммуникационных сетей и т.п. Интенсивность входящих потоков событий в системах и сетях массового обслуживания меняется со временем, как правило, случайно, поэтому возникает необходимость исследования математических моделей дважды стохастических потоков событий. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [1]; ко второму классу относятся потоки с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний [2–5]. Отметим, что МАР-потоки событий относятся ко второму классу дважды стохастических потоков и наиболее характерны для реальных телекоммуникационных сетей [6].

При исследовании потоков событий выделяют два класса задач: оценивание состояний потока событий [7–10] и оценивание параметров потока [11–13] по наблюдениям за моментами наступления событий.

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий является мертвое время регистрирующих приборов, которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, наблюдению недоступны. Для того чтобы оценить потери заявок, возникающие из-за эффекта мертвого времени, необходимо оценить его длительность. Отметим, что задачи оценки длительности мертвого времени рассматривались в статьях [14–20] для обобщенного асинхронного, обобщенного полусинхронного и модулированного МАР-потока событий.

В настоящей статье для решения задачи оценивания длительности мертвого времени используются метод моментов и метод максимального правдоподобия. При построении оценок применяются явный вид плотности вероятности значений длительности интервалов между соседними событиями, а также совместная плотность вероятности значений длительностей двух соседних интервалов между моментами наступления событий, которые получены в [19]. В работе описаны этапы построения ММ- и МП-оценок длительности мертвого времени. Приводятся численные результаты сравнения ММ- и МП-оценок и делается вывод о границах применимости рассмотренных методов для оценивания длительности мертвого времени при различных параметрах потока и времени наблюдения за потоком.

**1. Постановка задачи**

Рассматривается модулированный МАР-поток событий с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс  $\lambda(t)$  с двумя состояниями:  $\lambda(t) = \lambda_1$  и  $\lambda(t) = \lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ ). Длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  в  $i$ -м состоянии,  $i = 1, 2$ , определяется дву-

мя случайными величинами: 1) первая случайная величина распределена по экспоненциальному закону  $F_i^{(1)} = 1 - e^{-\alpha_i t}$ ,  $i = 1, 2$ ; в момент окончания  $i$ -го состояния процесс  $\lambda(t)$  переходит с вероятностью единица из  $i$ -го состояния в  $j$ -е,  $i, j = 1, 2$  ( $i \neq j$ ); 2) вторая случайная величина распределена по экспоненциальному закону  $F_i^{(2)} = 1 - e^{-\lambda_i t}$ ,  $i = 1, 2$ ; в момент окончания  $i$ -го состояния процесс  $\lambda(t)$  переходит с вероятностью  $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$  в  $j$ -е состояние ( $i \neq j$ ) с наступлением события, либо с вероятностью  $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$  переходит в  $j$ -е состояние ( $i \neq j$ ) без наступления события, либо с вероятностью  $P_1(\lambda_i | \lambda_i)$  остается в  $i$ -м состоянии с наступлением события ( $P_1(\lambda_j | \lambda_i) + P_0(\lambda_j | \lambda_i) + P_1(\lambda_i | \lambda_i) = 1$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ ).

Первая и вторая случайные величины являются независимыми друг от друга. В сделанных предположениях  $\lambda(t)$  – марковский процесс.

Блочная матрица инфинитезимальных характеристик процесса  $\lambda(t)$  при этом примет вид

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -(\alpha_1 + \lambda_1) & \alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) & -(\alpha_2 + \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \end{bmatrix} = \|\mathbf{D}_0 | \mathbf{D}_1\|.$$

Элементами матрицы  $\mathbf{D}_1$  являются интенсивности переходов процесса  $\lambda(t)$  из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы  $\mathbf{D}_0$  – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы  $\mathbf{D}_0$  – интенсивности выхода процесса  $\lambda(t)$  из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

После каждого зарегистрированного в момент времени  $t_k$  события наступает время фиксированной длительности  $T$  (мертвое время), в течение которого другие события исходного модулированного МАР-потока недоступны наблюдению. По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности  $T$  и т.д. Пример возникающей ситуации приведен на рис. 1, где 1 и 2 – состояния процесса  $\lambda(t)$ ,  $t_1, t_2, \dots$  – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке, жирной линией обозначены длительности мертвого времени; черными кружками обозначены события модулированного МАР-потока, недоступные наблюдению.

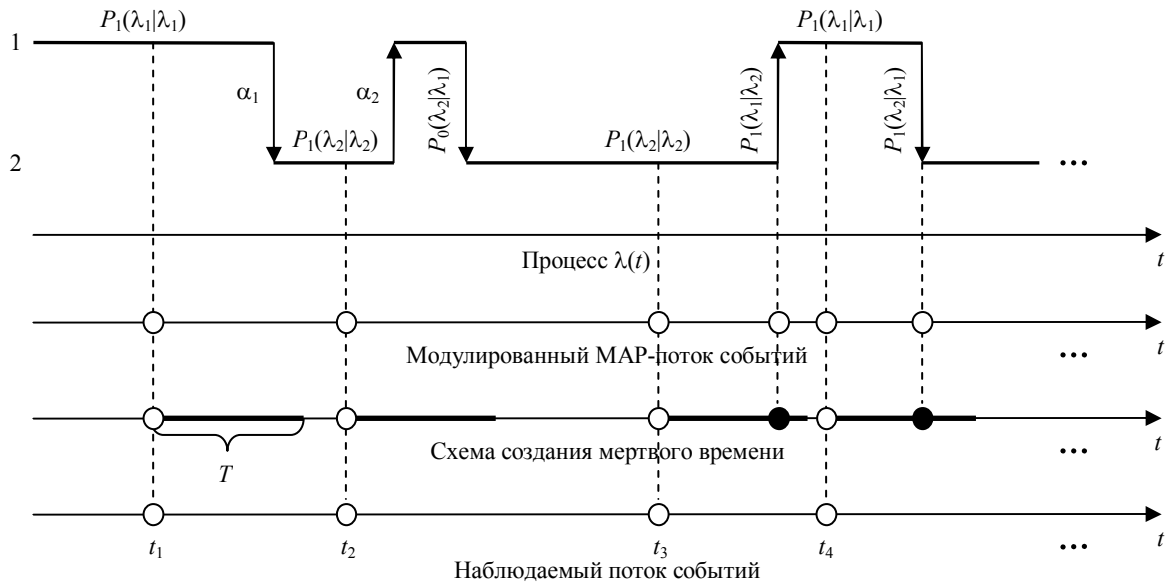


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

В силу предпосылок в моменты  $t_1, t_2, \dots, t_k$  последовательность  $\{\lambda(t_k)\}$  есть вложенная цепь Маркова, т.е. наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента  $t_k$  – момента наступления события потока,  $k = 1, 2, \dots$ . Так как процесс  $\lambda(t)$  принципиально ненаблюдаем, то необходимо по моментам наступления событий  $t_1, t_2, \dots, t_k$  построить оценку длительности мертвого времени  $T$  методом моментов и методом максимального правдоподобия и провести сравнительный анализ полученных оценок.

## 2. МП-оценка длительности мертвого времени

Обозначим  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , – значение длительности  $k$ -го интервала между моментами наступления соседних событий потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятности значений длительности  $k$ -го интервала есть  $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$ ,  $\tau \geq 0$ , для любого  $k$  (индекс  $T$  подчеркивает зависимость плотности вероятности от длительности мертвого времени). Вследствие этого момент  $t_k$  без потери общности можно положить равным нулю, что то же самое, момент наступления событий наблюдаемого события потока есть  $\tau = 0$ . Тогда [20] плотность вероятности примет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T; \\ \frac{z_1}{z_2 - z_1} \left[ z_2 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_1(\tau-T)} - \frac{z_2}{z_2 - z_1} \left[ z_1 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases}$$

$$f(T) = A + \{ \lambda_1(1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)) \} \frac{\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2}{F(T)} e^{-(\beta_1 + \beta_2)T},$$

$$F(T) = \lambda_1 \lambda_2 (1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1) P_0(\lambda_1 | \lambda_2)) + \lambda_1 \alpha_2 (1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) + \lambda_2 \alpha_1 (1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)) - \lambda_1 \lambda_2 P e^{-(\beta_1 + \beta_2)T},$$

$$\beta_1 = \alpha_1 + \lambda_1 (1 - P_1(\lambda_1 | \lambda_1)), \quad \beta_2 = \alpha_2 + \lambda_2 (1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2)), \quad A = P_1 + P_2,$$

$$P_1 = \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) (\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) (\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2)),$$

$$P_2 = \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) (\lambda_2 + \alpha_2) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1)),$$

$$P = P_1(\lambda_1 | \lambda_1) P_1(\lambda_2 | \lambda_2) - P_1(\lambda_1 | \lambda_2) P_1(\lambda_2 | \lambda_1),$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (\alpha_1 + \lambda_1 + \alpha_2 + \lambda_2) \mp \sqrt{(\alpha_1 + \lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_2)^2 + 4(\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1))(\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2))} \right],$$

$$0 < z_1 < z_2. \quad (1)$$

Отметим, что в (1) функция  $F(T) > 0$  для любых  $T$ ,  $0 \leq T \leq \tau$ .

Пусть  $\tau_1, \dots, \tau_k$  – последовательность измеренных в результате наблюдения за потоком значений длительностей интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины  $\tau_1, \dots, \tau_k$  по возрастанию:  $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \dots < \tau^{(k)}$ . В сделанных предположениях наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать начиная с момента  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . С учетом (1) функция правдоподобия [20] запишется в виде

$$L(\lambda_i, \alpha_i, P_1(\lambda_i | \lambda_i), P_1(\lambda_j | \lambda_j), P_0(\lambda_j | \lambda_i), T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad 0 \leq \tau_{\min} < T;$$

$$L(\lambda_i, \alpha_i, P_1(\lambda_i | \lambda_i), P_1(\lambda_j | \lambda_j), P_0(\lambda_j | \lambda_i), T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{l=1}^k p_T(\tau^{(l)}), \quad \tau_{\min} \geq T.$$

Поставленная задача заключается в построении оценки длительности мертвого времени в предположении, что все остальные параметры потока  $\lambda_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $P_1(\lambda_i | \lambda_i)$ ,  $P_1(\lambda_j | \lambda_j)$ ,  $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ , известны. В этой связи согласно методу максимального правдоподобия ее реализация заключается в решении оптимизационной задачи

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{l=1}^k p_T(\tau^{(l)}) =$$

$$= \prod_{l=1}^k \frac{z_1}{z_2 - z_1} \left[ z_2 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_1(\tau^{(l)}-T)} - \frac{z_2}{z_2 - z_1} \left[ z_1 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_2(\tau^{(l)}-T)} \Rightarrow \max_T, \quad \tau_{\min} \geq T \geq 0, \quad (2)$$

где  $f(T)$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  определены в (1).

Значение  $T$ , при котором (2) достигает своего глобального максимума, является оценкой максимального правдоподобия  $\hat{T}_{МП}$  длительности мертвого времени.

В [20] аналитически строго решена оптимизационная задача (2): при любых значениях параметров модулированного МАР-потока событий  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $P_1(\lambda_i | \lambda_i) + P_1(\lambda_j | \lambda_j) + P_0(\lambda_j | \lambda_i) = 1$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ , МП-оценка  $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$ . Итак, в процессе наблюдения за потоком событий вычисляются величины  $\tau_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , после чего находится  $\tau_{\min} = \min \tau_k$  и полагается  $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$ .

### 3. ММ-оценка длительности мертвого времени

В [19] показано, что модулированный МАР-поток событий в общем случае является коррелированным и только в частных случаях становится рекуррентным.

Пусть  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , – значения длительностей смежных  $k$ -го и  $k+1$ -го интервалов между соседними событиями потока. В силу стационарности потока можно положить  $k = 1$  и рассматривать длительности интервалов  $\tau_1 = t_2 - t_1$ ,  $\tau_2 = t_3 - t_2$ . Тогда  $\tau_1 = 0$  – моменту  $t_1$  наступления события наблюдаемого потока, а  $\tau_2 = 0$  соответствует моменту  $t_2$  наступления следующего события потока. При этом соответствующая совместная плотность вероятности значений длин соседних интервалов между моментами наступления событий  $p_T(\tau_1, \tau_2)$  имеет вид [19]:

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T;$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + f(T)(1 - f(T))e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \times \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} [P_1(\lambda_1 | \lambda_1)P_1(\lambda_2 | \lambda_2) - P_1(\lambda_1 | \lambda_2)P_1(\lambda_2 | \lambda_1)] \times \\ \times [z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1 - T)}] [z_1 e^{-z_1(\tau_2 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)}], \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T, \quad (3)$$

где  $f(T)$ ,  $p_T(\tau_1)$ ,  $p_T(\tau_2)$  определены в (1) при  $\tau = \tau_1$  и  $\tau = \tau_2$ .

Ковариация значений длительностей соседних интервалов между моментами наступления событий имеет вид

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \int_T^\infty \int_T^\infty \tau_1 \tau_2 p_T(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \left( \int_T^\infty \tau p_T(\tau) d\tau \right)^2.$$

Подставляя  $p_T(\tau_1, \tau_2)$  из (3) и  $p_T(\tau)$  из (1), найдем явный вид теоретической ковариации

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} P e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} f(T)(1 - f(T)) \left( \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right)^2, \quad (4)$$

где  $P$ ,  $f(T)$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  определены в (1).

Пусть за время наблюдения за потоком реализовалось  $n$  интервалов  $(t_k, t_{k+1})$  длительности  $\tau_k$ . Введем статистику:

$$\hat{c}_0 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \tau_{k+1} - \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k \right)^2, \quad (5)$$

которая является оценкой теоретической ковариации (4) значений длин соседних интервалов между моментами наступления событий потока. Тогда, основываясь на методе моментов, запишем уравнение моментов для определения оценки длительности мертвого времени, учитывающее коррелированность модулированного МАР-потока событий, в виде

$$\hat{c}_0 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} P e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} f(T)(1 - f(T)) \left( \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right)^2. \quad (6)$$

Подставляя в (6) явный вид  $f(T)$  из (1), вводя обозначение  $x = e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$  и проделывая необходимые преобразования, получим кубическое уравнение относительно  $x$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (7)$$

$$a = [\lambda_1(1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2))](\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) \lambda_2 \lambda_1 P \times \\ \times [z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2))],$$

$$b = [\lambda_1(1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2))](\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) \lambda_2 \lambda_1 P \times \\ \times [(\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2) - 2z_1 z_2] - \hat{c}_0 z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2)^2 (\lambda_2 \lambda_1 P)^2,$$

$$c = [\lambda_1(1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) - \lambda_2(1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2))](\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) \lambda_2 \lambda_1 P z_1 z_2 + 2\hat{c}_0 \lambda_2 \lambda_1 P (\beta_1 + \beta_2)^2 (z_1 z_2)^2,$$

$$d = -\hat{c}_0 (\beta_1 + \beta_2)^2 (z_1 z_2)^3,$$

$P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  определены в (1).

Решив уравнение (7), найдем 3 корня  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ . Учитывая обозначение  $x = e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$ , выразим  $T$ :

$$\hat{T}_{MM}^{(l)} = -\frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \ln(x_l), l = \overline{1,3}. \quad (8)$$

Так как  $T > 0$ , то  $x_l$  – действительное число,  $0 < x_l < 1$ . Если среди  $\hat{T}_{MM}^{(l)}$ ,  $l = \overline{1,3}$ , полученных из (8), есть несколько значений  $\hat{T}_{MM}^{(l)} > 0$ , то единственная оценка  $\hat{T}_{MM}$  выбирается следующим образом: если имеется один корень  $0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} < \tau_{\min}$ , то  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$ ; если имеется  $j$  корней  $\hat{T}_{MM}^{(l)}$ ,  $2 \leq j \leq 3$ ,  $l = \overline{1,j}$ , удовлетворяющих условию  $0 < \hat{T}_{MM}^{(l)} < \tau_{\min}$ , то  $\hat{T}_{MM} = \frac{1}{j} \sum_{l=1}^j \hat{T}_{MM}^{(l)}$ ; во всех остальных случаях  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ .

#### 4. Результаты численных расчетов

Для получения численных расчетов и сравнения качества МП- и ММ-оценок были проведены статистические эксперименты, предполагающие следующие этапы: 1) для определенного набора параметров  $\lambda_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $P_1(\lambda_i | \lambda_i)$ ,  $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$ ,  $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$ ,  $T$  единиц времени и заданном времени модулирования  $t_{\text{мод}}$  единиц осуществляется имитационное моделирование наблюдаемого потока событий ( $i$ -й опыт); результатом работы модели является последовательность значений  $\tau_1, \dots, \tau_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ; 2) в  $i$ -м опыте находится  $T_{MP}^{(i)} = \tau_{\min}$  ( $\tau_{\min} = \min(\tau_j)$ ,  $j = \overline{1,k}$ ), рассчитывается оценка (5), решается уравнение (7), реализуется алгоритм нахождения единственной оценки  $\hat{T}_{MM}^{(i)}$ ; 3) значения  $\hat{T}_{MP}^{(i)}$  и  $\hat{T}_{MM}^{(i)}$  запоминаются,  $i$  увеличивается на единицу, алгоритм переходит на шаг 1. Шаги 1–3 повторяются  $N$  раз.

Результатом описанного выше алгоритма являются две выборки  $\hat{T}_{MP}^{(1)}, \dots, \hat{T}_{MP}^{(N)}$  и  $\hat{T}_{MM}^{(1)}, \dots, \hat{T}_{MM}^{(N)}$  оценок мертвого времени  $T$  в  $N$  опытах. По этим выборкам строятся выборочные средние  $\hat{M}(\hat{T}_{MP}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{T}_{MP}^{(i)}$  и  $\hat{M}(\hat{T}_{MM}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{T}_{MM}^{(i)}$ , а также выборочные вариации  $\hat{V}_{MP} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{T}_{MP}^{(i)} - T)^2$  и  $\hat{V}_{MM} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{T}_{MM}^{(i)} - T)^2$ , где  $T$  – истинное значение длительности мертвого времени. Далее вычисляется значение  $\Delta \hat{V} = \hat{V}_{MP} - \hat{V}_{MM}$ ; если  $\Delta \hat{V} > 0$ , то ММ-оценка в данном эксперименте будет признана лучшей, если же  $\Delta \hat{V} < 0$ , то лучше оценка максимального правдоподобия  $\hat{T}_{MP}$ .

В группе экспериментов, рассмотренной ниже, исследуется зависимость качества оценок от времени моделирования  $t_{\text{мод}}$  и значений параметра  $\lambda_2$ . Эксперименты проводились таким образом, что значения всех параметров, за исключением  $t_{\text{мод}}$  и  $\lambda_2$ , фиксировались и оставались неизменными. Количество опытов  $N = 10\,000$ . Исходные данные для экспериментов представлены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Исходные данные для экспериментов

$\lambda_1 = 1$	$\alpha_1 = 0,1$	$P_1(\lambda_1   \lambda_1) = 0$	$P_1(\lambda_2   \lambda_1) = 0,9$	$P_0(\lambda_2   \lambda_1) = 0,1$
$T = 0,2$	$\alpha_2 = 0,1$	$P_1(\lambda_2   \lambda_2) = 0,1$	$P_1(\lambda_1   \lambda_2) = 0,8$	$P_0(\lambda_1   \lambda_2) = 0,1$

Результаты эксперимента при фиксированном значении  $\lambda_2 = 0,2$  приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Результаты первого эксперимента при  $\lambda_2 = 0,2$

$t_{\text{мод}}$	10	15	20	25	30	35	40	45
$\hat{M}(\hat{T}_{MP})$	0,829	0,836	0,776	0,716	0,602	0,528	0,491	0,440
$\hat{M}(\hat{T}_{MM})$	0,861	0,884	0,802	0,730	0,604	0,527	0,486	0,428
$\hat{V}_{MM}$	0,969	1,098	1,065	1,039	0,696	0,400	0,358	0,218
$\hat{V}_{MP}$	0,958	1,278	1,186	1,120	0,740	0,434	0,364	0,189
$\Delta \hat{V}$	–0,011	0,180	0,120	0,081	0,044	0,033	0,006	–0,029

Для значения  $\lambda_2 = 0,3$  результаты эксперимента приведены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты первого эксперимента при  $\lambda_2 = 0,3$

$t_{\text{мод}}$	10	15	20	25	30	35	40	45
$\hat{M}(\hat{T}_{МП})$	0,729	0,685	0,598	0,509	0,448	0,396	0,371	0,350
$\hat{M}(\hat{T}_{ММ})$	0,751	0,701	0,596	0,503	0,435	0,386	0,359	0,335
$\hat{V}_{ММ}$	0,715	0,718	0,553	0,366	0,223	0,130	0,102	0,087
$\hat{V}_{МП}$	0,719	0,779	0,564	0,353	0,195	0,114	0,080	0,060
$\Delta \hat{V}$	0,004	0,061	0,011	-0,013	-0,028	-0,016	-0,022	-0,027

Для значения  $\lambda_2 = 0,4$  результаты эксперимента представлены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты первого эксперимента при  $\lambda_2 = 0,4$

$t_{\text{мод}}$	10	15	20	25	30	35	40	45
$\hat{M}(\hat{T}_{МП})$	0,660	0,574	0,484	0,418	0,369	0,340	0,325	0,312
$\hat{M}(\hat{T}_{ММ})$	0,677	0,575	0,478	0,408	0,358	0,332	0,311	0,296
$\hat{V}_{ММ}$	0,537	0,436	0,289	0,190	0,094	0,062	0,058	0,049
$\hat{V}_{МП}$	0,578	0,447	0,270	0,169	0,076	0,047	0,030	0,022
$\Delta \hat{V}$	0,041	0,011	-0,019	-0,021	-0,019	-0,015	-0,028	-0,027

Результаты эксперимента при фиксированном значении  $\lambda_2 = 0,5$  приведены в табл. 5.

Таблица 5

Результаты первого эксперимента при  $\lambda_2 = 0,5$

$t_{\text{мод}}$	10	15	20	25	30	35	40	45
$\hat{M}(\hat{T}_{МП})$	0,601	0,500	0,412	0,363	0,328	0,308	0,298	0,282
$\hat{M}(\hat{T}_{ММ})$	0,609	0,501	0,408	0,356	0,320	0,298	0,286	0,273
$\hat{V}_{ММ}$	0,436	0,308	0,151	0,092	0,055	0,041	0,037	0,025
$\hat{V}_{МП}$	0,450	0,308	0,154	0,083	0,039	0,023	0,018	0,012
$\Delta \hat{V}$	0,014	0,000	0,003	-0,010	-0,017	-0,018	-0,019	-0,013

Как видно из результатов, при малых значениях времени моделирования и параметра  $\lambda_2$  метод моментов дает лучшие результаты. Но при увеличении времени моделирования и параметра  $\lambda_2$  МП-оценка оказывается лучше. Это объясняется следующим: чем больше время наблюдения за потоком, тем больше событий наступает в наблюдаемом потоке и  $\hat{M}(\hat{T}_{МП})$  стремится к значению  $T$ ; при увеличении параметра  $\lambda_2$  событий также наступит больше и разница  $\hat{M}(\hat{T}_{МП}) - T$  становится меньше.

В следующем эксперименте исследуется качество оценок при больших временах наблюдения за потоком:  $t_{\text{мод}} = 100, \dots, 600$ . Исходные данные для эксперимента представлены в табл. 6,  $\lambda_2 = 0,3$ .

Таблица 6

Результаты второго эксперимента

$t_{\text{мод}}$	100	200	300	400	500	600
$\hat{M}(\hat{T}_{МП})$	0,278	0,259	0,255	0,258	0,260	0,265
$\hat{M}(\hat{T}_{ММ})$	0,255	0,226	0,217	0,213	0,210	0,209
$\hat{V}_{ММ}$	0,0421	0,0433	0,0475	0,0573	0,0656	0,0781
$\hat{V}_{МП}$	0,0067	0,0014	0,0006	0,0003	0,0002	0,0002
$\Delta \hat{V}$	-0,0353	-0,0419	-0,0469	-0,0570	-0,0654	-0,0780

Результаты показывают, что при больших временах наблюдения за потоком МП-оценка оказывается лучше ММ-оценки и значение МП-оценки с ростом времени приближается к истинному значению длительности мертвого времени  $T$ .

### Заключение

В данной статье представлен вывод МП- и ММ-оценки длительности мертвого времени для модулированного МАР-потока событий, где в качестве статистики используется ковариация длин соседних интервалов между моментами наступления событий. Приведено правило отбора единственной ММ-оценки. Поставлены численные эксперименты по сравнению полученных оценок, а также по выявлению зависимости качества оценок от параметров потока, проведен анализ численных результатов. Результаты показывают, что при малом времени наблюдения за потоком (10–25 единиц) и при малом параметре  $\lambda_2$  потока ( $\lambda_2 < 0,5$ ) оценка, полученная методом моментов, дает лучшие результаты по сравнению с МП-оценкой. Но при увеличении параметра  $\lambda_2$  или времени наблюдения МП-оценка оказывается более точной, чем ММ-оценка.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proc. of Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No. 4. P. 923–930.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
3. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
4. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. № 16. С. 764–779.
5. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. No. 7. P. 1–46.
6. Дудин А.Н., Клименок В.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
7. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Шевченко Т.И. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Изв. вузов. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.
8. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
9. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2. С. 88–101.
10. Nezhel'skaya L.A. Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computers and Information Sciences. 2014. V. 487. P. 342–350.
11. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 18–23.
12. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
13. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, No. 3. P. 283–290.
14. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
15. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
16. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.
17. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 27–37.
18. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3 (32). С. 23–32.

19. Нежелская Л.А. Условия рекуррентности потока физических событий при непродлеваемом мертвом времени // Изв. вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 12. С. 168–175.
20. Нежелская Л.А. Оценивание длительности непродлеваемого мертвого времени в потоке физических событий методом максимального правдоподобия // Изв. вузов. Физика. 2016. Т. 59, № 5. С. 43–53.

**Березин Дмитрий Владимирович.** E-mail: berezin14@mail.ru

Томский государственный университет

**Нежелская Людмила Алексеевна,** канд. техн. наук, доцент. E-mail: ludne@mail.tsu.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 24 апреля 2016 г.

*Berezin Dmitry V., Nezhel'skaya Lyudmila A. (Tomsk State University, Russian Federation).*

# **Comparison of MM- and ML-estimators of dead time period in modulated MAP.**

**Keywords:** modulated MAP; method of moments; method of maximum likelihood; parameters estimation; non-extendable dead time.

DOI: 10.17223/19988605/36/3

This paper considers the modulated MAP, which rate is a piecewise constant random process  $\lambda(t)$  with two states:  $\lambda(t) = \lambda_1$  and  $\lambda(t) = \lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ ). The time when the process  $\lambda(t)$  remains at the  $i$ -th state,  $i = 1, 2$ , depends on two random values: 1) the first random value has the exponential distribution function  $F_i^{(1)} = 1 - e^{-\alpha_i t}$ ,  $i = 1, 2$ , when the  $i$ -th state ends process  $\lambda(t)$  transits with the probability equal one from the  $i$ -th state to the  $j$ -th one,  $i, j = 1, 2$  ( $i \neq j$ ); 2) the second random value has the exponential distribution function  $F_i^{(2)} = 1 - e^{-\lambda_i t}$ ,  $i = 1, 2$ ; when the  $i$ -th state ends, process  $\lambda(t)$  transits with the probability  $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$  from the  $i$ -th state to the  $j$ -th one ( $i \neq j$ ) by a flow event occurs or  $\lambda(t)$  transits with the probability  $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$  from the  $i$ -th state to the  $j$ -th ( $i \neq j$ ) by an event does not occur, or the process  $\lambda(t)$  transits with the probability  $P_1(\lambda_i | \lambda_i)$  from the  $i$ -th state to the  $i$ -th one by a flow event occurs. Here  $P_1(\lambda_j | \lambda_i) + P_0(\lambda_j | \lambda_i) + P_1(\lambda_i | \lambda_i) = 1$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ . The block transition rate matrix for the process  $\lambda(t)$  is as follows:

$$D = \begin{bmatrix} -(\alpha_1 + \lambda_1) & \alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) & -(\alpha_2 + \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \end{bmatrix} = \|D_0 \mid D_1\|.$$

Occurring an event generates the period of time called dead time, during which the flow cannot be observed. After this period ends, a new event also generates dead time. Having only a sample  $(t_1, \dots, t_n)$  of events moments, we need to estimate the dead time period applying the two methods: method of maximum likelihood and method of moments.

The ML-estimator can be found by maximizing the following function:

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{l=1}^k p_T(\tau^{(l)}) \Rightarrow \max_T, \tau_{\min} \geq T \geq 0.$$

The moments equation is as follows:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \tau_{k+1} - \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k \right)^2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{z_1 z_2} P e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} f(T) (1 - f(T)) \left( \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right)^2,$$

where the sample covariance is on the left part of the equation and the theoretical covariance is on the right one. The estimator of the dead time period can be obtained by solving the equation above.

To compare the results of dead time period estimation for the two methods and to find dependencies between estimates quality and process parameters, the numerical experiments was performed. The results show that MM-estimate is better than ML-estimate when the observability time is small enough (10-25 points) and the parameter  $\lambda_2$  is also small ( $\lambda_2 < 0.5$ ). But as observability time or parameter  $\lambda_2$  increases, ML-estimate becomes better than MM-estimator.

## REFERENCES

1. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923-930.
2. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer. *Engineering cybernetics*. 17(6). pp. 66-73. DOI: 10.1016/0166-5316(84)90009-9
3. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. *Engineering cybernetics*. 17(6). pp. 55-61.
4. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764-779. DOI: 10.2307/3213143
5. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1-46.
6. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BSU.
7. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) Optimal states estimation of asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of states. *Russian Physics Journal*. 12. pp. 67-85. (In Russian).
8. Nezhelskaya, L.A. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobyitiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyudaemosti [Optimal state estimation of semi-synchronous flow in conditions of its incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95-98.

9. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88-101. (In Russian).
10. Nezhelskaya, L.A. (2014) Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computers and Information Sciences*. 487. pp. 342-350. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4\_39
11. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobyitiy metodom momentov [Parameters estimation of a semi-synchronous doubly stochastic flow of events using method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. pp. 18-23.
12. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semi-synchronous twice-stochastic event flow in conditions of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(1). pp. 31-41. (In Russian).
13. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21(3). pp. 283-290. DOI: 10.1515/dma.2011.017
14. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54-63. (In Russian).
15. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32-42. (In Russian).
16. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semi-synchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19-29. (In Russian).
17. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27-37. (In Russian).
18. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Comparison of MP- and MM-estimations of dead in a generic semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(32). pp. 23-32. DOI: 10.17223/19988605/32/3
19. Nezhelskaya, L.A. (2015) Conditions of recurrency of physic flow of events with unprolonging dead time. *Russian Physics Journal*. 58(12). pp. 168-175.
20. Nezhelskaya, L.A. (2016) Estimation of dead time value in physic flow of events by method of moments. *Russian Physics Journal*. 59(5). pp. 43-53.