

Г.А. Медведев

**ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРОЦЕССОВ
ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК ДОХОДНОСТИ**

Рассматриваются маргинальные плотности вероятностей процессов диффузионного типа, порождаемых шестнадцатью моделями краткосрочных процентных ставок, допускающих получение плотностей в аналитической форме. Это семейство охватывает практически все используемые в настоящее время модели непрерывного времени. Некоторые плотности (Васичека, Кокса–Ингерсолла–Росса, геометрического броуновского движения, Ана–Гао) хорошо изучены в литературе и приведены здесь для удобства сравнения. Другие плотности описываются впервые. Основное внимание уделяется аналитическим свойствам плотностей и четырем их первым моментам (математическое ожидание, дисперсия, асимметрия и эксцесс), чаще всего интересующим практиков. В основном рассматривались стационарные плотности и моменты, хотя несколько моделей порождают нестационарные процессы.

Ключевые слова: процентные ставки; плотности вероятностей; числовые характеристики.

Процессы краткосрочных процентных ставок порождают изменения многих рыночных индексов, а также лежат в основе определения стоимости рыночных активов и торговых контрактов. Особую роль они играют при расчетах временной структуры доходности. Поэтому разработка математических моделей таких процессов крайне интересна для финансовых аналитиков и исследователей рыночных проблем. Существует много версий изменения краткосрочных безрисковых процентных ставок в рамках теории диффузионных процессов. Однако до сих пор нет такой модели, которая была бы основой для построения временной структуры доходности, близкой к существующей на реальном финансовом рынке. Представляет интерес проанализировать эти модели с целью выяснения их особенностей в вероятностном смысле более подробно, чем это делалось их создателями и пользователями. Здесь будет сделан такой анализ для семейства моделей, использованных авторами трех широко известных статей [1–3], при их подгонке к реальным временным рядам доходности. Все рассматриваемые модели относятся к классу диффузионных, порождающих процессы $X(t)$, описываемые уравнением

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t), t > t_0, X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где конкретное задание дрейфа $\mu(x)$ и волатильности $\sigma(x)$ определяет ту или иную конкретную модель.

Некоторые модели, такие как модели Васичека, Кокса–Ингерсолла–Росса, геометрического броуновского движения, Ана – Гао, достаточно полно описаны в имеющейся литературе, но тем не менее их свойства приведены здесь для удобства сравнения с другими, менее известными или не исследованными моделями. Предлагаемый читателю анализ будет полезен для выяснения наиболее подходящих моделей краткосрочной ставки при определении временной структуры бескупонной доходности, приближающей реально наблюдаемую, по возможности, наилучшим образом.

Схема анализа сводится к тому, что с помощью прямого уравнения Колмогорова выводится стационарная плотность вероятностей, при необходимости обсуждаются ее особенности и вычисляются первые четыре момента, обычно интересных на практике. Для рассмотренных моделей коэффициенты асимметрии и эксцесса, определяемые моментами третьего и четвертого порядка, зависят от единственного параметра, называемого параметром формы плотности, который, в свою очередь, определяется только отношением дисперсии к квадрату математического ожидания (это соответствует квадрату так называемого коэффициента вариации).

1. Модель Васичека

Для $\mu(x) = k(\theta - x)$, $\sigma^2(x) = \sigma^2$ получается процесс Орнштейна–Уленбека, в финансовой литературе обычно называемый моделью Васичека [4]. Плотность распределения вероятностей для этого процесса является нормальной с математическим ожиданием $E[X] = \theta$ и дисперсией $\text{Var}[X] = \sigma^2/2k$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-k \frac{(x-\theta)^2}{\sigma^2}}. \quad (2)$$

2. Модель CIR

Для функций дрейфа и волатильности $\mu(x) = k(\theta - x)$ и $\sigma^2(x) = \sigma^2 x$ получаем неотрицательный процесс краткосрочной процентной ставки $r(t)$, в финансовой литературе известный под названием модель Кокса–Ингерсолла–Росса (модель CIR) [5].

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{2kDr(t)/\theta} dW(t),$$

где θ и D – стационарные математическое ожидание и дисперсия соответственно.

Процесс CIR имеет гамма-распределение G с параметром масштаба $c = 2k/\sigma^2$ и параметром формы $q = 2k\theta/\sigma^2$: $X(t) \sim G(2k/\sigma^2, 2k\theta/\sigma^2)$, так что

$$f(x) = \frac{c^q x^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-cx}, \quad q > 0, x > 0. \quad (3)$$

Моменты этого распределения вычисляются по формуле

$$E[X^m] = \frac{\Gamma(m+q)}{c^m \Gamma(q)},$$

а важные числовые характеристики, такие как математическое ожидание $E[X]$, дисперсия $\text{Var}[X]$, коэффициенты асимметрии S и эксцесса K , имеют вид

$$\begin{aligned} E[X] &= q/c = \theta, \\ \text{Var}[X] &\equiv D = q/c^2 = \sigma^2 \theta / 2k, \\ S &\equiv \frac{E[(X - E[X])^3]}{\text{Var}[X]^{3/2}} = 2\sqrt{q}, \\ K &\equiv \frac{E[(X - E[X])^4]}{\text{Var}[X]^2} = 3 + 6/q. \end{aligned}$$

Если обозначить отношение дисперсии к квадрату математического ожидания символом ω , $\omega = \frac{\text{Var}[X]}{E[X]^2}$, то $q = \frac{1}{\omega}$. В дальнейшем при сравнении свойств плотностей удобнее использовать зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ вместо $S(q)$ и $K(q)$, так как довольно абстрактные параметры формы q для разных моделей по-разному зависят от вполне физически понятного отношения ω .

3. Модель Даффи–Кана

В модели Даффи–Кана [6] ставка $r(t)$ порождается уравнением с $\mu(x) = k(\theta - x)$ и $\sigma(x) = \sqrt{\gamma x + \delta} \equiv \sqrt{2kD \frac{x-r_0}{\theta-r_0}}$:

$$dr(t) = (\alpha r(t) + \beta)dt + \sqrt{\gamma r(t) + \delta} dW(t), \quad \gamma r(0) + \delta > 0,$$

где $k = -\alpha > 0$, $\theta = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$, $D = \frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{2\alpha^2} > 0$, $r_0 = -\frac{\delta}{\gamma} < \theta$.

Процесс $r(t)$ имеет стационарную плотность вероятностей $f(x)$, которая является сдвинутой плотностью гамма с параметром сдвига r_0 , параметром формы q и параметром масштаба c , т.е.

$$f(x) = \frac{c^q (x - r_0)^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-c(x-r_0)}, \quad r_0 < x < \infty, \quad (4)$$

где $q = (\theta - r_0)^2 / D$, $c = (\theta - r_0) / D > 0$, r_0 – предельное нижнее значение процентной ставки $r(t)$.

Важные числовые характеристики стационарной плотности:

$$E[X] = q/c = \theta, \quad \text{Var}[X] \equiv D = q/c^2,$$

$$S = 2\sqrt{q}, \quad K = 3 + 6/q.$$

Здесь также $q = 1/\omega$. Зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ для моделей CIR (1985) и Даффи–Кана одинаковы и представлены на рис.1, где сплошной линией показан коэффициент асимметрии $S(\omega)$, а прерывистой – коэффициент эксцесса $K(\omega)$. В таком же стиле будут показаны зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ на последующих рисунках.

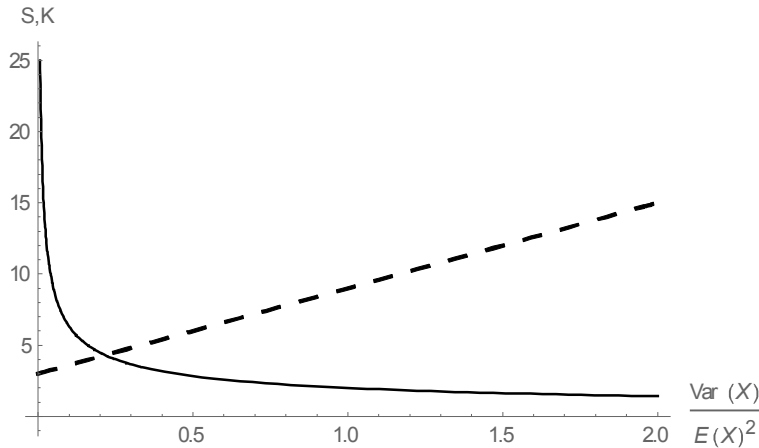


Рис. 1. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для моделей CIR (1985) и Даффи–Кана

Заметим, что только у моделей CIR (1985) и Даффи–Кана из рассмотренных в статье моделей коэффициент асимметрии уменьшается с ростом отношения дисперсии к квадрату математического ожидания ω .

4. Модель Лонгстаффа

Модель Лонгстаффа [7] иногда называется моделью «с двойным корнем» и определяется диффузионным процессом с функциями дрейфа и диффузии $\mu(x) = k(\theta - \sqrt{x})$, $\sigma^2(x) = \sigma^2 x$:

$$dr(t) = k(\theta - \sqrt{r(t)}) dt + \sigma \sqrt{r(t)} dW(t).$$

Такая модификация модели CIR приводит к тому, что плотность вероятностей процесса приобретает вид

$$f(x) = \frac{(2c)^{2q} x^{q-1}}{2\Gamma(2q)} e^{-2c\sqrt{x}}, \quad q > 0, \quad x > 0.$$

В этой модели параметр масштаба $c = 2k/\sigma^2$, а параметр формы $q = 2k\theta/\sigma^2$. Числовые характеристики процесса вычисляются по формулам

$$E[X] = \frac{q(1+2q)}{2c^2}, \quad \text{Var}[X] = \frac{q(1+2q)(3+4q)}{4c^4},$$

$$S = \frac{30 + 68q + 40q^2}{\sqrt{q(1+2q)}(3+4q)^{3/2}} > 0,$$

$$K = 3 \frac{210 + 629q + 674q^2 + 288q^3 + 32q^4}{q(1+2q)(3+4q)^2} > 3.$$

Для этой модели $q = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{16}{\omega} + \frac{16}{\omega^2}} - 1 \right)$. Соответствующие зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ представлены на рис. 2.

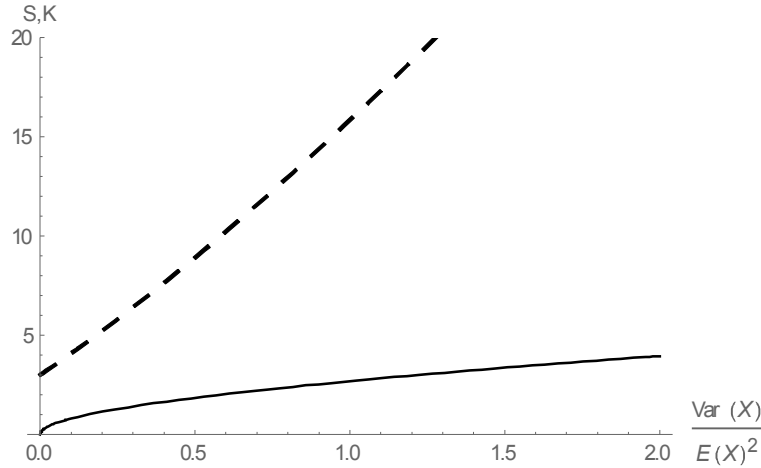


Рис. 2. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для модели Лонгстаффа

5. Модель Ана–Гао

В модели Ана–Гао [2] принимается, что дрейф и волатильность являются нелинейными $\mu(x) = k(\theta - x)x$ и $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^3$. Процесс имеет стационарную плотность, имеющую вид

$$f(x) = \frac{c^q}{\Gamma(q)x^{1+q}} e^{-c/x}, \quad x > 0, \quad (5)$$

где параметр масштаба $c = 2k\theta/\sigma^2$, параметр формы $q = 2 + 2k/\sigma^2$. Такой процесс получается из процесса CIR преобразованием $X_{AG} = 1/X_{CIR}$. Моменты $E[X^m]$ существуют только при условии, что $m < q$:

$$E[X^m] = c^m \frac{\Gamma(q-m)}{\Gamma(q)}.$$

Поэтому числовые характеристики стационарной плотности процесса определяются формулами

$$\begin{aligned} E[X] &= c/(q-1) = 2k\theta/(2k + \sigma^2), \\ \text{Var}[X] &= c^2/(q-1)^2(q-2) = 2k\sigma^2\theta^2/(2k + \sigma^2)^2, \\ S &= 4 \frac{\sqrt{q-2}}{q-3}, \quad q > 3; \quad K = 3 \frac{(q-2)(q+5)}{(q-3)(q-4)} > 3, \quad q > 4. \end{aligned}$$

6. Модель Бреннана–Шварца

В модели Бреннана–Шварца [8] предполагается, что $\mu(x) = k(\theta - x)$ и $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^2$. Такое задание дрейфа и диффузии приводит к плотности вероятностей диффузионного процесса

$$f(x) = \frac{c^q}{\Gamma(q)x^{1+q}} e^{-c/x}, \quad x > 0,$$

где параметр формы $q = 1 + 2k/\sigma^2$ и параметр масштаба $c = 2k\theta/\sigma^2$. У этого процесса существуют моменты $E[X^m]$, если $m < q$:

$$E[X^m] = c^m \frac{\Gamma(q-m)}{\Gamma(q)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} E[X] &= c/(q-1) = \theta, \\ \text{Var}[X] &= c^2/(q-2)(q-1)^2 = \theta^2 \sigma^2/(2k - \sigma^2), \\ S &= 4 \frac{\sqrt{q-2}}{q-3}, \quad q > 3; \quad K = 3 \frac{(q-2)(q+5)}{(q-4)(q-3)} > 3, \quad q > 4. \end{aligned}$$

Как выясняется, плотности вероятностей процессов в моделях Ана–Гао и Бреннана–Шварца совпадают с точностью до параметров формы, зависимость которых от параметров модели несколько другая ($q_{\text{БШ}} = 1 + 2k/\sigma^2$, $q_{\text{АГ}} = 2 + 2k/\sigma^2$). Тем не менее для обеих моделей $q = 2 + 1/\omega$, а зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ представлены на рис. 3.

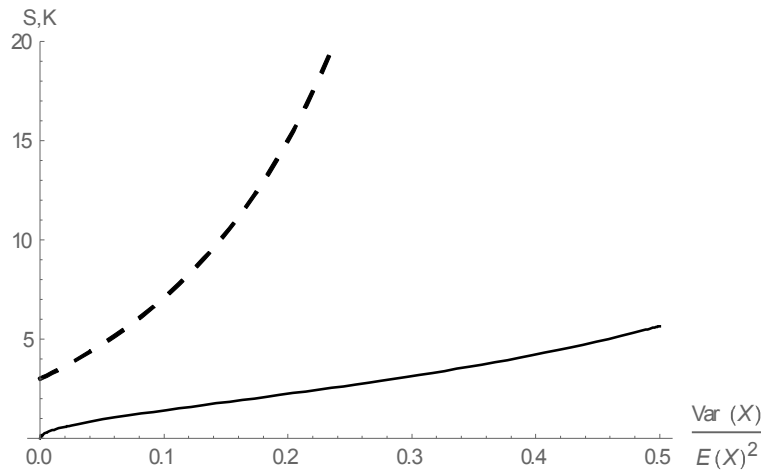


Рис. 3. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для моделей Ана–Гао и Бреннана–Шварца

7. Модель BDT

Модель Блэка–Дермана–Тоя [9]

$$dr(t) = [\alpha_1 r(t) - \alpha_2 r(t) \ln r(t)] dt + \beta r(t) dW(t), \quad \alpha_2 > 0,$$

при помощи преобразования $Y(t) = \ln r(t)$ приводится к линейному виду

$$dY(t) = (\alpha_1 - \beta^2/2 - \alpha_2 Y(t)) dt + \beta dW(t).$$

Это уравнение допускает стационарное решение, для которого процесс $Y(t)$ находится в явной форме

$$Y(t) = \frac{1}{\alpha_2} \left(\alpha_1 - \frac{\beta^2}{2} \right) + \xi(t), \quad \xi(t) = \beta \int_{-\infty}^t e^{-\alpha_2 s} dW(s),$$

где $\xi(t)$ – случайный гауссовский процесс с нулевым средним, дисперсией $\text{Var}[\xi(t)] = \beta^2/2\alpha_2$ и ковариацией $\text{Cov}[t_1, t_2] = \beta^2 e^{-\alpha_2 |t_2 - t_1|}/2\alpha_2$. Таким образом, модель BDT генерирует логарифмически нормальный процесс, также допуская стационарный режим (рис. 4). Первые стационарные моменты процентной ставки вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} E[r] &= \exp \left[\frac{1}{\alpha_2} \left(\alpha_1 - \frac{\beta^2}{4} \right) \right], \\ \text{Var}[r] &= (q-1) \exp \left[\frac{2}{\alpha_2} \left(\alpha_1 - \frac{\beta^2}{4} \right) \right], \quad q = \exp \left(\frac{\beta^2}{2\alpha_2} \right) = 1 + \omega, \\ S &= (q+2)\sqrt{q-1}, \quad K = q^4 + 2q^3 + 3q^2 - 3 > 3. \end{aligned}$$

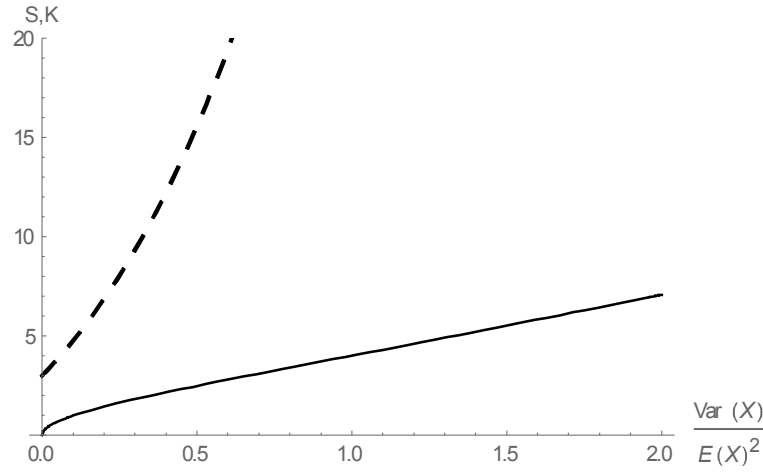


Рис. 4. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для модели BDT

8. Модель Эйт-Сахэйлиа

Эйт-Сахэйлиа [10] протестировал основные модели краткосрочных процентных ставок, включая описанные здесь, приспособивая их к реальным временным рядам ставок. При этом оказалось, что на допустимом уровне согласия все эти ставки отвергались из-за свойств дрейфа и волатильности. В связи с этим он предложил следующие функции дрейфа и диффузии:

$$\mu(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_{-1} \frac{1}{r}, \quad \sigma^2(r) = \beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2.$$

В такой модели функции дрейфа и диффузии нелинейные и допускают широкое разнообразие формы. Для того чтобы $\sigma^2(x) \geq 0$ для любых x , необходимо, чтобы параметры функции диффузии обеспечивали выполнение неравенств

$$\beta_0 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \gamma^2 \equiv 4\beta_0\beta_2 - \beta_1^2 \geq 0.$$

Соответствующая таким функциям плотность вероятностей дается выражением

$$f(x) = N x^B (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2)^{C-1} \exp[Ax + D \arctg(E + Fx)], \quad x > 0,$$

где N – постоянная нормировки,

$$A = 2\alpha_2/\beta_2 < 0, \quad B = 2\alpha_{-1}/\beta_0 > 0, \quad C = \alpha_1/\beta_2 - \alpha_2\beta_1/\beta_2^2 - \alpha_{-1}/\beta_0,$$

$$D = 2[2\alpha_0 + \alpha_2\beta_1^2/\beta_2^2 - \alpha_1\beta_1/\beta_2 - 2\alpha_2\beta_0/\beta_2 - \alpha_{-1}\beta_1/\beta_0]/\gamma,$$

$$E = \beta_1/\gamma, \quad F = \beta_2/\gamma.$$

Поскольку плотность $f(x)$ при $x \rightarrow 0$ имеет порядок $O(x^B)$, $B > 0$, а при $x \rightarrow \infty$ ее порядок $O(x^{B+C} \exp[Ax])$, $A < 0$, то для всякого конечного m моменты $E[X^m]$ существуют, однако их аналитические выражения получить не удается и они могут быть вычислены только численно.

9. Модель CKLS

В модели CKLS [1] принято, что $\mu(x) = k(\theta - x)$, $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^3$. Оказывается, что случайный процесс, соответствующий этой модели, имеет стационарную плотность

$$f(x) = \frac{n}{x^3} \exp \left[-c \left(\left(\frac{\theta}{x} \right)^2 - 2 \frac{\theta}{x} \right) \right], \quad x > 0, \quad (6)$$

где $c = k/\theta\sigma^2$, n – постоянная нормировки. Заметим, что у такого случайного процесса существует только первый момент $E[X] = \theta$.

10. Модель без ограничений I

В модель без ограничений I (unrestricted model) [2]

$$dr = (\alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 r^2)dt + \sqrt{\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3}dw \quad (7)$$

вложены все предыдущие модели, т.е. при определенном задании параметров $\{\alpha\}$ можно получить любую из предыдущих моделей.

В табл. 1 показано соответствие для этого случая.

Таблица 1

Модели процессов

Ограничения параметров	Модель	Уравнение процесса
$\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$	Модель Васичека	$dr = k(\theta - r)dt + \sigma dw$
$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = 0$	Модель CIR	$dr = k(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$
$\alpha_3 = \alpha_6 = 0$	Модель Даффи–Кана	$dr = k(\theta - r)dt + \sqrt{\alpha + \beta r}dw$
$\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$	Модель Ана–Гао	$dr = k(\theta - r)rdt + \sigma r^{1.5}dw$
$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$	Модель CKLS	$dr = k(\theta - r)dt + \sigma r^{1.5}dw$

Стационарная плотность вероятностей процесса «без ограничений I» имеет вид

$$f(x) = \frac{c(\omega)}{\sigma^2(x)} \exp\left(\int_{\omega}^x \frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)} du\right) = \frac{c(\omega)}{\alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 x^3} \exp\left(\int_{\omega}^x \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 u + \alpha_3 u^2)}{\alpha_4 + \alpha_5 u + \alpha_6 u^3} du\right),$$

где $c(\omega)$ – постоянная нормировки, ω – некоторое фиксированное число из множества возможных значений случайного процесса, конкретное значение которого не играет роли.

Получение явного вида выражения для $f(x)$ возможно, однако оно в общем случае будет иметь довольно громоздкий вид, и мы ограничимся только тем случаем, когда значения параметров $\{\alpha\}$ обеспечивают выполнение свойств плотности вероятностей для $f(x)$. Во-первых, заметим, что волатильность реального процесса должна быть вещественной функцией, поэтому $\sigma^2(r) = \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 \geq 0$ для любых значений r . При этом аналитические свойства плотности вероятностей зависят от типа корней уравнения $\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 = 0$, $\alpha_6 > 0$. Знак дискриминанта $\Delta = (\alpha_5/3\alpha_6)^3 + (\alpha_4/2\alpha_6)^2$ определяет число действительных и комплексных корней уравнения. Когда $\Delta > 0$, имеется один действительный и два комплексных сопряженных корня. Когда $\Delta < 0$, имеется три различных действительных корня. Когда $\Delta = 0$, корни действительные кратные.

Пусть $\Delta > 0$ и действительным корнем является $r = r_0$, тогда можно записать $\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 = \alpha_6(r - r_0)(r^2 + pr + q)$, где r_0 , p и q имеют довольно сложные аналитические выражения и из-за этого здесь не приводятся. Однако если $\alpha_4 = 0$, то $r_0 = 0$, $p = 0$, $q = \alpha_5/\alpha_6$. В этом случае плотность вероятностей имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{c(\omega)}{\alpha_6 x (x^2 + \alpha_5/\alpha_6)} \exp\left(\int_{\omega}^x \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 u + \alpha_3 u^2)}{\alpha_6 u (u^2 + \alpha_5/\alpha_6)} du\right) = \\ &= n x^{\frac{2\alpha_1}{\alpha_5} - 1} (\alpha_6 x^2 + \alpha_5)^{\frac{\alpha_3}{\alpha_6} - \frac{\alpha_1}{\alpha_5} - 1} \exp\left(\frac{2\alpha_2}{\sqrt{\alpha_5\alpha_6}} \arctg\left[x \sqrt{\frac{\alpha_6}{\alpha_5}}\right]\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где n – нормировочная константа. Для существования плотности вероятностей ее параметры должны удовлетворять неравенствам $\alpha_1/\alpha_5 > 1$, $\alpha_3/\alpha_6 < 1$. Для того чтобы при этом существовали стационарные моменты, для математического ожидания нужно $\alpha_3/\alpha_6 < 0,5$, для дисперсии – $\alpha_3/\alpha_6 < 0$, для третьего момента – $\alpha_3/\alpha_6 < -0,5$ и для четвертого момента – $\alpha_3/\alpha_6 < -1$.

В случае $\Delta < 0$ обозначим корни уравнения $r_0 > r_1 > r_2$ так, что

$$\alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 r^3 = \alpha_6 (r - r_0)(r - r_1)(r - r_2).$$

Тогда плотность вероятностей выражается в виде

$$f(x) = n (x - r_0)^{\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 r_0 + \alpha_3 r_0^2)}{\alpha_6 (r_0 - r_1)(r_0 - r_2)} - 1} (x - r_1)^{-\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 r_1 + \alpha_3 r_1^2)}{\alpha_6 (r_0 - r_1)(r_1 - r_2)} - 1} (x - r_2)^{\frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_2^2)}{\alpha_6 (r_0 - r_2)(r_1 - r_2)} - 1}. \quad (9)$$

При этом должны выполняться неравенства

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 r_0 + \alpha_3 r_0^2) > \alpha_6 (r_0 - r_1)(r_0 - r_2), \alpha_3/\alpha_6 < 1.$$

Для существования m -го момента, кроме этого, необходимо соблюдение условия $m/2 + \alpha_3/\alpha_6 < 1$. К сожалению, аналитические выражения нормировочной константы n и моментов $E[r^m]$ очень громоздки, включают гипергеометрические функции. При сделанных предположениях процесс, характеризующийся такой плотностью, имеет нижнюю границу, равную наибольшему корню, т.е. $r(t) \geq r_0$.

11. Модель без ограничений II

В этой модели [1] процесс краткосрочной ставки следует уравнению

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw, \gamma > 0. \quad (10)$$

Поэтому $\mu(x) = k(\theta - x)$, $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^{2\gamma}$ и стационарная плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{n}{x^{2\gamma}} \exp \left[\frac{q}{x^{2\gamma}} \left(\frac{\theta x}{1 - 2\gamma} - \frac{x^2}{2 - 2\gamma} \right) \right], x > 0, \quad (11)$$

где $q = 2k/\sigma^2$, n – постоянная нормировки. Значения параметра γ , допускающие сходимость интеграла от $f(x)$ на интервале $(0, \infty)$, определяются неравенством $\gamma > 0,5$. При этом имеются две особые точки: $\gamma = 0,5$ (в этом случае такая модель краткосрочной ставки превращается в модель CIR) и $\gamma = 1$, когда плотность вероятностей сводится к виду, соответствующему процессу модели Бреннана–Шварца:

$$f(x) = \frac{c^{q+1}}{\Gamma(q+1)x^{2+q}} e^{-c/x}, c = \theta q, x > 0. \quad (12)$$

Когда $\gamma = 1,5$, модель «без ограничений II» известна под наименованием «модель CKLS». Модель Васичека тоже является вложенной моделью в модель «без ограничений II» при $\gamma = 0$. Для того чтобы существовали моменты порядка m , необходимо выполнение неравенства $2\gamma > m + 1$. К сожалению, выражение для плотности вероятностей в общем случае не позволяет вычислять моменты в аналитическом виде, хотя для упомянутых частных случаев они вычисляются просто. В табл. 2 приведены характеристики плотностей этого семейства.

Т а б л и ц а 2

Характеристики моделей

Модель	γ	$E[X]$	$\text{Var}[X]$	Асимметрия	Экссесс
Васичека	0	θ	$\frac{\sigma^2}{2k}$	0	3
CIR	0,5	$\frac{q}{c} = \theta$	$\frac{q}{c^2} = \frac{\sigma^2 \theta}{2k}$	$2\sqrt{q}$	$3 + 6 \frac{1}{q}$
Бреннана–Шварца	1,0	$\frac{c}{q} = \theta$	$\frac{\theta^2}{q-2} = \frac{\theta^2 \sigma^2}{2k - \sigma^2}$	$4 \frac{\sqrt{q-2}}{q-3}$	$3 \frac{(q-2)(q+5)}{(q-4)(q-3)}$
CKLS	1,5	$\frac{q}{c} = \theta$	Не существует	Не существует	Не существует

12. Модель CEV

Еще до появления модели «без ограничений II» использовались модели, которые потом оказались частными случаями этой модели. Одной из них является модель CEV – модель процесса с постоянной

эластичностью дисперсии (*Constant Elasticity of Variance*), предложенная Дж. Коксом и С. Россом [11], когда в уравнении (10) принято $\theta = 0$:

$$dr = -k r dt + \sigma r^\gamma dw$$

так, что дрейф $\mu(x) = -kx$, коэффициент диффузии $\sigma^2(x) = \sigma^2 x^{2\gamma}$, а стационарная плотность вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{c (2-2\gamma)^{1/(2-2\gamma)}}{\Gamma[(0,5-\gamma)/(1-\gamma)] (cx)^{2\gamma}} \exp\left(-\frac{(cx)^{2-2\gamma}}{2-2\gamma}\right), x > 0,$$

где $c = (2k/\sigma^2)^{1/(2-2\gamma)}$. Значения параметра γ , допускающие сходимость интеграла от $f(x)$ на интервале $(0, \infty)$, определяются неравенством $\gamma < 0,5$. Заметим, что это условие допускает не только положительные, но и отрицательные значения параметра γ . При $\gamma \neq 0$ процесс $r(t)$ с вероятностью единица принимает только неотрицательные значения. Причем для $\gamma > 0$ плотность вероятностей монотонно убывает с возрастанием аргумента (т.е. меньшие значения процесса более вероятны, чем большие). Если $\gamma < 0$, плотность вероятностей $f(x)$ имеет максимум в точке $x = (-\sigma^2 \gamma / k)^{0,5/(1-\gamma)}$. Значение $\gamma = 0$ является особой точкой, в этом случае процесс $r(t)$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2/2k$. Это семейство плотностей проиллюстрировано на рис. 5.

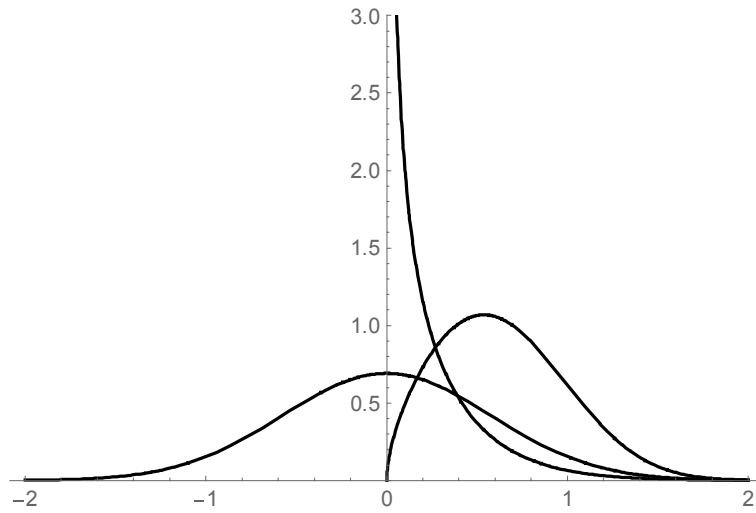


Рис. 5. Плотности вероятностей для различных значений γ ($\gamma = 0, \gamma < 0, \gamma > 0$)

Когда $\gamma \neq 0$, моменты $E[X^m]$ вычисляются по формуле

$$E[X^m] = \frac{\Gamma(m+1-2\gamma)}{c^m \Gamma(2-2\gamma)} (2-2\gamma)^{0,5m/(1-\gamma)},$$

поэтому важные числовые характеристики в модели CEV такие:

$$E[X] = (2-2\gamma)^{1/(2-2\gamma)} / c \Gamma\left(\frac{1-2\gamma}{2-2\gamma}\right),$$

$$\text{Var}[X] = (2-2\gamma)^{1/(1-\gamma)} \left[\Gamma\left(\frac{1-2\gamma}{2-2\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{3-2\gamma}{2-2\gamma}\right) - 1 \right] / c^2 \Gamma\left(\frac{1-2\gamma}{2-2\gamma}\right)^2,$$

$$S = \frac{\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right)^2 \Gamma\left(\frac{2-\gamma}{1-\gamma}\right) - 3 \Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{1,5-\gamma}{1-\gamma}\right) + 2}{\left(\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{1,5-\gamma}{1-\gamma}\right) - 1 \right)^{3/2}},$$

$$K = \frac{\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right)^3 \Gamma\left(\frac{2,5-\gamma}{1-\gamma}\right) - 4 \Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right)^2 \Gamma\left(\frac{2-\gamma}{1-\gamma}\right) + 6 \Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{1,5-\gamma}{1-\gamma}\right) - 3}{\left(\Gamma\left(\frac{0,5-\gamma}{1-\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{1,5-\gamma}{1-\gamma}\right) - 1\right)^2}.$$

В модели CEV роль параметра формы выполняет параметр волатильности модели γ . К сожалению, в аналитическом виде можно привести только зависимость $\omega(\gamma)$, поскольку зависимость $\gamma(\omega)$ здесь сложная: $\omega(\gamma) = \Gamma\left(\frac{1-2\gamma}{2-2\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{3-2\gamma}{2-2\gamma}\right) - 1$. Довольно грубое, но простое приближение обратной зависимости имеет вид $\gamma(\omega) \approx 0,14 + 0,25 \ln \omega$. Зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ для модели CEV представлены на рис. 6.

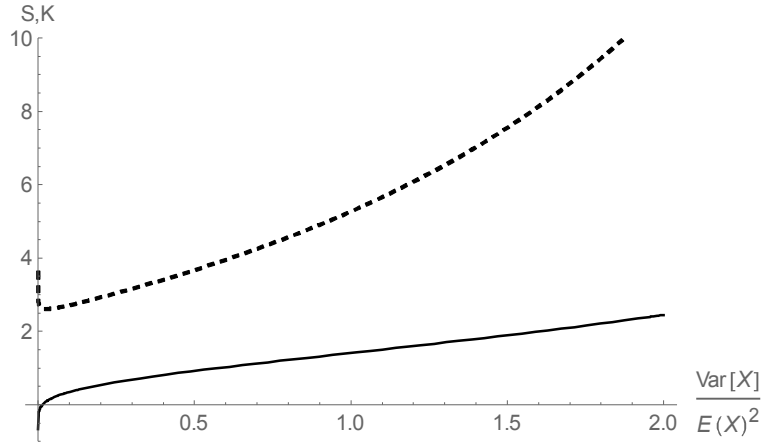


Рис. 6. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для модели CEV

Модель CEV является единственной моделью из рассматриваемых здесь, у которой коэффициент эксцесса может принимать значение меньше 3 (коэффициент эксцесса нормального распределения). Это происходит на интервале значений $-2,091 < \gamma < -0,225$, где в точке $\gamma = -0,766$ ($\omega = 0,145$) коэффициент эксцесса принимает свое минимальное значение $K = 2,610$. Модель CEV является также единственной, у которой коэффициент асимметрии S может принимать отрицательные значения (левый хвост плотности тяжелее правого), это происходит для $\gamma < -0,927$ ($\omega < 0,120$).

13. Модель CIR

Другой частной версией уравнения (10) является модель CIR [12], которая получается, если положить, что $k = 0$:

$$dr = \sigma r^\gamma dw.$$

Когда стационарный режим в этой модели существует, плотность вероятностей процесса $r(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\sigma^2 x^3 f(x)]}{\partial x^2} = 0.$$

Поскольку это уравнение второго порядка, нужно иметь два краевых условия для определения однозначного решения. В качестве таких условий естественно выбрать условие нормировки и величину нижней границы возможных значений процентной ставки, обозначим ее r_0 . Тогда решение уравнения $f(x)$ выразится в виде

$$f(x) = (\gamma-1)(2\gamma-1) \frac{2}{r_0} \left(\frac{x}{r_0} - 1 \right) \left(\frac{x}{r_0} \right)^{-2\gamma}, \quad x > r_0 > 0.$$

Как видим, эта плотность является, по существу, смесью двух распределений Парето, известных как распределения с тяжелыми хвостами. Для существования моментов $E[X^m]$ необходимы достаточно большие значения параметра γ , если это выполнено, то моменты будут вычисляться по формуле

$$E[X^m] = \frac{2(\gamma-1)(2\gamma-1)r_0^m}{(2\gamma-m-1)(2\gamma-m-2)}, \gamma > 1 + \frac{m}{2},$$

и важные числовые характеристики процесса $r(t)$ будут иметь вид

$$E[X] = \frac{2(\gamma-1)(2\gamma-1)r_0}{(2\gamma-2)(2\gamma-3)}, \gamma > 1,5; \text{Var}[X] = \frac{(2\gamma-1)r_0^2}{(\gamma-2)(2\gamma-3)^2}, \gamma > 2;$$

$$S = \frac{2(2\gamma+1)}{(2\gamma-5)} \sqrt{\frac{\gamma-2}{2\gamma-1}} > \sqrt{2}, \gamma > 2,5; K = \frac{6(\gamma-2)(4\gamma^2-4\gamma+3)}{(\gamma-3)(2\gamma-1)(2\gamma-5)} > 6, \gamma > 3.$$

В этой модели снова параметр волатильности γ играет роль параметра формы плотности вероятностей, при этом $\gamma = 0,25(5 + \sqrt{9+8/\omega})$. Зависимости $S(\omega)$ и $K(\omega)$ для модели CIR представлены на рис. 7.

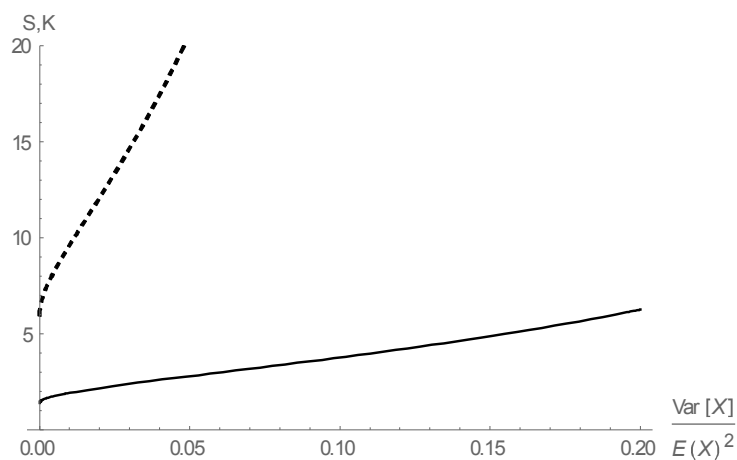


Рис. 7. Зависимости коэффициента асимметрии $S(\omega)$ и коэффициента эксцесса $K(\omega)$ от отношения дисперсии к квадрату математического ожидания для модели CIR

Заметим, что в оригинальной модели CIR предлагалось $\gamma = 1,5$, однако это не гарантирует существования даже математического ожидания. На рис. 8 представлены примеры плотностей вероятностей для модели CIR для различных значений параметра γ . Для плотностей характерно, что чем меньше γ , тем более тяжелый хвост; чем больше γ , тем выше максимум, который встречается в точке $x_{\max} = 2\gamma r_0 / (2\gamma - 1)$.

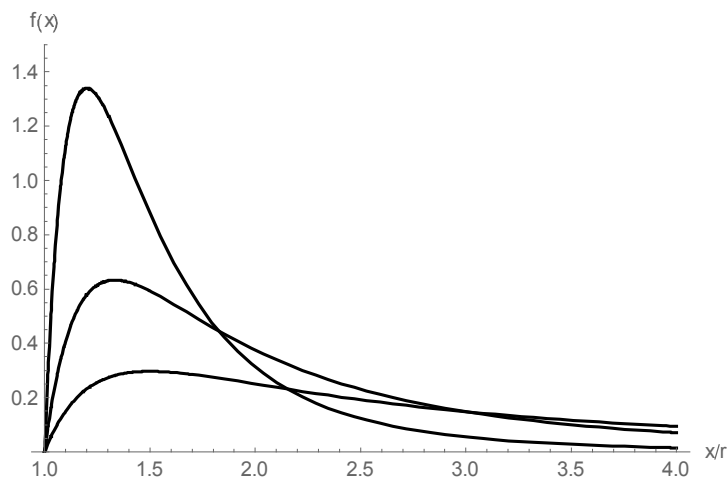


Рис. 8. Примеры плотностей вероятностей для значений параметра $\gamma = 1,5; 2; 3$

Во всех рассмотренных выше моделях существует стационарный режим. Однако встречаются такие модели, в которых такого режима не существует. К ним относятся модели, приведённые ниже.

14. Модель Мертона

Предложенная Р. Мертоном [13] модель

$$dr(t) = \alpha dt + \sigma dW(t)$$

порождает нестационарный гауссовский процесс

$$r(t) = r(0) + \alpha t + \sigma W(t)$$

с линейно изменяющимся математическим ожиданием и линейно возрастающей дисперсией

$$E[r | r(0)] = r(0) + \alpha t, \text{Var}[r] = \sigma^2 t.$$

15. Модель Дотана

Уравнение модели Дотана [14]

$$dr = \sigma r dW$$

можно решить в явном виде

$$r(t) = r(0) \exp[-0,5 \sigma^2 t + \sigma W(t)],$$

откуда следует, что порождаемый моделью случайный процесс имеет логарифмически нормальное распределение и является нестационарным. Математическое ожидание постоянно, но дисперсия экспоненциально возрастает со временем:

$$E[r | r(0)] = r(0), \text{Var}[r | r(0)] = r(0)^2 (\exp[\sigma^2 t] - 1).$$

16. Модель GBM

Модель GBM – модель процесса геометрического броуновского движения (*Geometric Brownian Motion*):

$$dr = \beta r dt + \sigma r dW,$$

введена в современный финансовый анализ П. Самюэльсоном [15]. Она порождает нестационарный процесс геометрического броуновского движения

$$r(t) = r(0) \exp[(\beta - 0,5 \sigma^2) t + \sigma W(t)].$$

В этом случае плотность вероятностей процентной ставки логарифмически нормальная. В отличие от модели BDT, которая порождает тоже логарифмически нормальный процесс, моменты $r(t)$ в модели GBM не постоянные, а экспоненциально возрастают со временем, в частности

$$E[r | r(0)] = r(0) \exp[\beta t], \text{Var}[r | r(0)] = r(0)^2 (q - 1) \exp[2\beta t], q = \exp[\sigma^2 t],$$

$$S = (q + 2) \sqrt{\lambda - 1}, K = q^4 + 2q^3 + 3q^2 - 3.$$

Выражения для асимметрии и эксцесса совпадают с выражениями для этих характеристик модели BDT, но параметр q здесь не является константой, а экспоненциально возрастает со временем.

Заключение

Процесс краткосрочных ставок является основой для построения временной структуры доходности бескупонных облигаций. Это объясняет интерес к анализу процессов краткосрочных ставок. В литературе имеется много статей, в которых сделаны эмпирические попытки найти модель краткосрочной ставки, для которой получается временная структура, наиболее близкая к реально наблюдаемой структуре [1–3]. С другой стороны, в литературе содержатся также эмпирические факты о том, что известные модели краткосрочной ставки не обеспечивают этого на допустимом уровне согласия [10]. Поэтому имеется необходимость в аналитических исследованиях, позволяющих определить степень риска при применении той или иной модели краткосрочной ставки доходности. В качестве необходимой основы для этого нужны сведения о вероятностных свойствах процессов краткосрочной ставки, выраженные аналитически, что и предлагается в настоящей статье.

ЛІТЕРАТУРА

1. Chan K.C., Karolyi G.A., Longstaff F.A., Sanders A.S. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate // *J. of Finance*. 1992. V. 47. P. 1209–1227.
2. Ahn D.-H., Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics // *The Review of Financial Studies*. 1999. V. 12, No. 4. P. 721–762.
3. Bali T. An empirical comparison of continuous time models of the short term interest rate // *Journal of Futures Markets*. 1999. V. 19, No. 7. P. 777–797.
4. Vasiček O.A. An equilibrium characterization of the term structure // *J. of Financial Economics*. 1977. V. 5. P. 177–188.
5. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. A theory of the term structure of interest rate // *Econometrica*. 1985. V. 53. P. 385–467.
6. Duffie D., Kan R. A yield-factor model of interest rates // *Math. Finance*. 1996. V. 6. P. 379–406.
7. Longstaff F.A. A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rate // *Journal of Financial Economics*. 1989. V. 23. P. 195–224.
8. Brennan M.J., Schwartz E.S. A continuous time approach to the pricing of bond // *Journal of Banking and Finance*. 1979. V. 3. P. 135–155.
9. Black F., Derman E., Toy W. A one factor model of interest rates and its application to treasury bond options // *Financial Analysts Journal*. 1990. January – February. P. 33–39.
10. Ait-Sahalia Y. Testing continuous-time models of the spot interest rate // *Review of Financial Studies*. 1996. V. 9, No. 2. P. 385–426.
11. Cox J.C., Ross S.A. The valuation of options for alternative stochastic processes // *J. of Financial Economics*. 1976. V. 3. P. 145–166.
12. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. An analysis of variable rate loan contracts // *J. of Finance*. 1980. V. 35. P. 389–403.
13. Merton R.C. Theory of Rational Option Pricing // *Bell Journal of Economics and Management Science*. 1973. V. 4 (1). P. 141–183.
14. Dothan M. On the term structure of interest rates // *J. of Financial Economics*. 1978. V. 6. P. 59–69.
15. Samuelson P.A. Rational Theory of Warrant Pricing // *Industrial Management Review*. 1965. V. 6. P. 13–31.

Медведев Геннадий Алексеевич, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: MedvedevGA@bsu.by
Белорусский государственный университет (Республика Беларусь)

Поступила в редакцию 4 июня 2016 г.

Medvedev Gennady A. (Belarusian State University, Belarus).

The probability density of the processes of yield interest rates.

Keywords: interest rates; the probability density; numerical characteristics.

DOI: 10.17223/19988605/36/4

The processes of short-term interest rates rise to many changes in market indices, as well as form the basis of determining the value of market assets and commercial contracts. A special role they play in calculating the term structure of the yield. Therefore, the development of mathematical models of these processes is extremely interesting for financial analysts and market research issues. There are many versions of change of short-term risk-free interest rates in the framework of the theory of diffusion processes. However, there is still no such a model, which would be the basis for building a term structure of yields close to existing on a real financial market. It is interesting to analyze the existing models in order to clarify their features in a probabilistic sense, in more detail than has been done by their creators and users. To this end, the paper examines the marginal probability density of the diffusion processes generated by sixteen models of short-term interest rates, that allow obtain densities in an analytical form. Here will be made such analysis for the family of models used by the authors of papers that are widely known in their fit to the actual time series of yield. All considered models belong to the class of diffusion that generate processes $X(t)$, described by the equation

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t), \quad t > t_0, \quad X(t_0) = X_0,$$

where a specific setting of drift $\mu(x)$ and volatility $\sigma(x)$ defines one or another particular model.

Some models, such as the Vasicek model, Cox - Ingersoll - Ross, geometric Brownian motion, Ahn - Gao, are well documented in the literature, but nevertheless their properties are listed here for convenience of comparison with other, less well-known or unstudied models. Other densities are described for the first time. The proposed analysis will be useful to the reader to determine the most appropriate models of short-term rates in the determination of the term structure of zero-coupon yield approximating actually observed, as far as possible, by the best way.

Analysis scheme reduces to solution of the direct Kolmogorov equation for the stationary probability density and, if necessary, discuss its features and the first four moments are calculated, usually of interest in practice. It is shown that for the models the coefficients of skewness and kurtosis, defined moments third and fourth order, depend on a single parameter, that called as the form parameter density, which, in turn, is determined only by the ratio of the variance to the square of the expectation (this corresponds to the square of the so-called coefficient of variation).

REFERENCES

1. Chan, K.C., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A. & Sanders, A.S. (1992) An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *Journal of Finance*. 47. pp. 1209-1227. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1992.tb04011.x

2. Ahn, D.-H. & Gao, B. (1999) A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *The Review of Financial Studies*. 12(4). pp. 721-762. DOI: 10.1093/rfs/12.4.721
3. Bali, T. (1999) An empirical comparison of continuous time models of the short term interest rate. *Journal of Futures Markets*. 19(7). pp. 777-797. DOI: 10.1002/(SICI)1096-9934(199910)19:7<777::AID-FUT3>3.0
4. Vasiček, O.A. (1977) An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*. 5. pp. 177-188. DOI: 10.1002/9781119186229.ch6
5. Cox, J.C., Ingersoll, J.E. & Ross, S.A. (1985) A theory of the term structure of interest rate. *Econometrica*. 53. pp. 385-467. DOI: 10.2307/1911242
6. Duffie, D. & Kan, R. (1996) A yield-factor model of interest rates. *Math. Finance*. 6. pp. 379-406. DOI: 10.1111/j.1467-9965.1996.tb00123.x
7. Longstaff, F.A. (1989) A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rate. *Journal of Financial Economics*. 23. pp. 195-224. DOI: 10.1016/0304-405X(89)90056-1
8. Brennan, M.J. & Schwartz, E.S. (1979) A continuous time approach to the pricing of bond. *Journal of Banking and Finance*. 3. pp. 135-155. DOI: 10.1016/0378-4266(79)90011-6
9. Black, F., Derman, E. & Toy, W. (1990) A one factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Financial Analysts Journal*. January – February. pp. 33-39. DOI: 10.2469/faj.v46.n1.33
10. Aït-Sahalia, Y. (1996) Testing continuous-time models of the spot interest rate. *Review of Financial Studies*. 9(2). pp.385-426. DOI: 10.3386/w5346
11. Cox, J.C. & Ross, S.A. (1976) The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*. 3. pp. 145-166. DOI: 10.1016/0304-405X(76)90023-4
12. Cox, J.C., Ingersoll, J.E. & Ross S.A. (1980) An analysis of variable rate loan contracts. *Journal of Finance*. 35. pp. 389-403. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1980.tb02169.x
13. Merton, R.C. (1973) Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*. 4(1). pp. 141-183.
14. Dothan, M. (1978) On the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*. 6. pp. 59-69.
15. Samuelson, P.A. (1965) Rational Theory of Warrant Pricing. *Industrial Management Review*. 6. pp. 13-31. DOI: 10.1007/978-3-319-22237-0_11