

**М.Н. Сиротина****СРАВНЕНИЕ МП- И ММ-ОЦЕНОК ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ  
В МОДУЛИРОВАННОМ СИНХРОННОМ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОМ  
ПОТОКЕ СОБЫТИЙ**

*Работа выполнена в рамках государственного заказа Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Национальном исследовательском Томском государственном университете на 2014–2016 годы.*

Рассматривается модулированный синхронный дважды стохастический поток событий. Поток функционирует в условиях непродлевающегося мертвого времени, т.е. после каждого зарегистрированного события наступает время фиксированной длительности, в течение которого другие события исходного модулированного синхронного потока недоступны наблюдению. Полагается, что длительность мертвого времени – неизвестная величина. Проводится сравнение качества получаемых (по наблюдениям за моментами наступления наблюдаемых событий потока) оценок длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия (МП-оценки) и методом моментов (ММ-оценки).

**Ключевые слова:** модулированный синхронный поток событий; непродлевающееся мертвое время; МП-оценки; ММ-оценки; длительность мертвого времени.

Настоящая работа является непосредственным продолжением исследований модулированного синхронного потока событий, начатых в статьях [1–4].

Математические модели систем массового обслуживания широко применяются при описании реальных физических, технических и других процессов и систем. В связи с бурным развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей, телекоммуникационных сетей, объединенных термином «цифровые сети интегрального обслуживания» (ЦСИО) [5, 6].

На практике параметры, определяющие входящий поток событий, изменяются со временем, при этом изменения часто носят случайный характер, последнее приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий. По-видимому, одной из первых работ в этом направлении явилась статья [7], где дважды стохастический поток определяется как поток, интенсивность которого есть случайный процесс. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Подчеркнем, что потоки второго класса впервые введены в рассмотрение практически одновременно в 1979 г. в [8, 9]. В [8] введенные потоки названы МС (Markov chain)-потоками, в [9] – MVP (Markov versatile processes)-потоками. Отечественные и зарубежные авторы в своих работах начала 90-х гг. [10–15] называют данные потоки событий либо дважды стохастическими потоками событий, либо МАР-потоками, либо МС-потоками. В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, МС-потоки можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки событий [16–21]; 2) асинхронные и обобщенные асинхронные потоки событий [22–27]; 3) полусинхронные и обобщенные полусинхронные потоки событий [28–33]. В [34] введены в рассмотрение МАР-потоки событий первого порядка (собственно МАР-потоки, введенные в [9]) и МАР-потоки событий второго порядка (суперпозиция двух синхронизированных МАР-потоков первого порядка, отличающихся друг от друга исходными параметрами). В [34] показывается, что синхронный МС-поток является частным случаем МАР-потока первого порядка, асинхронный и полусинхронный МС-потоки являются частными случаями МАР-потока второго порядка.

В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо (что еще более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [24, 27, 29, 33, 35–38]; 2) оценка параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [16–22, 26, 28, 30–32].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [39–46], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В качестве примера приведем протокол CSMA/CD – протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта, широко используемого в компьютерных сетях. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по ней рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети. Для того чтобы оценить потери заявок в узле сети, необходимо оценить длительность мертвого времени, которым выступает в данном случае длительность сигнала «заглушки».

В работах [1–4] введен в рассмотрение модулированный синхронный поток событий, являющийся обобщением синхронного потока и относящийся к классу MAP-потоков второго порядка. Синхронный поток событий систематически исследовался в работах [16–21, 47–52]. В статье [4] приведено решение задачи оценивания длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия [53–59]. В настоящей статье предложено решение задачи оценивания длительности мертвого времени методом моментов, а также производится сравнение оценок, полученных методом максимального правдоподобия (МП-оценки) и методом моментов (ММ-оценки).

## 1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный синхронный поток событий (далее – поток), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс  $\lambda(t)$  с двумя состояниями:  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ ). Длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  (потока) в  $i$ -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром  $\alpha_i, i = 1, 2$ . Если процесс  $\lambda(t)$  в момент времени  $t$  находится в  $i$ -м состоянии, то на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$ , где  $\Delta t$  – достаточно малая величина, с вероятностью  $\alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$  пребывание процесса  $\lambda(t)$  в  $i$ -м состоянии закончится и процесс  $\lambda(t)$  с вероятностью, равной единице, перейдет из  $i$ -го состояния в  $j$ -е ( $i, j = 1, 2; i \neq j$ ). В течение временного интервала случайной длительности, когда  $\lambda(t) = \lambda_i$ , имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью  $\lambda_i, i = 1, 2$ . Кроме того, переход из первого состояния процесса  $\lambda(t)$  во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности  $\lambda_1$ ; переход осуществляется с вероятностью  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ); с вероятностью  $1-p$  процесс  $\lambda(t)$  остается в первом состоянии. Переход из второго состояния процесса  $\lambda(t)$  в первое возможен также в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности  $\lambda_2$ ; переход осуществляется с вероятностью  $q$  ( $0 \leq q \leq 1$ ); с вероятностью  $1-q$  процесс  $\lambda(t)$  остается во втором состоянии. В сделанных предположениях  $\lambda(t)$  – марковский процесс.

Матрицы инфинитезимальных коэффициентов рассматриваемого потока примут вид

$$D_0 = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ q\lambda_2 & (1-q)\lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Элементами матрицы  $D_1$  являются интенсивности переходов процесса  $\lambda(t)$  из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы  $D_0$  – интенсивности переходов из

состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы  $D_0$  – интенсивности выхода процесса  $\lambda(t)$  из своих состояний, взятые с противоположным знаком. Отметим, что если  $\alpha_i = 0, i = 1, 2$ , то имеет место обычный синхронный поток событий [16–21].

После каждого зарегистрированного события наступает время фиксированной длительности  $T$  (далее – мертвое время), в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. Рассматривается непродлевающееся мертвое время, т.е. события, наступившие в течение интервала мертвого времени не вызывают его продления. По окончании длительности периода мертвого времени первое наступившее событие вновь порождает период мертвого времени длительности  $T$  и т.д. Вариант возникающей ситуации приведен на рис.1, где  $\lambda_1, \lambda_2$  – состояния процесса  $\lambda(t)$ ,  $t_1, t_2, \dots$  – моменты наступления наблюдаемых событий потока, штриховка – периоды мертвого времени длительности  $T$ , ось под номером 1 отображает исходный модулированный поток событий, под номером 2 – схему создания мертвого времени, под номером 3 – наблюдаемые события модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени.

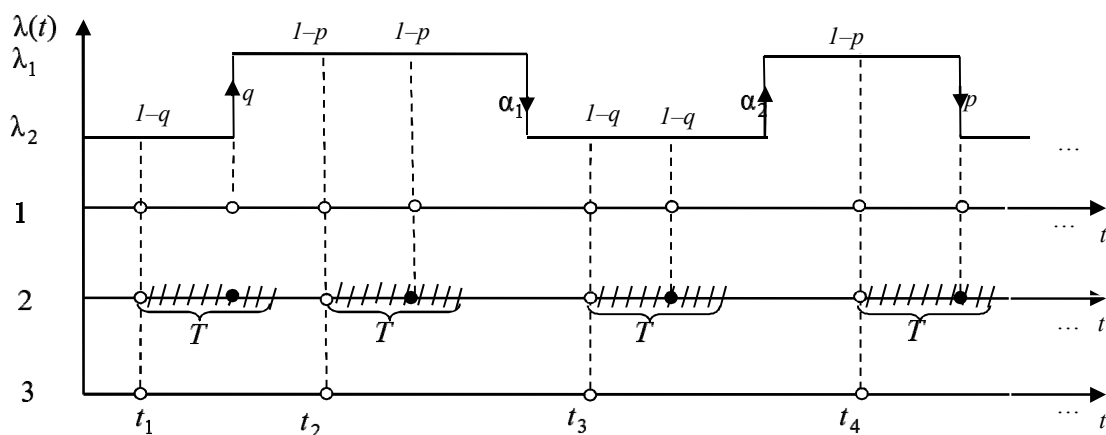


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Процесс  $\lambda(t)$  и типы событий (события пуассоновских потоков с интенсивностями  $\lambda_1$  либо  $\lambda_2$ ) являются принципиально ненаблюдаемыми (в сделанных предпосылках  $\lambda(t)$  – скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только моменты наступления наблюдаемых событий на временной оси  $t_1, t_2, \dots$ . Последовательность моментов  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  наступления событий наблюдаемого потока порождает вложенную цепь Маркова  $\{\lambda(t_k)\}$ , т.е. поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента  $t_k$  (момент наступления события потока),  $k = 1, 2, \dots$ . Рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения  $(t_0, t)$ , где  $t_0$  – момент начала наблюдений,  $t$  – момент окончания наблюдений, можно пренебречь, при этом полагается  $t_0 = 0$ .

Главная задача работы – в момент окончания наблюдений (в момент времени  $t$ ) построить оценки  $\hat{T}$  длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия и методом моментов (в предположении, что остальные параметры потока  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q$  известны) и произвести сравнение получаемых оценок.

## 2. МП-оценка длительности мертвого времени

Обозначим  $\tau_k = t_{k+1} - t_k, k = 1, 2, \dots$ , – значение длительности  $k$ -го интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока (рис. 2).

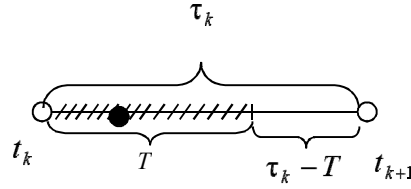


Рис. 2. Интервал между соседними наблюдаемыми событиями потока

Поскольку поток функционирует в стационарном режиме, то плотность вероятности значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока  $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$ ,  $\tau \geq 0$ , для любого  $k$  (индекс  $T$  подчеркивает, что плотность вероятности зависит от длительности мертвого времени). Таким образом, без потери общности момент наступления события  $t_k$  можно положить равным нулю, т.е.  $\tau = 0$ .

Тогда плотность вероятностей  $p_T(\tau)$  значений длительности интервала между наступлениями соседних событий модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени, запишется в виде [4]:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

$$\gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1} (z_2 - \lambda_1 \pi_1(T) - \lambda_2 \pi_2(T)),$$

$$z_1 = ((\alpha_1 + \lambda_1 + \alpha_2 + \lambda_2) - \sqrt{(\alpha_1 + \lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}) / 2,$$

$$z_2 = ((\alpha_1 + \lambda_1 + \alpha_2 + \lambda_2) + \sqrt{(\alpha_1 + \lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}) / 2, \quad z_1 < z_2,$$

$$\pi_1(T) = \pi_1 - (\pi_1 - \pi_1(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \quad \pi_2(T) = \pi_2 - (\pi_2 - \pi_2(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T},$$

$$\pi_1(0|T) = \frac{q\lambda_2\alpha_1 + (1-p)\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2) - \lambda_1\lambda_2(1-p-q)(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})}{z_1 z_2 - \lambda_1\lambda_2(1-p-q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

$$\pi_2(0|T) = \frac{(1-q)\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1) + p\lambda_1\alpha_2 - \lambda_1\lambda_2(1-p-q)(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})}{z_1 z_2 - \lambda_1\lambda_2(1-p-q)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}},$$

$$\pi_1 = \frac{\alpha_2 + q\lambda_2}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1 + p\lambda_1}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}.$$

Пусть  $\tau_1 = t_2 - t_1, \tau_2 = t_3 - t_2, \dots, \tau_k = t_{k+1} - t_k, k = 1, 2, \dots$ , – последовательность измеренных в результате наблюдения за потоком на интервале наблюдения  $(t_0, t)$  значений длительностей интервалов между соседними событиями наблюдаемого потока. Упорядочим величины  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$  по возрастанию:  $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(k)}$ . Тогда функция правдоподобия, с учетом (1), примет вид

$$L(\lambda_i, \alpha_i, p, q, T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = 0, \quad 0 < \tau_{\min} < T,$$

$$L(\lambda_i, \alpha_i, p, q, T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}), \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}.$$

Так как часть задачи исследования заключается в построении оценки длительности мертвого времени  $\hat{T}$ , то согласно методу максимального правдоподобия ее решение есть нахождение глобального максимума функции правдоподобия по неизвестному параметру  $T$ :

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}) = \prod_{j=1}^k \left\{ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau^{(j)}-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau^{(j)}-T)} \right\} \Rightarrow \max_T, \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}, \quad (2)$$

где  $z_1, z_2, \gamma(T)$  определены в (1).

Значение  $T$ , при котором (2) достигает своего глобального максимума, есть МП-оценка  $\hat{T}$  длительности мертвого времени.

В [5] аналитически строго решена оптимизационная задача (2): при любых значениях параметров рассматриваемого потока событий  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 \geq 0 (\lambda_1 > \lambda_2), \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, 0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$  МП-оценка длительности мертвого времени  $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$ . Таким образом, в процессе наблюдения потока событий (в течение временного интервала  $(t_0, t)$ ) вычисляются величины  $\tau_k, k = \overline{1, n}$ , после чего находится  $\tau_{\min} = \min \tau_k, k = \overline{1, n}$  и полагается  $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$ .

### 3. ММ-оценка длительности мертвого времени

В [3] показано, что модулированный синхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, в общем случае является коррелированным потоком. Только в частных случаях поток становится рекуррентным.

Пусть  $\tau_k = t_{k+1} - t_k, \tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$ , – значения длительностей смежных  $k$ -го и  $k+1$ -го интервалов между соседними событиями наблюдаемого потока ( $k = 1, 2, \dots$ ). В силу стационарности потока можно положить  $k = 1$  и рассматривать длительности интервалов  $\tau_1 = t_2 - t_1, \tau_2 = t_3 - t_2, \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$ . Тогда  $\tau_1 = 0$  соответствует моменту  $t_1$  наступления события наблюдаемого потока, а  $\tau_2 = 0$  соответствует моменту  $t_2$  наступления следующего события наблюдаемого потока. При этом соответствующая совместная плотность вероятностей имеет вид  $p_T(\tau_k, \tau_{k+1}) = p_T(\tau_1, \tau_2), \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$  [2]:

$$\begin{aligned} p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + \\ &+ C_T(z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1-T)})(z_1 e^{-z_1(\tau_2-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)}), \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T, \\ C_T &= e^{-(\beta_1+\beta_2)T} \frac{P(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 \pi_1(0) - \beta_2 \pi_2(0))(P_1 + P_2)}{\left[ (z_2 - z_1)(z_1 z_2 - P e^{-(\beta_1+\beta_2)T})(\beta_1 + \beta_2) \right]^2} \times \\ &\times \left\{ z_1 z_2 - e^{-(\beta_1+\beta_2)T} (2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2)) + e^{-2(\beta_1+\beta_2)T} (z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q))) \right\}, \quad (3) \\ \beta_1 &= \alpha_1 + p\lambda_1, \beta_2 = \alpha_2 + q\lambda_2, P = \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q), \\ P_1 &= (1-p)\lambda_1 \alpha_2 + q\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1), P_2 = (1-q)\lambda_2 \alpha_1 + p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2), \\ \pi_1(0) &= P_1 / (P_1 + P_2), \pi_2(0) = P_2 / (P_1 + P_2), \end{aligned}$$

где  $z_1, z_2, p_T(\tau_k)$  определены в (1) для  $\tau = \tau_k, k = 1, 2$ .

Теоретическая ковариация значений  $\tau_1, \tau_2$  запишется в виде

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \int_T^\infty \int_T^\infty \tau_1 \tau_2 p_T(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \left[ \int_T^\infty \tau p_T(\tau) d\tau \right]^2. \quad (4)$$

Подставляя плотность (1) и совместную плотность (3) в интегральную формулу для ковариации (4), находим ее явный вид

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \left( \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} \right)^2 C_T, \quad (5)$$

где  $z_1, z_2$  определены в (1),  $C_T$  определена в (3).

Пусть за время наблюдения (в течение временного интервала  $(t_0, t)$ ) реализовалось  $n$  интервалов  $(t_k, t_{k+1}), k = \overline{1, n}$ , длительности  $\tau_k, k = \overline{1, n}$ . Введем статистику:

$$\hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \tau_{k+1} - \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k \right)^2, \quad (6)$$

которая представляет собой оценку теоретической ковариации (5). Тогда согласно методу моментов уравнение моментов, учитывающее коррелированность потока событий, может быть записано в виде

$$\left( \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} \right)^2 C_T = \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2). \quad (7)$$

Подставляя в (7) значение  $C_T$ , определенное в (3), вводя новую переменную  $x = e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$  и проделывая необходимые выкладки, выражение (7) преобразуется в кубическое уравнение относительно переменной  $x$  вида

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0, \\ a &= h[z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q))], \\ b &= -\left\{ h[2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2)] + P^2 \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) \right\}, \\ c &= z_1 z_2 \left[ h + 2P \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) \right], d = -(z_1 z_2)^2 \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2), \\ h &= P(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) / (z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2))^2. \end{aligned} \quad (8)$$

При решении уравнения (8) определяются три корня  $x_i, i = 1, 2, 3$ , которые, в свою очередь, задают три ММ-оценки длительности мертвого времени:

$$\hat{T}_{MM}^{(i)} = -\frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \ln x_i, i = 1, 2, 3.$$

Используя полученные выше ММ-оценки  $\hat{T}_{MM}^{(i)}, i = 1, 2, 3$ , можно определить единственную ММ-оценку  $\hat{T}_{MM}$  по алгоритму, описанному ниже:

1. Для заданного набора параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$  осуществляется в течение длительности  $T_m = t$  ед. времени интервала наблюдения (интервала моделирования) имитационное моделирование наблюдаемого потока событий.
2. В ходе имитационного моделирования находится оценка ковариации  $\hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2)$ , определенная в (6), где  $n \geq 2$  ( $n$  – количество наблюдаемых событий потока).
3. Используя метод Виета, решается кубическое уравнение (8), т.е. находятся три корня  $x_i, i = 1, 2, 3$ , которые могут быть как вещественными, так и комплексными.
4. Если все корни  $x_i, i = 1, 2, 3$ , – комплексные, то  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ .
5. Если среди трех корней  $x_i, i = 1, 2, 3$ , выделяется хотя бы один вещественный, то возможны три варианта:

5.1. Вещественный корень один –  $x_1$ , тогда:

5.1.1. Если  $x_1 \leq 0$ , то  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ .

5.1.2. Если  $x_1 > 0$ , то:

5.1.2.1.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(1)} > \tau_{\min}$ .

5.1.2.2.  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} < \tau_{\min}$ .

5.1.2.3.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0$ .

5.2. Вещественных корней два –  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), тогда:

5.2.1. Если  $x_1 < x_2 \leq 0$ , то  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ .

5.2.2. Если  $x_1 \leq 0 < x_2$ , то:

5.2.2.1.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(2)} > \tau_{\min}$ .

5.2.2.2.  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \tau_{\min}$ .

5.2.2.3.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0$ .

5.2.3. Если  $0 < x_1 < x_2$ , то:

5.2.3.1.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ .

5.2.3.2.  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ .

5.2.3.3.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(1)}$ .

5.2.3.4.  $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)}) / 2$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$ .

5.2.3.5.  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$ .

5.2.3.6.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0$ .

5.3. Вещественных корней три –  $x_1, x_2, x_3$  ( $x_1 < x_2 < x_3$ ), тогда:

5.3.1. Если  $x_1 < x_2 < x_3 \leq 0$ , то  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ .

5.3.2. Если  $x_1 < x_2 \leq 0 < x_3$ , то:

5.3.2.1.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} > \tau_{\min}$ .

5.3.2.2.  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \tau_{\min}$ .

5.3.2.3.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0$ .

5.3.3. Если  $x_1 \leq 0 < x_2 < x_3$ , то:

5.3.3.1.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)}$ .

5.3.3.2.  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)}$ .

5.3.3.3.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)}$ .

5.3.3.4.  $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)}) / 2$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min}$ .

5.3.3.5.  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min}$ .

5.3.3.6.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0$ .

5.3.4. Если  $0 < x_1 < x_2 < x_3$ , то:

5.3.4.1.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ .

5.3.4.2.  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ .

5.3.4.3.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ .

5.3.4.4.  $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)}) / 2$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ .

5.3.4.5.  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$ .

5.3.4.6.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(1)}$ .

5.3.4.7.  $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)}) / 3$ , если  $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$ .

5.3.4.8.  $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)}) / 2$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$ .

5.3.4.9.  $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$ .

5.3.4.10.  $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$ , если  $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0 \leq \tau_{\min}$ .

В результате работы алгоритма выбирается один из вышеописанных вариантов, который определяет единственную ММ-оценку  $\hat{T}_{MM}$  длительности мертвого времени.

#### 4. Численное сравнение МП- и ММ-оценок

Для получения статистических результатов разработан алгоритм вычисления МП- и ММ-оценок, который реализован на языке программирования C# в среде программирования Microsoft Visual Studio C#.

Программа расчета состоит из трех этапов. На первом этапе осуществляется имитационное моделирование рассматриваемого модулированного синхронного дважды стохастического потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени (при заданных параметрах моделирования  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$ ). Сам алгоритм имитационного моделирования в данной работе не приводится; хотя он достаточно трудоемок, но никаких принципиальных сложностей не представляет. Результатом работы имитационной модели является последовательность значений длительности интервалов между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, n = 2, 3, \dots$  ( $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ , где  $t_{n+1}$  – последнее наблюдаемое событие на интервале моделирования  $T_m$ ).

Второй этап расчета заключается в нахождении численных значений МП- и ММ-оценок рассматриваемого потока. Опишем сокращенный алгоритм программной реализации второго этапа расчета:

1. На основании последовательности  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, n = 2, 3, \dots$ , находится МП-оценка

$$\hat{T}_{МП} = \tau_{\min} \quad (\tau_{\min} = \min \tau_k, k = \overline{1, n}).$$

2. Вычисляется оценка ковариации (6).

3. Методом Виета находятся корни  $x_i, i = 1, 2, 3$ , кубического уравнения (8), на основании которых вычисляются три ММ-оценки  $\hat{T}_{ММ}^{(i)}, i = 1, 2, 3$ .

4. Реализуется алгоритм нахождения единственной ММ-оценки  $\hat{T}_{ММ}$ .

Третий этап расчета заключается в сравнении качества МП- и ММ-оценок путем проведения статистического эксперимента:

1. Для заданного набора параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$  осуществляется моделирование наблюдаемого потока событий на интервале моделирования  $T_m$  для каждого  $j$ -го эксперимента,  $j = \overline{1, N}$ .

2. В каждом  $j$ -м эксперименте вычисляются значения МП- и ММ-оценок  $\hat{T}_{МП}^{(j)}, \hat{T}_{ММ}^{(j)}, j = \overline{1, N}$ .

3. В каждом  $j$ -м эксперименте вычисляются значения величин  $\Delta \hat{T}_{МП}^{(j)} = (\hat{T}_{МП}^{(j)} - T)^2$ ,  $\Delta \hat{T}_{ММ}^{(j)} = (\hat{T}_{ММ}^{(j)} - T)^2, j = \overline{1, N}$ , где  $T$  – истинное значение мертвого времени, известное из имитационной модели.

4. Осуществляется повтор шагов 1–3  $N$  раз.

Результатом третьего этапа расчета являются две выборки:  $(\Delta \hat{T}_{МП}^{(1)}, \Delta \hat{T}_{МП}^{(2)}, \dots, \Delta \hat{T}_{МП}^{(N)})$ ,  $(\Delta \hat{T}_{ММ}^{(1)}, \Delta \hat{T}_{ММ}^{(2)}, \dots, \Delta \hat{T}_{ММ}^{(N)})$ , используя которые вычисляются выборочные вариации полученных оценок:

$$\hat{V}_{МП} = (1/N) \sum_{j=1}^N \Delta \hat{T}_{МП}^{(j)}, \hat{V}_{ММ} = (1/N) \sum_{j=1}^N \Delta \hat{T}_{ММ}^{(j)}.$$

Сравнивая значения выборочных вариаций, решается, какая из оценок при заданных параметрах  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$  лучше, а какая хуже: если  $\hat{V}_{МП} \leq \hat{V}_{ММ}$ , то МП-оценка лучше ММ-оценки, в противном случае ММ-оценка лучше МП-оценки. Стоит отметить, что по определению при заданном времени моделирования  $T_m$  МП-оценка будет всегда смещенная ( $\tau_{\min} > T$ ). Вариант, когда МП-оценка не смещенная, реализуется только в асимптотическом случае, когда  $T_m \rightarrow \infty$ .

Результаты статистического эксперимента приведены в табл. 1–6. В первой строке таблиц указана длительность имитационного моделирования  $T_m$ , причем  $T_m$  изменяется от 10 до 50 с шагом 10 ед. времени в табл. 1–3, в табл. 4–6  $T_m$  изменяется от 600 до 1000 с шагом 100 ед. времени. Во второй и третьей строках таблиц для каждой длительности имитационного моделирования  $T_m$  приведены численные значения для выборочных вариаций МП- и ММ-оценок  $\hat{V}_{МП}$  и  $\hat{V}_{ММ}$  соответственно. В четвертой строке каждой из таблиц приведены численные значения разности  $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$ . Численные результаты во всех таблицах получены для  $N = 100$  ( $N$  – количество экспериментов).



Таблица 1

Результаты эксперимента при  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, p = 0,5, q = 0,4, \alpha_1 = 0,03, \alpha_2 = 0,03, T = 0,5$ 

$T_m$	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,08936555	0,02139580	0,00190583	0,00114900	0,00128956
$\hat{V}_{ММ}$	0,08919526	0,02131419	0,00190530	0,00114900	0,00445481
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0,00170293	0,00008161	0,00000052	0	-0,00316525

Таблица 2

Результаты эксперимента при  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, p = 0,4, q = 0,2, \alpha_1 = 0,05, \alpha_2 = 0,05, T = 0,7$ 

$T_m$	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,90196699	0,12758867	0,040312912	0,02378204	0,00815925
$\hat{V}_{ММ}$	0,90034098	0,12616512	0,038268349	0,02355205	0,00812320
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0,00162600	0,00142355	0,002044563	0,00229987	0,00003605

Таблица 3

Результаты эксперимента при  $\lambda_1 = 1,5, \lambda_2 = 0,9, p = 0,4, q = 0,3, \alpha_1 = 0,02, \alpha_2 = 0,02, T = 0,2$ 

$T_m$	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,04937792	0,00691690	0,00299561	0,00132811	0,00104303
$\hat{V}_{ММ}$	0,04930285	0,00690571	0,00296747	0,00126077	0,00103060
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0,00007507	0,00001118	0,00002814	0,00006734	0,00001243

Таблица 4

Результаты эксперимента при  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, p = 0,5, q = 0,4, \alpha_1 = 0,03, \alpha_2 = 0,03, T = 0,5$ 

$T_m$	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00000410	0,00000405	0,00000304	0,00000225	0,00000151
$\hat{V}_{ММ}$	0,00314312	0,00460004	0,00594022	0,00305194	0,00614238
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,00313901	-0,00459599	-0,00593717	-0,00304969	-0,00614086

Таблица 5

Результаты эксперимента при  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, p = 0,4, q = 0,2, \alpha_1 = 0,05, \alpha_2 = 0,05, T = 0,7$ 

$T_m$	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00009986	0,00006699	0,00003027	0,00003759	0,00002732
$\hat{V}_{ММ}$	0,00875014	0,00404040	0,00710656	0,00359553	0,00014134
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,00865027	-0,00397328	-0,00707628	-0,00355793	-0,00011401

Таблица 6

Результаты эксперимента при  $\lambda_1 = 1,5, \lambda_2 = 0,9, p = 0,4, q = 0,3, \alpha_1 = 0,02, \alpha_2 = 0,02, T = 0,2$ 

$T_m$	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00000638	0,00000349	0,00000335	0,00000166	0,00000137
$\hat{V}_{ММ}$	0,00000638	0,00000349	0,00103220	0,00002244	0,00002016
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0	0	-0,00102884	-0,00002078	-0,00001879

Анализ результатов, полученных в ходе статистического эксперимента, показывает, что при достаточно малом времени моделирования  $T_m$  ( $T_m = 10, 20, 30, 40, 50$  ед. времени) ММ-оценки длительности мертвого времени лучше МП-оценок длительности мертвого времени (см. табл. 2, 3) либо, по крайней мере, не хуже их (см. табл. 1). Это вполне объяснимо, так как при малом времени наблюдения МП-оценка  $\hat{T}_{МП}$  может быть достаточно сильно смещенной относительно  $T$ . При достаточно большом времени моделирования  $T_m$  ( $T_m = 600, 700, 800, 900, 1000$  ед. времени) МП-оценки лучше ММ-оценок (табл. 4–6), что вполне естественно, так как при увеличении времени наблюдения за потоком смещение МП-оценки  $\hat{T}_{МП}$  относительно  $T$  уменьшается.

### Заключение

Анализ проведенного исследования оценок длительности мертвого времени  $T$  на базе метода максимального правдоподобия и метода моментов позволяет сделать вывод о том, что при малом времени наблюдения за потоком предпочтительнее применять метод моментов и использовать ММ-оценку  $\hat{T}_{ММ}$ , при большом времени наблюдения за потоком – МП-оценку  $\hat{T}_{МП}$ . Границу применения той или иной оценки при заданных параметрах потока  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$  следует определять для каждого случая отдельно путем имитационного моделирования.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Сиротина М.Н. Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях непродлевающего мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 63–74.
2. Сиротина М.Н., Горцев А.М. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями в модулированном синхронном потоке при непродлевающемся мертвом времени // Материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Геннадия Алексеевича Медведева. Белоруссия. Минск. 23–26 февраля 2015. Минск : Изд-во РИВШ, 2015. С. 299–304.
3. Сиротина М.Н. Совместная плотность вероятностей значений длительности интервалов между моментами наступления соседних событий в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке при непродлевающемся мертвом времени и условия рекуррентности потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 2(31). С. 53–67.
4. Сиротина М.Н., Горцев А.М. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1(34). С. 50–64.
5. Дудин А.Н., Клименок В.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
6. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Математическая теория телетрафика и ее приложения к анализу мультисервисных сетей связи следующих поколений // Автоматика и вычислительная техника. 2013. № 2. С. 11–21.
7. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No. 4. P. 923–930.
8. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
9. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
10. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communication in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
11. Lucantoni D.M., Neuts, M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communication in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10. P. 575–598.
12. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 66–77.
13. Yang Y.W. Woo Shin. BMAP/G/1 queue with correlated arrivals of customers and disasters // Operation Research Letters. 2004. V. 32, Issue 4. P. 364–373.
14. Artalejo Jesus R., Chakravarthy Srinivas R. Computational analysis of the maximal queue length in the MAP/M/c retrival queue // Applied Mathematics and Computation. 2006. V. 183, Issue 2. P. 1399–1409.

15. Best J. Doubly Stochastic Processes: an Approach for Understanding Central Nervous System Activity // *Selected Topics on Applied Mathematics, Circuits, Systems and Signals*. WSEAS Press, 2009. P. 155–158.
16. Bushalnov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events // *Automation and Remote Control*. 2008. V. 69, No. 9. P. 1517–1533.
17. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // *Радиотехника*. 2004. № 10. С. 8–16.
18. Василевская Т.П., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо не проявлением событий // *Вестник Томского государственного университета*. 2004. № 9. С. 129–138.
19. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // *Вестник Томского государственного университета*. 2003. № 6. С. 232–239.
20. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // *Вестник Томского государственного университета*. 2002. № 1. С. 24–29.
21. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного альтернирующего пуассоновского потока событий методом моментов // *Радиотехника*. 1995. № 7–8. С. 6–10.
22. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
23. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
24. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного синхронного потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2012. № 2(19). С. 88–101.
25. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // *Discrete Mathematics and Applications*. 2011. V. 21, No. 3. P. 283–290.
26. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров асинхронного потока с иницированием лишних событий методом моментов // *Вестник Томского государственного университета*. 2006. № 18. С. 267–273.
27. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Шевченко Т.И. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // *Известия высших учебных заведений. Физика*. 1993. № 12. С. 67–85.
28. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // *Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой российской конференции с международным участием (9–13 июня 2014 г.)*. Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. С. 96–97.
29. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. № 2(11). С. 66–81.
30. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // *Вычислительные технологии*. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
31. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // *Measurement Techniques*. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
32. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // *Вестник Томского государственного университета*. 2002. № 1. С. 18–23.
33. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // *Вестник Томского государственного университета*. 2000. № 269. С. 95–98.
34. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2011. № 1(14). С. 13–21.
35. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Died Time // *Automation and Remote Control*. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.
36. Горцев А.М., Шмырин И.С. Оптимальная оценка состояний дважды стохастического потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени // *Автоматика и телемеханика*. 1999. № 1. С. 52–66.
37. Горцев А.М., Леонова М.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. № 1. С. 33–47.
38. Горцев А.М., Зуев В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. № 2. С. 44–65.
39. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 254 с.
40. Горцев А.М., Васильева Л.А. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // *Автоматика и телемеханика*. 2002. № 3. С. 179–184.
41. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // *Оптика атмосферы и океана*. 1997. Т. 10, № 3. С. 273–280.

42. Горцев А.М., Климов И.С. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий в условиях частичной его ненаблюдаемости // Радиотехника. 1991. № 12. С. 3–7.
43. Горцев А.М., Паршина М.Е. Оценивание параметров альтернирующего потока событий в условиях «мертвого времени» // Известия высших учебных заведений. Физика. 1999. № 4. С. 8–13.
44. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Известия высших учебных заведений. Физика. 2005. № 10. С. 35–40.
45. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишних событий // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 137–145.
46. Горцев А.М., Климов И.С. Оценивание периода ненаблюдаемости и интенсивности пуассоновского потока событий // Радиотехника. 1996. № 2. С. 8–11.
47. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // Telecommunications and Radio Engineering (English translation of Elektrosvyaz and Radiotekhnika). 1996. V. 50, No. 1. P. 56–63.
48. Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний синхронного МС-потока событий // Избранные доклады международной конференции «Всесибирские чтения по математике и механике». Томск : Изд-во ТГУ, 1997. Т. 1. С. 97–102.
49. Gortsev A.M., Shmyrin I.S. Optimal estimation of the states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants // Automation and Remote Control. 1999. V. 60, No. 1. P. 41–51.
50. Горцев А.М., Шмырин И.С. Оптимальная оценка параметров дважды стохастического пуассоновского потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов наступления событий // Известия высших учебных заведений. Физика. 1999. № 4. С. 19.
51. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Синхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы международной конференции. Минск : Изд-во БГУ, 2005. С. 60–69.
52. Бушланов И.В., Горцев А.М. Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2004. № 9. С. 40–51.
53. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1. С. 27–37.
54. Горцев А.М., Соловьев А.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов потока физических событий при непродлеваемом мертвом времени // Известия высших учебных заведений. Физика. 2014. Т. 57, № 7. С. 103–111.
55. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
56. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3(32). С. 23–32.
57. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2(27). С. 19–29.
58. Горцев А.М., Соловьев А.А. Оценка максимального правдоподобия длительности непродлеваемого мертвого времени в потоке физических событий // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58, № 11. С. 141–149.
59. Горцев А.М., Соловьев А.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности непродлеваемого мертвого времени в МАР-потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 4. С. 13–22.

**Сиротина Мария Николаевна.** E-mail: mashuliagol@mail.ru  
Томский государственный университет

Поступила в редакцию 14 мая 2016 г.

*Sirotnina Maria N.* (Tomsk State University, Russian Federation).

**Comparison of ML- and MM-estimators of period duration of dead time in modulated synchronous double stochastic flow of events.**

**Keywords:** modulated synchronous flow; nonextendable dead time; ML-estimation; MM-estimation; dead time duration.

DOI: 10.17223/19988605/36/7

One considers the modulated synchronous twice stochastic flow of events, which rate is piecewise constant random process  $\lambda(t)$  with two states:  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ ). The time when process  $\lambda(t)$  is staying in  $i$ -state has exponential probability distribution function with the parameter  $\alpha_i, i = 1, 2$ . During the time random interval when  $\lambda(t) = \lambda_i$ , there is the Poisson flow with the rate  $\lambda_i, i = 1, 2$ .

A state transition of process  $\lambda(t)$  occurs in the moment of the Poisson flow event arrival, moreover, the passing from the first to the second state is realized with probability  $p$ , the passing from the second to the first state is realized with probability  $q$ .

The flow functions in conditions of dead time, which is one of the falsifying factors of state and parameter estimation of the flow. After each registered event, there is the time of fixed duration  $T$  (dead time), during which another flow events is inaccessible for observation. Now consider the nonextendable dead time, that is all events, which happen during dead time interval without its prolongation. At the end of the period duration of the dead time, the first happened event creates dead time period of duration  $T$  again and etc. Note that for the flow, which functions in dead time conditions, events are observable if they did not get into dead time interval (events which cause its approach). For the flow which functions in dead time absence all events are observable.

One of confounding factor during the flow state and parameter estimation is dead time of recording device, which is generated by observable flow event occurrence. All other events occurred during the dead time interval are not accessible for observation.

The main purpose of the research work is to obtain dead time period estimator  $\hat{T}$  using the maximum likelihood method and method of moments (ML-estimators and MM-estimators respectively) and to compare these estimators.

During the investigation it was obtained that ML-estimator of dead time period duration takes a value  $\hat{T} = \tau_m = \min \tau_k, k = \overline{1, n}$ . It means that the solution of optimization problem is the dead time estimate  $\hat{T} = \tau_m$ . Also, it was designed an algorithm of the single MM-estimator obtaining. On the base of these methods it was realized a computing program and it was made a statistical experiment during which for different values of input flow parameters  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$  there was computed the values of ML-estimates  $\hat{T}_{MI}^{(j)}$  and MM-estimates  $\hat{T}_{MM}^{(j)}, j = \overline{1, N}$  ( $N$  is a number of experiment steps). For the values obtained there are calculated the values of sample variances  $\hat{V}_{MI} = (1/N) \sum_{j=1}^N (\hat{T}_{MI}^{(j)} - T)^2, \hat{V}_{MM} = (1/N) \sum_{j=1}^N (\hat{T}_{MM}^{(j)} - T)^2, j = \overline{1, N}$ . Then it was chosen which of estimates is better: if  $\hat{V}_{MI} \leq \hat{V}_{MM}$  then ML-estimate is better than MM-estimate, otherwise MM-estimate is better than ML-estimate.

## REFERENCES

1. Sirotina, M.N. (2014) Optimal state estimation of modulated synchronous twice-stochastic flow of events in conditions of fixed dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(26). pp. 63-74. (In Russian).
2. Sirotina, M.N. & Gortsev, A.M. (2015) [Probability density function of interval duration between two adjacent events of modulated synchronous flow in conditions of fixed dead time]. *Proceedings International Scientific Conference devoted to the 80th anniversary of Prof. G.A. Medvedev*. Belorussia, 23–26 February, 2015. Minsk: RIVSH. pp. 299-304.
3. Sirotina, M.N. & Gortsev, A.M. (2015) Joint probability density function of interval duration between two adjacent events of modulated synchronous flow in conditions of fixed dead time and recurrence flow conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(31). pp. 53-67. (In Russian)
4. Sirotina, M.N. & Gortsev, A.M. (2016) Maximum likelihood function estimation of dead time duration in modulated synchronous doubly stochastic flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(34). pp. 50-64. (In Russian)
5. Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: BSU.
6. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923-930.
7. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi [About the method of renewal of subnetwork computation]. *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika*. 6. pp. 92-99.
8. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi [About the method of renewal of subnetwork computation]. *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika*. 1. pp. 55-61.
9. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764-779. DOI: 10.2307/3213143
10. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1-46. DOI: 10.1080/15326349108807174
11. Lucantoni, D.M. & Neuts, M.F. (1994) Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 10. pp. 575-598. DOI: 10.1080/15326349408807311
12. Livshits, K.N. & Bublik, Ya.S. (2010) The probability of insurance company collapse with twice stochastic flow of insurance payouts. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 66-77. (In Russian).
13. Yang, Y.W. & Woo Shin. (2004) BMAP/G/1 queue with correlated arrivals of customers and disasters. *Operation Research Letters*. 32(4). pp. 364-373. DOI: 10.1016/j.orl.2003.09.005
14. Artalejo, J.R. & Chakravarthy, S.R. (2006) Computational analysis of the maximal queue length in the MAP/M/c retrival queue. *Applied Mathematics and Computation*. 183(2). pp. 1399-1409.

15. Best, J. (2009) Doubly Stochastic Processes: an Approach for Understanding Central Nervous System Activity. In: Pardalos, P. et al. (eds) *Selected Topics on Applied Mathematics, Circuits, Systems and Signals*. WSEAS Press. pp. 155-158.
16. Bushalnov, I.V., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 69(9). pp. 1517-1533. DOI: 10.1134/S0005117908090075
17. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radioengineering*. 10. pp. 8-16.
18. Vasilevskaya, T.P., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka s proyavleniem libo neproyavleniem sobyitiy [Dead time and parameters estimation of synchronous alternating flow with or without event manifestation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 9. pp. 129-138.
19. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobyitiy [Dead time period and parameter estimation of synchronous alternating flow of events]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 6. pp. 232-239.
20. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov sinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobyitiy metodom momentov [Parameter estimation of synchronous twice-stochastic flow of events using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. pp. 24-29.
21. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (1995) Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments. *Radiotechnics*. 40(7–8). pp. 6-10.
22. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54-63. (In Russian).
23. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) Joint probability density function of interval duration of generic asynchronous event flow in conditions of fixed dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(21). pp. 14-25. (In Russian).
24. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) Error probability of state estimation of generic synchronous flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88-101. (In Russian).
25. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21(3). pp. 283-290. DOI: 10.4213/dm1141
26. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2006) Otsenivanie parametrov asinkhronnogo potoka s initsirovaniem lishnikh sobyitiy metodom momentov [Parameter estimation of asynchronous flow with additional event initiation using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*. 18. pp. 267-273.
27. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal*. 36(12). pp. 1153-1167.
28. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) [Dead time period estimation of generic semi-synchronous flow of events]. *Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur [New information technologies in complex structure investigation]. Proceedings of 10th Russian conference with international participation (9-13 of June, 2014)*. Tomsk: Tomsk State University. pp. 96-97. (In Russian).
29. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2010) Optimal state estimation of generic semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 66-81. (In Russian).
30. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semi-synchronous twice-stochastic event flow in conditions of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(1). pp. 31-41. (In Russian).
31. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
32. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobyitiy metodom momentov [Parameter estimation of semi-synchronous twice-stochastic event flow using the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. pp. 18-23.
33. Nezhelskaya, L.A. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobyitiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyudaemosti [Optimal state estimation of semi-synchronous flow in conditions of its incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95-98.
34. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) About connectivity of MC-flows and MAP-flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 13-21. (In Russian).
35. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Solov'yev, A.A. (2012) Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. *Automation and Remote Control*. 73(8). pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
36. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999) Optimal state estimation of doubly stochastic flow of events under conditions of time moments measurement errors. *Automation and Remote Control*. 1. pp. 52-66.
37. Gortsev, A.M. & Leonova, M.A. (2010) Optimal state estimation of generic asynchronous doubly stochastic flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 33-47. (In Russian).

38. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal state estimation of generic asynchronous doubly stochastic flow with random number of states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 44-65. (In Russian).
39. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [Statistical analysis of stochastic flows in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
40. Gortsev, A.M. & Vasilieva, L.A. (2002) Parameter estimation of a doubly stochastic flow of events under incomplete observability. *Avtomatika i Telemekhanika*. 3. pp. 179-184.
41. Gortsev, A.M. & Zavgorodnaya, M.E. (1997) Otsenka parametrov al'terniruyushchego potoka sobytii pri uslovii ego chastichnoy nablyudaemosti [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of particulate observability]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 10(3). pp. 273-280.
42. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) An estimate for intensity of Poisson flow of events under the condition of its partial missing. *Radiotekhnika*. 12. pp. 3-7.
43. Gortsev, A.M. & Parshina, M.E. (1999) Otsenivanie parametrov al'terniruyushchego potoka sobytii v usloviyakh "mertvogo vremeni" [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of dead time]. *Russian Physics Journal*. 4. pp. 8-13.
44. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2005) Dead time and parameter estimation of asynchronous alternating flow in conditions of a fixed dead time. *Higher Educational Establishment Journal. Physics*. 10. pp. 35-40.
45. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) Dead time and parameter estimation of asynchronous alternating flow with additional event initiation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 284. pp. 137-145. (In Russian).
46. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1996) Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow. *Radiotekhnika*. 2. pp. 8-11.
47. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (1996) Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method. *Telecommunications and Radio Engineering*. 50(1). pp. 56-63.
48. Nezhelskaya, L.A. (1997) [Optimal state estimation of synchronous MC-flow of events]. *Vsesibirskie chteniya po matematike i mekhanike* [Siberian readings on mathematics and mechanics]. Proc. of the International Conference. Vol. 1. Tomsk: Tomsk State University. pp. 97-102. (In Russian).
49. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999) Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events under conditions of time moments measurement errors. *Automation and Remote Control*. 60(1). pp. 41-51.
50. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999) Optimal parameter estimation of a double stochastic Poisson flow of events in presence of measurement errors of time instants. *Higher Educational Establishment Journal. Physics*. 4. p. 19. (In Russian).
51. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2005) [Synchronous twice-stochastic flow of events in conditions of fixed dead time]. *Teoriya veroyatnostey, sluchaynye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya* [Probability theory, stochastic processes, mathematical statistics and applications]. Proc. of the International Conference. Minsk: BSU. pp. 60-69. (In Russian).
52. Bushlanov, I.V. & Gortsev, A.M. (2004) Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. 65(9). pp. 1389-1399. DOI: 10.1023/B:AURC.0000041418.09187.63
53. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time of generic semichronous flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27-37. (In Russian).
54. Gortsev, A.M. & Solovyev, A.A. (2014) Joint Probability Density of Interarrival Interval of a Flow of Physical Events with Unextendable Dead Time Period. *Russian Physics Journal*. 57(7). pp. 973-983. DOI: 10.1007/s11182-014-0333-4
55. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Comparison of MP- and MM-estimations of dead time in generic asynchronous flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32-42. (In Russian).
56. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Comparison of MP- and MM-estimations of dead time in generic semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(32). pp. 23-32. (In Russian).
57. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semi-synchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19-29. (In Russian).
58. Gortsev, A.M. & Solovyev, A.A. (2015) Maximum likelihood estimation of fixed dead time in physical flow of events. *Russian Physics Journal*. 58(11). pp. 141-149.
59. Gortsev, A.M. & Solovyev, A.A. (2015) Comparison of MP- and MM-estimations of fixed dead time in MAP-flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(33). pp. 13-22. (In Russian).