для каждого элемента $\alpha = 2\alpha_1 + \alpha_0 \in \mathrm{GR}(4^d, 4)$, где $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathrm{GF}(2^d)$. Преобразование $\tilde{s}_d^{(2)}$ является аналогом подстановки g_n. Очевидно, что $\tilde{s}_d^{(2)}$ — инволюция. Доказано, что $\left\langle \tilde{s}_d^{(2)}, G_n \right\rangle = S(V_d) \wr S(V_d)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Погорелов Б. А., Пудовкина М. А.* Надгруппы аддитивных регулярных групп порядка 2^n кольца вычетов и векторного пространства // Дискретная математика. 2015. Т. 27. № 3. С. 74–94.
2. *Погорелов Б. А., Пудовкина М. А.* Орбитальные производные по подгруппам и их комбинаторно-групповые свойства // Дискретная математика. 2015. Т. 27. № 4. С. 94–119.
3. *Елизаров В. П.* Конечные кольца. М.: Гелиос АРВ, 2006.

УДК 519.7 DOI 10.17223/2226308X/9/6

О КЛАССИФИКАЦИИ ДИСТАНЦИОННО-ТРАНЗИТИВНЫХ ГРАФОВ ОРБИТАЛОВ НАДГРУПП ГРУППЫ ДЖЕВОНСА

Б. А. Погорелов, М. А. Пудовкина

Группа экспоненцирования $S_2 \uparrow S_n$, называемая также группой Джевонса, совпадает с группой $A\tilde{S}_n$, порождённой группой сдвигов на n-мерном векторном пространстве V_n над полем GF(2) и группой подстановочных $(n \times n)$-матриц $\tilde{S}_n$ над полем GF(2). Для группы подстановок $G \geqslant S_2 \uparrow S_n$ рассматривается её естественное действие на упорядоченных парах векторов из пространства V_n. Орбиты при таком действии называются орбиталами. Каждому орбиталу Γ ставится в соответствие граф с множеством вершин V_n и множеством рёбер Γ, называемый графом орбитала. Проводится классификация дистанционно-транзитивных графов орбиталов надгрупп группы Джевонса. Показано, что среди дистанционно-транзитивных графов орбиталов надгрупп группы Джевонса имеются графы, изоморфные следующим графам: полному графу K_{2^n}, полному двудольному графу $K_{2^{n-1},2^{n-1}}$, половинному $(n+1)$-кубу, сложенному $(n+1)$-кубу, графам знакопеременных форм, графу Тейлора, графу Адамара.

Ключевые слова: *граф орбитала, группа Джевонса, дистанционно-транзитивный граф, граф Хемминга.*

Группа экспоненцирования $S_2 \uparrow S_n$, называемая также группой Джевонса, совпадает с группой $A\tilde{S}_n$, порождённой группой сдвигов на n-мерном векторном пространстве V_n над полем GF(2) и группой подстановочных $(n \times n)$-матриц $\tilde{S}_n$ над полем GF(2). Группа Джевонса встречается в теории кодирования, теории графов, теории булевых функций, алгебраической комбинаторике и криптографии; в частности, она

— является группой изометрий метрики Хемминга на V_n;
— описывает множество преобразований, не распространяющих искажения;
— является группой инерции множества всех бент-функций.

Для группы подстановок $G \geqslant S_2 \uparrow S_n$ рассматривается также её естественное действие на упорядоченных парах векторов из пространства V_n. Орбиты при таком действии называются орбиталами. Каждому орбиталу Γ ставится в соответствие граф $\bar{\Gamma} = (V_n, \Gamma)$ с множеством вершин V_n и множеством рёбер Γ, называемый графом орбитала. В алгебраической комбинаторике группа Джевонса связана со схемой отношений Хемминга [1] на пространстве V_n, которая может задаваться алгеброй матриц смежности графов орбиталов группы $A\tilde{S}_n$. При этом орбиталы пронумерованы таким образом, что орбита стабилизатора нулевого вектора группы $A\tilde{S}_n$ совпадает с множеством $\Delta_i^{(n)} \subset V_n$ всех векторов веса Хемминга i, а i-й орбитал есть $\Gamma_i^{(n)} = \left\{(\beta, \beta') \in V_n^2 : \beta \oplus \beta' \in \Delta_i^{(n)}\right\}$ для всех $i \in \{0, \ldots, n\}$, где $\oplus$ — бинарная операция покоординатного сложения векторов из V_n.

В [2, 3] проведена классификация всех надгрупп G группы $A\tilde{S}_n$, $A\tilde{S}_n \leqslant G \leqslant S(V_n)$, для $n \geqslant 4$. Она позволила в [4, 5] описать графы орбиталов всех надгрупп группы Джевонса и их группы автоморфизмов. В [5] среди графов орбиталов надгрупп группы Джевонса описаны графы, принадлежащие к таким известным классам, как дистанционно-транзитивные, антиподальные и двудольные. Заметим, что классификации дистанционно-транзитивных графов уделяется повышенное внимание более 40 лет (см. [1, 6–10] и др.). Это зачастую вызвано тем, что не только некоторые известные графы дистанционно-транзитивны, но также некоторые интересные группы являются группами автоморфизмов дистанционно-транзитивных графов. Так, дистанционно-транзитивными являются графы Хемминга, Джонсона, Гроссманна, полный двудольный и т. д. Описаны (см., например, [6]) все дистанционно-транзитивные графы, степени вершин которых не превосходят 13. Заметим, что из полной классификации групп ранга 3 [11] следует описание групп автоморфизмов дистанционно-транзитивных графов диаметра 2, называемых сильно регулярными.

В данной работе проводится классификация дистанционно-транзитивных графов орбиталов надгрупп группы Джевонса. Показано, что среди дистанционно-транзитивных графов орбиталов надгрупп группы Джевонса имеются графы, изоморфные следующим графам: 1) полному графу K_{2^n}; 2) полному двудольному графу $K_{2^{n-1},2^{n-1}}$; 3) половинному $(n+1)$-кубу; 4) сложенному $(n+1)$-кубу; 5) сложенному половинному $(n+2)$-кубу; 6) графам знакопеременных форм; 7) графу Тейлора (для графов диаметра 3); 8) дополнению $2 \times 2^{n-1}$-решётки (для графов диаметра 3); 9) дополнению графа $2^{n-1}K_2$, состоящего из 2^{n-1} двухвершинных компонент связности; 10) графу Адамара (для графов диаметра 4); 11) графам инцидентности 2-$(2^{n-1}, u_i^{(n)}, 2u_{i-1}^{(n-2)})$ блок-схем (для графов диаметра 3 при нечётном $n \geqslant 5$), $i \in \{1, 3\}$, где

$$u_j^{(n)} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-j)/4 \rfloor} \binom{n}{4k+j}, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

При этом графы диаметра 2 изоморфны одному из следующих классов графов: 1) графу $K_{2^{n-1},2^{n-1}}$; 2) дополнению графа $2^{n-1}K_2$; 3) графам знакопеременных форм, группы автоморфизмов которых изоморфны ортогональным группам $AO_n^{(1)}$, $AO_n^{(2)}$ при чётном n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баннаи Э., Ито Т.* Алгебраическая комбинаторика. М.: Мир, 1987.
2. *Погорелов Б. А.* Подметрики метрики Хемминга и теорема А.А. Маркова // Труды по дискретной математике. 2006. №9. С. 190–219.
3. *Погорелов Б. А., Пудовкина М. А.* Подметрики метрики Хемминга и преобразования, распространяющие искажения в заданное число раз // Труды по дискретной математике. 2007. №10. С. 202–238.
4. *Погорелов Б. А., Пудовкина М. А.* Подметрики Хемминга и их группы изометрий // Труды по дискретной математике. 2008. Т.11. №2. С. 32–68.
5. *Погорелов Б. А., Пудовкина М. А.* Свойства графов орбиталов надгрупп группы Джевонса // Математические вопросы криптографии. 2010. Т.1. №1. С. 55–84.

6. *Brouwer A. E., Cohen A. M., and Neumaier A.* Distance-Regular Graphs. Springer Verlag, 1989.
7. *Praeger C. E., Saxl J., and Yokoyama K.* Distance transitive graphs and finite simple groups // Proc. London Math. Soc. 1987. V. 55. P. 1–21.
8. *Ivanov A. A.* Distance-transitive graphs and their classification // Investigations in Algebraic Theory of Combinatorial Objects / eds. I. A. Faradzev et al. Dordrecht: Springer Science + Business Media, 1994. P. 283–378.
9. *Cohen A. M.* Distance-transitive graphs // Encycloped. Math. Applicat. 2004. V. 102. P. 222–249.
10. *Van Bon J.* Finite primitive distance-transitive graphs // European J. Combinatorics. 2007. V. 28. P. 517–532.
11. *Liebeck M. W. and Saxl J.* The finite primitive permutation groups of rank three // Bull. London Math. Soc. 1986. V. 18. P. 165–172.