Граф с одной точкой сочленения может рассматриваться как корневой граф с корнем в точке сочленения. Такой граф можно получить склейкой в одну вершину непомеченных корней блоков. После склейки для непомеченной вершины вводится новая метка. Снятию метки с корня соответствует операция деления соответствующей производящей функции на z, а введению метки — операция умножения производящей функции на z [4, 5]. С учётом перестановок блоков вокруг точки сочленения получим

$$C_m(z) = \frac{z}{m!}\Big(\frac{R(z)}{z}\Big)^m = \frac{z}{m!}\Big(\frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{2(1-z)}\Big)^m = \frac{z^{3m+1}(1+2z)^m}{m!6^m(1-z)^m}.$$

С помощью бинома Ньютона и ряда $(1-z)^{-m} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{k+m-1}{m-1}z^k$ найдём

$$C_m(z) = \frac{z^{3m+1}}{m!6^m}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}2^i z^i \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+m-1}{m-1}z^k.$$

Следовательно, имеем $FW(n,m) = n![z^{-1}]C_m(z)z^{-n-1}$, где $[z^{-1}]$ — оператор формального вычета:

$$FW(n,m) = \frac{n!}{m!6^m}[z^{-1}]\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{i}\binom{k+m-1}{m-1}2^i z^{i+k+3m-n} = \\ = \frac{n!}{m!6^m}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n-2m-i-2}{m-1}2^i.$$

Поскольку биномиальный коэффициент обращается в ноль при $m < i$ и $n-2m-i-2 < m-1$, верхний предел суммы равен $r = \min(m, n-3m-1)$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. М.: Мир, 1977.
2. *Bhatti A A., Nisar A., and Kanwal M.* Radio number of wheel like graphs // Int. J. Graph Theory in Wireless ad hoc Networks and Sensor Networks. 2011. No. 4. P. 39–57.
3. *Brankovic L., Lopez N., Miller M., and Sebe F.* Triangle randomization for social network data anonymization // Ars Math. Contemporanea. 2014. V. 7. No. 2. P. 461–477.
4. *Jin Y.-L.* Enumeration of labelled connected graphs and Euler graphs with only one cut vertex // Yokohama Math. J. 1977. No. 45. P. 125–134.
5. *Selkow S M.* The enumeration of labeled graphs by number of cutpoints // Discr. Math. 1998. No. 185. P. 183–191.

УДК 519.1+519.173 DOI 10.17223/2226308X/9/43

О ГРАФАХ ПОЛНОГО РАЗНООБРАЗИЯ ШАРОВ[1]

А. А. Евдокимов, Е. П. Куценогая, Т. И. Федоряева

Изучается разнообразие шаров в конечных связных обыкновенных графах. Получен ряд свойств графов с полным разнообразием шаров. Как следствие, описаны кактусы с таким разнообразием шаров.

Ключевые слова: *граф, метрический шар, радиус шара, число шаров, вектор разнообразия шаров.*

[1]Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 14-01-00507.

В случае дискретных метрических пространств шары заданного радиуса с центрами в различных вершинах не всегда различны, а могут совпадать. Данный эффект, когда шар имеет несколько центров, наблюдается в графах. О проблеме характеризации графов с заданным вектором числа различных шаров можно посмотреть в [1], а о связи свойств структуры шаров в графах и вложениями дискретных метрических пространств — в [2, 3]. Заметим также, что наличие в графе шаров с несколькими центрами позволяет, например, передавать управление с одного центра на другой, оставаясь при этом в зоне контроля или достижимости, определяемой шаром, в случае, например, «отказа» некоторого центра. Постановка подобных вопросов надёжности информационного взаимодействия и обмена данными в пределах заданных областей (окрестностях центров) приводит к задачам исследования взаимосвязей свойств структур или сетей с наличием в них окрестностей с «множественным центром», их числе, возможностей покрытия такими областями всего пространства и т. п. Далее связный конечный граф рассматривается как дискретное метрическое пространство с обычной метрикой пути [4]. Простейший пример графа с отмеченным эффектом даёт так называемый волан.

Определение 1 [5]. Граф $V_k(u,v)$, изображённый на рис. 1, *а*, называется *воланом на вершинах* u, v. Граф G *имеет волан*, если в G есть подграф $V_k(u,v)$ и $\deg_G u = \deg_G v = k+1$ (рис. 1, *б*).

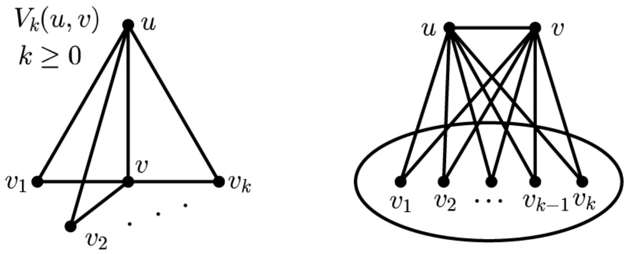

Рис. 1. Волан

Если граф G имеет волан (рис. 1, *б*), то все шары с различными центрами $u, v \in V(G)$ совпадают для любого радиуса $i \geqslant 1$ [5].

Пусть $\tau_i(G)$ — число всех различных шаров радиуса i в метрическом пространстве конечного связного графа G.

Определение 2 [6]. Вектор $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \ldots, \tau_d(G))$, где $d = \mathrm{d}(G)$ — диаметр графа G, называется *вектором разнообразия шаров* графа G.

Определение 3 [7]. Граф G обладает *локальным t-разнообразием шаров*, если $|V(G)| = \tau_0(G) = \tau_1(G) = \ldots = \tau_t(G)$, $0 \leqslant t < \mathrm{d}(G)$. Граф G с локальным t-разнообразием шаров при $t = \mathrm{d}(G) - 1$ называется графом *полного разнообразия шаров*.

Таким образом, вектор разнообразия шаров графа G с полным разнообразием шаров имеет вид $(|V(G)|, \ldots, |V(G)|, 1)$. В настоящей работе изучаются свойства конечных связных обыкновенных (т. е. не имеющих кратных рёбер и петель) графов с полным разнообразием шаров.

Теорема 1. Пусть G — граф диаметра $\mathrm{d}(G) \geqslant 3$ с полным разнообразием шаров. Тогда в графе G либо нет мостов, либо имеется единственный мост, один из концов которого является висячей вершиной.

Теорема 2. В классе n-вершинных графов диаметра d существует граф с полным разнообразием шаров тогда и только тогда, когда $n \geqslant 2d > 0$ или $n = d + 1 = 3$.

Как следствие из найденных свойств получено описание графов с полным разнообразием шаров для *кактусов* — связных графов, в которых нет рёбер, принадлежащих более чем одному простому циклу.

Теорема 3. Цикл и звезда — все с точностью до изоморфизма кактусы с полным разнообразием шаров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евдокимов А. А., Федоряева Т. И.* О проблеме характеризации векторов разнообразия шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21. №1. С. 44–52.
2. *Евдокимов А. А.* Кодирование структурированной информации и вложения дискретных пространств // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7. №4. С. 48–58.
3. *Евдокимов А. А.* Вложения графов в n-мерный булев куб и интервальное кодирование табло // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. №17. С. 15–19.
4. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.
5. *Федоряева Т. И.* Операции и изометрические вложения графов, связанные со свойством продолжения метрики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2. №3. С. 49–67.
6. *Федоряева Т. И.* Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12. №3. С. 74–84.
7. *Евдокимов А. А.* Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1. №1. С. 5–12.

УДК 519.1 DOI 10.17223/2226308X/9/44

ОБ АТТРАКТОРАХ В КОНЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ОРИЕНТАЦИЙ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

А. В. Жаркова

Рассматриваются конечные динамические системы ориентаций полных графов. Состояниями системы являются все возможные ориентации данного полного графа, а эволюционная функция задаётся следующим образом: динамическим образом данного орграфа является орграф, полученный из исходного путём переориентации всех дуг, входящих в стоки, других отличий между исходным орграфом и его образом нет. Приводится критерий принадлежности состояний системы аттракторам, описывается формирование аттракторов системы, их вид, длина.

Ключевые слова: *аттрактор, граф, конечная динамическая система, ориентация графа, полный граф, эволюционная функция.*

Под *ориентированным графом* (или, для краткости, *орграфом*) понимается пара $\overrightarrow{G} = (V, \beta)$, где V — конечное непустое множество (*вершины* орграфа), а $\beta \subseteq V \times V$ — отношение на множестве V (пара $(u, v) \in \beta$ называется *дугой* орграфа с *началом* u и *концом* v). Отношение β называют *отношением смежности*. *Неориентированным графом* (или, для краткости, *графом*) называется пара $G = (V, \beta)$, где β — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. Дуги неориентирован-