

УДК 532.546: 519.6

DOI 10.17223/19988621/43/7

Х.М. Гамзаев, И.К. Гадимов

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКИМИ СТЕНКАМИ

Рассматривается процесс нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя параллельными плоскими стенками. Для описания данного процесса предлагается одномерная модель плоскопараллельного течения вязкой жидкости. В рамках этой модели поставлена задача, с нелокальным дополнительным условием, об определении зависимости перепада давления от времени по заданному объемному расходу жидкости через данный зазор. Данная задача относится к классу обратных задач, связанных с восстановлением зависимости правых частей параболических уравнений от времени. Поставленная задача путем дискретизации по времени преобразуется к полудискретной задаче, для решения которой предлагается специальное представление. В результате решение исходной задачи на каждом временном слое сводится к решению двух краевых задач с локальными условиями и линейному уравнению относительно приближенного значения перепада давления.

**Ключевые слова:** течение жидкости в зазоре, расход жидкости через зазор, нелокальное условие, перепад давления по длине зазора, обратная задача.

Известно, что под герметичностью гидросистемы понимается непроницаемость жидкости, находящейся под некоторым избыточным давлением, через стык двух перемещающихся одна относительно другой или неподвижных жестких поверхностей деталей, не составляющих единого целого. Обычно герметичность достигается устранением зазора между уплотняемыми поверхностями с помощью уплотнения из какого-либо мягкого эластичного материала или созданием малого зазора между поверхностями соединяемых элементов [1]. Достаточная герметичность соединений элементов в гидросистемах чаще всего обеспечивается выполнением гарантированного малого зазора между поверхностями. Зазоры делятся на две основные группы: зазоры, образованные двумя параллельными плоскими стенками (плоские щели), и зазоры, образованные двумя криволинейными, обычно цилиндрическими, поверхностями (кольцевые щели).

Течения жидкостей в зазорах представляет практический интерес в связи с решением задач по герметизацию соединений элементов в гидросистемах [2–5]. При исследовании течения жидкостей в зазорах гидросистем возникают следующие задачи:

- определение перепада давления, необходимого для пропускания заданного расхода жидкости через данный зазор;
- определение расхода жидкости через данный зазор при заданном перепаде давления.

В практике для решения этих задач в основном используется математическая модель стационарного течения однородных несжимаемых жидкостей в зазорах

при соответствующих реологических законах. Однако в связи с тем, что большинство течений жидкостей в зазорах характеризуются нестационарностью, применение модели стационарного течения может привести к получению неверных оценок параметров течения.

В данной работе исследуется задача определения перепада давления при нестационарном течении вязкой несжимаемой жидкости по заданному расходу жидкости через данный зазор.

### Постановка задачи

Пусть рассматривается процесс нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в зазоре длиной  $l$ , образованном двумя параллельными неподвижными плоскими стенками, находящимися одна от другой на расстоянии  $\delta$ . Начало системы координат разместим на нижней стенке зазора, направив ось  $OX$  вдоль течения жидкости, а ось  $OZ$  – по нормали к стенкам (рис. 1).

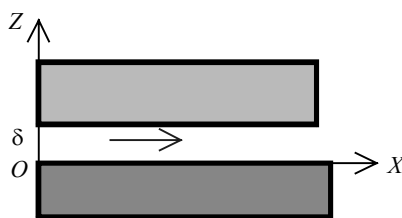


Рис. 1. Схема течения в зазоре

Fig. 1. Scheme of the flow through the gap

Предполагается, что поток жидкости направлен вдоль оси  $OX$  так, что из трех компонент скорости ( $u_x, u_y, u_z$ ) остается лишь одна  $u_x \neq 0$ , а  $u_z = 0$  и  $u_y = 0$ .

Учитывая, что движение жидкости происходит прямолинейно параллельно оси  $OX$ , математическую модель нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в зазоре можно представить в виде [6]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $u_x$  – компонент скорости течения жидкости, направленный параллельно оси  $OX$ ,  $\rho$  – плотность жидкости,  $P$  – давление,  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости.

При этом предполагается, что ширина зазора  $b$  (не указана на рис.) достаточно большая ( $b \gg \delta$ ), чтобы не учитывать краевые эффекты.

Из второго и третьего уравнений системы (1) следует, что  $u_x$  представляет функцию только  $z$  и  $t$ , а из двух последних – независимость давления  $P$  от  $y$  и  $z$ , т.е.

$$u_x = u_x(z, t), \quad P = P(x, t).$$

Тогда из системы (1) приходим к следующей форме уравнения нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в зазоре

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x},$$

где  $\nu = \mu / \rho$  — кинематическая вязкость жидкости. Обратим внимание на следующую особенность последнего уравнения: левая часть его не зависит от  $x$ , а правая часть от  $z$ . Это возможно только в том случае, если  $\frac{\partial P}{\partial x}$  является функцией только времени. Полагая

$$u(z, t) = u_x(z, t), \quad -\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\Delta P(t)}{l},$$

математическую модель течения вязкой жидкости в зазоре между двумя параллельными плоскими стенками можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{l}, \quad 0 < z < \delta, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

где  $\Delta P(t)$  — перепад давления по длине зазора в направлении потока.

Пусть для уравнения (2) задается начальное условие

$$u|_{t=0} = \phi(z). \quad (3)$$

Необходимо отметить, что на течение жидкости в зазоре существенное влияние оказывают граничные условия, соответствующие взаимодействию жидкости с неподвижными плоскими стенками зазора. Предположим, что на стенках зазора выполняется так называемое условие прилипания. Тогда для уравнения (2) будем иметь следующие граничные условия:

$$u|_{z=0} = 0, \quad (4)$$

$$u|_{z=\delta} = 0. \quad (5)$$

Очевидно, что задавая закон изменения перепада давления  $\Delta P(t)$  во времени, решив задачу (2) – (5), можно найти объемный расход жидкости через зазор по формуле

$$Q(t) = \int_0^{\delta} b u(z, t) dz. \quad (6)$$

Теперь предположим, что закон изменения объемного расхода жидкости  $Q(t)$  известен и требуется найти такой закон изменения перепада давления  $\Delta P(t)$ , который обеспечивал бы пропуск заданного расхода жидкости через зазор.

Таким образом, задача заключается в определении функций  $u(z, t)$  и  $\Delta P(t)$ , удовлетворяющих уравнению (2) и условиям (3) – (6). Поставленная задача относится к классу обратных задач, связанных с восстановлением зависимости правых частей параболических уравнений от времени [7–9]. Однако в данной задаче в качестве дополнительного условия задается интегральная характеристика исследуемого процесса. Следовательно, условие (6) не является классическим, локальным условием для уравнения (2).

### Метод решения

Введем равномерную разностную сетку в области  $[0 \leq t \leq T]$  по переменной  $t$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j \Delta t, \quad j = \overline{0, m}\}$$

с шагом дискретизации  $\Delta t = \frac{T}{m}$ . Производную  $\frac{\partial u}{\partial t}$  в уравнении (2) при  $t_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , заменим приближенно левосторонним разностным отношением

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(z, t_j)} \approx \frac{u(z, t_j) - u(z, t_{j-1})}{\Delta t}.$$

Вводя обозначение  $u^j(z) \approx u(z, t_j)$ , задачи (2) – (6) запишем в виде

$$\frac{u^j(z) - u^{j-1}(z)}{\Delta t} = \nu \frac{d^2 u^j}{dz^2} + \frac{1}{\rho l} \Delta P^j, \quad 0 < z < \delta; \quad (7)$$

$$u^0(z) = \phi(z); \quad (8)$$

$$u^j|_{z=0} = 0; \quad (9)$$

$$u^j|_{z=\delta} = 0; \quad (10)$$

$$Q^j = \int_0^\delta b u^j(z) dz, \quad (11)$$

$$j = 1, 2, \dots, m,$$

где  $Q^j = Q(t_j)$ ,  $\Delta P^j \approx \Delta P(t_j)$ .

Решение полудискретной задачи (7) – (11) на каждом временном слое  $j = 1, 2, \dots, m$ , представим в виде

$$u^j(z) = w^j(z) + r(z) \Delta P^j, \quad (12)$$

где  $w^j(z)$  и  $r(z)$  – неизвестные функции. Подставив (12) в уравнение (7), будем иметь

$$\frac{w^j(z) + r(z) \Delta P^j - u^{j-1}(z)}{\Delta t} = \nu \frac{d^2 w^j}{dz^2} + \nu \frac{d^2 r}{dz^2} \Delta P^j + \frac{1}{\rho l} \Delta P^j.$$

Отсюда получим следующие краевые задачи относительно неизвестных функций  $w^j(z)$  и  $r(z)$ :

$$\frac{w^j(z) - u^{j-1}(z)}{\Delta t} = v \frac{d^2 w^j}{dz^2}; \quad (13)$$

$$w^j|_{z=0} = 0; \quad (14)$$

$$w^j|_{z=\delta} = 0, \quad (15)$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

$$\frac{r(z)}{\Delta t} = v \frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{1}{\rho l}; \quad (16)$$

$$r|_{z=0} = 0; \quad (17)$$

$$r|_{z=\delta} = 0. \quad (18)$$

А подстановка (12) в дополнительное условие (11) дает

$$Q^j = \int_0^{\delta} b w^j(z) dz + \Delta P^j \int_0^{\delta} b r(z) dz$$

или

$$\Delta P^j = \frac{Q^j - \int_0^{\delta} b w^j(z) dz}{\int_0^{\delta} b r(z) dz}, \quad (19)$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, для решения обратной задачи (2) – (6) по определению функций  $u(z, t)$  и  $\Delta P(t)$  сначала надо определить функцию  $r(z)$  из решения задачи (16) – (18).

После этого для каждого временного слоя  $j = 1, 2, \dots, m$  надо последовательно определить функцию  $w^j(z)$  из решения задачи (13) – (15),  $\Delta P^j$  по формуле (19) и, наконец,  $u^j(z)$  по формуле (12).

Для численного решения задач (13) – (15) и (16) – (18) можно использовать метод конечных разностей. Введем равномерную разностную сетку в области  $[0 \leq z \leq \delta]$  по переменной  $z$

$$\overline{\omega}_h = \{z_i = i\Delta z, i = 0, n\}$$

с шагом  $\Delta z = \frac{\delta}{n}$ . Применяя интегральный метод, разностный аналог задачи (13) – (15) на разностной сетке  $\overline{\omega}_h$  можно представить виде

$$\frac{w_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} = v \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{\Delta z^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1,$$

$$w_0^j = 0,$$

$$w_n^j = 0, \\ j = 1, 2, \dots, m,$$

где  $w_i^j \approx w^j(z_i)$ ,  $u_i^{j-1} \approx u^{j-1}(z_i)$ .

Полученная система разностных уравнений представляет собой линейную систему алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Решение этой системы можно определить обычным методом прогонки.

Аналогично строится разностный аналог задачи (16) – (18) на сетке  $\overline{\omega_h}$ :

$$v \frac{r_{i+1} - 2r_i + r_{i-1}}{\Delta z^2} - \frac{r_i}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho l}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1, \\ r_0 = 0, \\ r_n = 0,$$

где  $r_i \approx r(z_i)$ .

При этом полученная система разностных уравнений также представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, решение которой определяется методом прогонки.

А при определении  $\Delta P^j$  по формуле (19) можно воспользоваться одной из приближенных формул численного интегрирования.

### Результаты численных расчетов

Для выяснения эффективности практического применения предложенного вычислительного алгоритма были проведены численные эксперименты для модельных задач. Схема численного эксперимента заключается в следующем: для заданного перепада давления  $\Delta P(t)$  решается прямая задача (2) – (5) и определяется объемный расход жидкости  $Q(t)$  по формуле (6). Найденная зависимость  $Q(t)$  принимается за точные данные для численного решения обратной задачи по восстановлению  $\Delta P(t)$ . При этом для решения прямой задачи (2) – (5) используется метод конечных разностей. С этой целью строится дискретный аналог задачи на сетке  $\overline{\omega_h} \times \overline{\omega_\tau}$

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} = v \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta z^2} + \frac{1}{\rho l} \Delta P^j, \\ i = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ u_i^0 = \phi_i, \\ u_0^j = 0, \\ u_n^j = 0,$$

где  $\phi_i = \phi(z_i)$ ,  $u_i^j \approx u(z_i, t_j)$ .

Полученная система разностных уравнений представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, и решение

данной системы определяется методом прогонки. А для вычисления объемного расхода жидкости  $Q(t)$  применяется метод численного интегрирования – метод трапеций.

Первая серия расчетов выполнялась с использованием этих невозмущенных данных. Вторая серия расчетов проводилась при наложении на  $Q(t)$  некоторой функции, моделирующей погрешность экспериментальных данных

$$\tilde{Q}(t) = Q(t) + \varepsilon \sigma(t),$$

где  $\sigma(t)$  – случайный процесс, моделируемый с помощью датчика случайных чисел,  $\varepsilon$  – уровень погрешности.

Расчеты выполнялись на пространственно–временной разностной сетке с шагами  $\Delta z = 0.005$  м,  $\Delta t = 0.5$ ;  $\Delta t = 1$  с. Результаты численного эксперимента, проведенного для случая  $\mu = 3 \cdot 10^{-3}$  Па·с;  $\rho = 850$  кг/м<sup>3</sup>;  $\delta = 0.1$  м;  $\phi(z) = 0$ ;  $\Delta P(t) = 1 - 0.25 \sin 2t$  атм/м;  $b = 0.25$  м;  $l = 0.25$  м использованием невозмущенных и возмущенных входных данных представлены в таблице; в ней  $\Delta P^t$  – точные значения функций  $\Delta P(t)$ ,  $\overline{\Delta P}$  и  $\tilde{\Delta P}$  – вычисленные значения функции  $\Delta P(t)$  при невозмущенных и возмущенных данных. Для возмущения входных данных использовалась погрешность уровня  $\varepsilon = 0.5$ .

**Результаты численного эксперимента**

$t, \text{с}$	$\Delta P^t, \text{атм/м}$	$\overline{\Delta P}, \text{атм/м}$		$\tilde{\Delta P}, \text{атм/м}$ $\Delta t = 1 \text{ с}$
		$\Delta t = 0.5 \text{ с}$	$\Delta t = 1 \text{ с}$	
10	0.772	0.772	0.772	0.776
20	0.814	0.814	0.814	0.782
30	1.076	1.076	1.076	1.037
40	1.248	1.248	1.248	1.190
50	1.127	1.127	1.127	1.122
60	0.855	0.855	0.855	0.828
70	0.755	0.755	0.755	0.731
80	0.945	0.945	0.945	0.965
90	1.200	1.200	1.200	1.231
100	1.218	1.218	1.218	1.228
110	0.978	0.978	0.978	0.965
120	0.764	0.764	0.764	0.773
130	0.829	0.829	0.829	0.832
140	1.097	1.097	1.097	1.106
150	1.250	1.250	1.250	1.259
160	1.107	1.107	1.107	1.119
170	0.837	0.837	0.837	0.893
180	0.760	0.760	0.760	0.769
190	0.967	0.967	0.967	0.936
200	1.213	1.213	1.213	1.185

Как показывают результаты численного эксперимента, при использовании невозмущенных входных данных искомая функция  $\Delta P(t)$  восстанавливается точно при всех расчетных сетках по времени (3-й и 4-й столбцы таблицы);  $\Delta P^t$  – точные

значения функций  $\Delta P(t)$  и  $\overline{\Delta P}$  – вычисленные значения функции  $\Delta P(t)$  при невозмущенных данных абсолютно совпадают. При использовании возмущенных входных данных, в которых погрешность имеет флуктуационный характер, проявляется слабая чувствительность восстановления функции  $\Delta P(t)$  от погрешности во входных данных. При уменьшении уровня погрешности решение восстанавливается более точно. Однако при проведении численных экспериментов было обнаружено, что использование очень малых шагов по времени ( $\Delta t \leq 0.01$ ) при решении задачи с возмущенными данными приводят к неустойчивости вычисляемого решения.

Использование очень малых шагов по времени при решении задачи с возмущенными данными дает противоположный эффект по сравнению с численным решением прямых задач: с ростом временного шага увеличивается и точность вычисляемого решения.

### Заключение

Рассмотрена задача определения перепада давления в нестационарном потоке вязкой жидкости в зазоре между двумя параллельными плоскими стенками на основании информации об изменении во времени объёмного расхода жидкости в зазоре. Вычислительный алгоритм решения данной задачи базируется на дискретизации задачи по времени и использовании специального представления для решения полученной полудискретной задачи. При этом эффект регуляризации обеспечивается за счет выбора разностной сетки. В отличие от метода глобальной регуляризации, где решение обратной задачи определяется на все моменты времени одновременно, в предложенном подходе учитывается специфика обратной задачи и решение определяется последовательно на отдельные моменты времени. Предложенный метод исследования нестационарного течения вязких жидкостей в зазорах можно применять при решении задач по герметизацию соединений элементов в гидросистемах.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Башта Т.М. Гидравлика, гидравлические машины и гидравлические приводы. М.: Машиностроение, 1970. 502 с.
2. Шейпак А.А. Гидравлика и гидропневмопривод: учеб. пособие. Ч. 1. Основы механики жидкости и газа. Изд. 2-е, пер. и доп. М.: Изд-во МГИУ, 2003. 192 с.
3. Лепешкин А.В., Михайлин А.А., Шейпак А.А. Гидравлика и гидропневмопривод. В 2 ч. Ч. 2. Гидравлические машины и гидропневмопривод: учеб. для вузов. 4-е изд., пер. и доп. / под ред. А.А. Шейпака. М.: МГИУ, 2009. 352 с.
4. Mott R.L. Applied Fluid Mechanics. 6th ed. Prentice Hall, 2005. 640 p.
5. Esposito A. Fluid Power with Applications. 7th ed. Prentice Hall, 2008. 672 p.
6. Лойцанский Л.Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов. 7-е изд., испр. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
7. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
8. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Издательство ЛКИ, 2009.
9. Гамзаев Х.М. О численном моделировании движения жидкости в двухпластовой системе // Вестник Томского государственного университета. Математика и Механика. 2015. № 3(35). С. 52–59.

Статья поступила 10.06.2016 г.



Gamzaev Kh.M., Gadimov I.K. (2016) NUMERICAL INVESTIGATION OF A VISCOUS FLUID FLOW THROUGH THE GAP BETWEEN TWO PARALLEL PLATES. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 64–72

DOI 10.17223/19988621/43/7

The process of unsteady flow of a viscous incompressible fluid through the gap between two parallel plates is considered. To describe the process, a one-dimensional model of the plane-parallel flow of a viscous fluid is proposed. Within the framework of this model, the problem with nonlocal additional condition for obtaining the pressure drop versus the time for a given volumetric flow rate of the fluid through the gap is posed. This problem belongs to the class of inverse problems associated with the reconstruction of right-hand sides of parabolic equations as functions of time. Using the time sampling, the posed problem is converted to a semidiscrete problem. In order to solve this problem, a special formulation is suggested. As a result, the solution of the original problem at each time step is reduced to solving two boundary value problems with local boundary conditions and the linear equation with respect to the approximate value of the pressure drop.

Keywords: fluid flow through the gap, fluid flow rate through the gap, nonlocal condition, pressure drop along the gap length, inverse problem.

GAMZAEV Khanlar Mekhvali oğly (Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Azerbaijan State University of Oil and Industry, Baku, Azerbaijan)  
E-mail: xan.h@rambler.ru

GADIMOV Ilgar Kamil oğly (Azerbaijan State University of Oil and Industry, Baku, Azerbaijan)  
E-mail: qadimovilqar@gmail.com

#### REFERENCES

1. Bashta T.M. (1970) *Gidravlika, gidravlicheskie mashiny i gidravlicheskie privody*. [Hydraulics, hydraulic machines, and hydraulic drives]. Moscow: Mashinostroyeniye.
2. Sheypak A.A. (2003) *Gidravlika i gidropnevmoprivod: ucheb. posobie Ch. 1. Osnovy mekhaniki zhidkosti i gaza* [Hydraulics and hydropneumatic: a textbook. Part 1. Fundamentals of fluid and gas mechanics]. 2nd ed. Moscow: MGIU.
3. Lepeshkin A.V., Mikhaylin A.A., Sheypak A.A. (2009) *Gidravlika i gidropnevmoprivod. Ch. 2. Gidravlicheskie mashiny i gidropnevmoprivod: uchebnik dlya vuzov* [Hydraulics and hydropneumatic. Part 2. Hydraulic machines and hydropneumatic: a textbook for high schools] 4th ed. Ed. by A.A. Sheypak. Moscow: MGIU.
4. Mott R.L. (2005) *Applied Fluid Mechanics*. Prentice Hall.
5. Esposito A. (2008) *Fluid Power with Applications*. Prentice Hall.
6. Loytsyanskiy L.G. (2003) *Mekhanika zhidkosti i gaza: Uchebnik dlya vuzov* [Fluid mechanics: a textbook for high schools]. Moscow: Drofa.
7. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. (1988) *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme methods for solving ill-posed problems]. Moscow: Nauka.
8. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. (2009) *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki* [Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics]. Moscow: LKI publ.
9. Gamzaev Kh.M. (2015) O chislenom modelirovanii dvizheniya zhidkosti v dvukhplastovoy sisteme [On numerical simulation of the fluid flow in a dualcompletion water-bearing system]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i Mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(35). pp. 52–59. DOI 10.17223/19988621/35/7.