

УДК 336:51

DOI: 10.17223/19988605/37/5

Г.А. Медведев, Д.А. Павлив

## О КВАДРАТИЧНЫХ МОДЕЛЯХ ДОХОДНОСТИ В РИСК-НЕЙТРАЛЬНОЙ СРЕДЕ

Представлено математически эквивалентное, но более компактное описание обычно встречающейся квадратичной модели доходности. Получены уравнения для функций временной структуры и приведены общие свойства их решений. Основным содержанием статьи является рассмотрение случая, когда вероятностные свойства модели подчиняются нейтральной к риску вероятностной мере, что позволяет получить аналитические решения задачи о форме кривых доходности и форвардных кривых в явном виде. Уравнения кривых представлены в компактной форме с использованием гиперболических функций. Найдены семейства кривых доходности и форвардных кривых, которые для фиксированной краткосрочной ставки доходности обеспечивают получение одной и той же предельной долгосрочной доходности. Полученные результаты иллюстрируются численным примером.

**Ключевые слова:** временные структуры доходности; квадратичные модели; нейтральная к риску вероятностная мера.

Обычно отправным пунктом при анализе квадратичных моделей временной структуры являются следующие предположения. Считается, что существует некоторое пространство состояний финансового рынка, описываемое  $n$ -мерным вектором  $x$ , в котором состояние эволюционирует согласно диффузионному случайному процессу  $x(t)$ , описываемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dx(t) = \xi(x(t)) dt + \sigma(x(t)) dW(t), \quad t > t_0, \quad x(t_0) = x_0,$$

с векторной функцией дрейфа  $\xi(x)$  и матрицей волатильности  $\sigma(x)$ ,  $W(t)$  –  $n$ -мерный вектор независимых винеровских процессов. Предполагается, что краткосрочная ставка доходности  $r(t)$  связана с состоянием финансового рынка  $x(t)$  соотношением (верхний индекс  $T$  означает транспонирование):

$$r(t) = \alpha + x(t)^T \Psi x(t) + x(t)^T \psi, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \psi \in \mathbb{R}^{n \times 1}. \quad (1)$$

При этом считается, что состояние финансового рынка (вектор  $x(t)$ ) непосредственно не наблюдается, а процентная ставка  $r(t)$  – наблюдаемый процесс. Так что  $x(t)$  – совокупность неких латентных переменных, которые сами не наблюдаются, но влияют на временную структуру доходности активов, стоимость которых определяется процентной ставкой. Заметим, что поскольку по экономическому смыслу процентная ставка  $r(t)$  принимает положительные значения для любых ненулевых  $x(t)$ , то естественно считать матрицу  $\Psi$  положительно определенной. Кроме того, поскольку  $x(t)^T \Psi x(t) = x(t)^T \Psi^T x(t)$ , для любых  $x(t)$ , не нарушая общности, можно считать матрицу  $\Psi$  также симметрической. Заметим, что согласно (1) процентная ставка принимает свое минимальное значение, когда  $2\Psi x(t) + \psi = 0$ , т.е. при  $x(t) = x_{\min} \equiv -\Psi^{-1}\psi/2$ , и минимальное значение процентной ставки в этой модели равно  $r_{\min} \equiv \alpha - \psi^T \Psi^{-1} \psi/4$ .

Модель (1)–(2), называемая квадратичной, составляет некоторую конкуренцию аффинным моделям временной структуры доходности, которые допускают аналитическое представление решений, но довольно неточно описывают реальные временные структуры доходности. Считается, что квадратичная модель будет приспособливаться к реальным временным структурам более точно. Попытаемся рассмотреть этот вопрос для класса диффузионных процессов  $x(t)$  с линейной функцией дрейфа  $\xi(x) = k(\vartheta - x)$  и постоянной матрицей волатильности  $\sigma(x) = \sigma$  [1]:

$$dx(t) = k(\vartheta - x(t)) dt + \sigma dW(t), \quad t > t_0, \quad x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Как это принято, временную структуру доходности находят с помощью уравнения временной структуры [2], или, как его иногда называют [1], фундаментального уравнения с частными производными для цен бескупонных облигаций  $P(r(x), t; T)$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} k(\vartheta - x) + \frac{1}{2} \text{tr} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \sigma \sigma^T \right) - r(x) P(r(x), t; T) = \frac{\partial P}{\partial x} \sigma \lambda(x), \quad P(r(x), t; T) = 1. \quad (3)$$

Здесь  $T$  – дата погашения облигации,  $\lambda(x)$  – вектор-функция рыночной цены риска. Здесь цена облигации  $P(r(x), t; T)$  определяется как условное математическое ожидание по объективной вероятностной мере при фиксированном текущем состоянии, т.е. при фиксированных  $t$  и  $r(x)$ , а следовательно, и  $x(t)$ . Рыночная цена риска задается вектором [1]:  $\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x$ , где  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  – вектор и матрица постоянных коэффициентов. Решение уравнения (3) имеет достаточно простой вид

$$P(r(x), t; t + \tau) = \exp[-x^T a(\tau)x - x^T b(\tau) - c(\tau)], \quad (4)$$

где для удобства введен символ  $\tau = T - t$  для обозначения срока до погашения облигации, а также  $(n \times n)$  матрица  $a(\tau)$ ,  $n$ -вектор  $b(\tau)$  и скалярная функция  $c(\tau)$ . Заметим, что с возрастанием компонент вектора  $x$  (точнее, с возрастанием  $x^T \Psi x$ ) процентная ставка  $r$  увеличивается. С другой стороны, по экономическому смыслу с увеличением процентной ставки цена актива  $P(r(x), t; t + \tau)$  должна уменьшаться. Следовательно, с увеличением  $x^T \Psi x$  величина  $x^T a(\tau)x$  тоже должна увеличиваться. Кроме того, для любых  $x$  справедливо равенство  $x^T a(\tau)x = x^T a(\tau)^T x$ . Поэтому без ограничения общности можно считать, что матрица  $a(\tau)$  является положительно определенной и симметрической. Функции  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$  и  $c(\tau)$  находятся из следующей системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da(\tau)}{d\tau} + 2a(\tau) \sigma \sigma^T a(\tau) + a(\tau)(k + \sigma \lambda_1) + (k + \sigma \lambda_1)^T a(\tau) - \Psi &= 0, \\ \frac{db(\tau)}{d\tau} + 2a(\tau) \sigma \sigma^T b(\tau) + (k + \sigma \lambda_1)^T b(\tau) - 2a(\tau)(k\vartheta - \sigma \lambda_0) - \psi &= 0, \\ \frac{dc(\tau)}{d\tau} - \text{tr}[\sigma \sigma^T a(\tau)] + \frac{1}{2} b(\tau)^T \sigma \sigma^T b(\tau) - b(\tau)^T (k\vartheta - \sigma \lambda_0) - \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

с начальными условиями  $a(0) = 0$ ,  $b(0) = 0$ ,  $c(0) = 0$ .

Чаще всего для представления временной структуры процентных ставок доходности используют кривую доходности  $y(\tau, x)$  или форвардную кривую  $f(\tau, x)$ , которые, согласно определениям, выражаются через цену бескупонной облигации по формулам

$$y(\tau, x) = -\frac{\ln P(x, t, t + \tau)}{\tau} = \frac{x^T a(\tau)x + b(\tau)^T x + c(\tau)}{\tau}, \quad (6)$$

$$f(\tau, x) = -\frac{\partial \ln P(x, t, t + \tau)}{\partial \tau} = x^T \frac{da(\tau)}{d\tau} x + \left( \frac{db(\tau)}{d\tau} \right)^T x + \frac{dc(\tau)}{d\tau}. \quad (7)$$

К сожалению, система уравнений (5) в общем случае не имеет аналитического решения, поэтому особенности кривых доходности  $y(\tau, x)$  и  $f(\tau, x)$  не удастся исследовать аналитическим путем, хотя численный анализ не представляет особого труда, если заданы параметры  $k$ ,  $\vartheta$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\psi$ ,  $\Psi$ ,  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$ . Тем не менее в некоторых частных случаях найти аналитические решения и провести некоторый анализ удастся. Рассмотрим эти случаи.

Однако сначала представим математически эквивалентное, но более компактное описание рассматриваемой квадратичной модели. Поскольку матрица  $\Psi$  положительно определенная и симметрическая, ее собственные числа положительные, а она имеет диагональную форму  $\Psi = L^T \Phi L$ , где  $\Phi$  – диагональная матрица, по диагонали которой расположены положительные собственные числа  $\{\phi\}$ ,  $L$  – матрица нормированных собственных векторов, которая обладает следующими свойствами:  $L^T = L^{-1}$ ,  $L^T L = L L^T = I$ , где  $I$  – единичная матрица. Преобразуем пространство состояний  $\{x\}$  в пространство состояний  $\{X\}$  с помощью линейного преобразования  $X = Lx - L\Psi^{-1}\psi/2$ . Тогда вместо модели процентной ставки (1)–(2) можно получить эквивалентное описание процентной ставки соотношениями

$$dX(t) = K(\theta - X(t)) dt + S dW(t), \quad t > t_0, \quad X(t_0) = X_0, \quad (8)$$

$$r(t) = r_{\min} + X(t)^T \Phi X(t), \quad X(t) \in \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{R}^1, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (9)$$

где обозначено  $K = LkL^T$ ,  $\theta = L\vartheta + L\Psi^{-1}\psi/2$ ,  $S = L\sigma$ ,  $X_0 = Lx_0 - L\Psi^{-1}\psi/2$ . Модель (8)–(9) отличается от модели (1)–(2) более простым, но эквивалентным представлением процентной ставки  $r(t)$  через другие ла-

тентные переменные  $\{X\}$ , взаимно однозначно связанные с исходными латентными переменными  $\{x\}$ . Свойства диффузионных процессов  $X(t)$  и  $x(t)$  совпадают с точностью до значений факторов уравнений (2) и (8). Модель (8)–(9) приводит к уравнению (3) для функции  $P(r(X), t; t + \tau)$ , в котором вместо  $k$ ,  $\vartheta$  и  $\sigma$  используются  $K$ ,  $\theta$  и  $S$  соответственно, а также вместо  $\lambda(x)$  – функция рыночной цены риска  $\Lambda(X) = \Lambda_0 + \Lambda_1 X$ , где вектор  $\Lambda_0$  и матрица  $\Lambda_1$  постоянных коэффициентов определяются формулами  $\Lambda_0 = \lambda_0 + \lambda_1 \Psi^{-1} \psi / 2$ ,  $\Lambda_1 = \lambda_1 L^T$ . Решение этого уравнения имеет вид, аналогичный выражению (4):

$$P(r(X), t; t + \tau) = \exp[-X^T A(\tau) X - X^T B(\tau) - C(\tau)], \quad (10)$$

где функции  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$  и  $C(\tau)$  находятся из системы

$$\begin{aligned} \frac{dA(\tau)}{d\tau} + 2A(\tau)SS^T A(\tau) + A(\tau)(K + S\Lambda_1) + (K + S\Lambda_1)^T A(\tau) - \Phi &= 0, \\ \frac{dB(\tau)}{d\tau} + 2A(\tau)SS^T B(\tau) + (K + S\Lambda_1)^T B(\tau) - 2A(\tau)(K\theta - S\Lambda_0) &= 0, \\ \frac{dC(\tau)}{d\tau} - \text{tr}[SS^T A(\tau)] + \frac{1}{2}B(\tau)^T SS^T B(\tau) - B(\tau)^T (K\theta - S\Lambda_0) - r_{\min} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

с начальными условиями  $A(0) = 0$ ,  $B(0) = 0$ ,  $C(0) = 0$ . Эта система, так же как и система (5), в общем случае в аналитическом виде неразрешима. Поэтому прежде чем переходить к частным случаям, которые разрешимы, попытаемся обсудить в общих чертах свойства решений системы (11), если они существуют.

В литературе достаточно много внимания уделено свойствам кривых доходности и форвардных кривых для аффинных моделей временных структур [3–9]. В этом классе моделей кривые  $y(\tau)$  и  $f(\tau)$  стартуют из одной точки (это общее свойство по определению этих кривых, оно основано на том, что краткосрочная доходность равна процентной ставке  $r$ ) и при  $\tau \rightarrow \infty$  стремятся к одному и тому же постоянному пределу. Достаточным условием последнего может служить тот факт, что при  $\tau \rightarrow \infty$  функции  $A(\tau)$  и  $B(\tau)$  имеют конечные пределы  $A(\infty)$  и  $B(\infty)$ , что обеспечивает независимость предельных значений  $y(\infty)$  и  $f(\infty)$  от текущих (начальных) значений переменных состояния рынка  $X(t)$  и обеспечивает предельное равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dA(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A(\tau)}{\tau} = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dB(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{B(\tau)}{\tau} = 0.$$

При этом предельные значения  $A = A(\infty)$  и  $B = B(\infty)$  могут быть найдены из системы алгебраических матричных уравнений

$$\begin{aligned} 2A SS^T A + A(K + S\Lambda_1) + (K + S\Lambda_1)^T A &= \Phi, \\ 2A SS^T B + (K + S\Lambda_1)^T B - 2A(K\theta - S\Lambda_0) &= 0. \end{aligned}$$

Наконец, предельное свойство функции  $C(\tau)$  находится из третьего уравнения системы

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dC(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{C(\tau)}{\tau} = \text{tr}[SS^T A] - \frac{1}{2}B^T SS^T B + B^T (K\theta - S\Lambda_0) + r_{\min}.$$

Используя перечисленные свойства функций временной структуры  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$  и  $C(\tau)$ , можно установить соответствующие свойства кривых  $y(\tau)$  и  $f(\tau)$ : при  $\tau = 0$  они стартуют из одной общей точки  $y(0) = f(0) = r(X)$  и при  $\tau \rightarrow \infty$  стремятся к одному общему пределу

$$y(\infty) = f(\infty) = \text{tr}[SS^T A(\infty)] - \frac{1}{2}B(\infty)^T SS^T B(\infty) + B(\infty)^T (K\theta - S\Lambda_0) + r_{\min}.$$

Характер поведения кривых между этими предельными точками существенно зависит от стартового значения процентной ставки  $r(X)$ , как это имеет место в аффинных моделях [3–10]. Однако поскольку некоторому фиксированному значению ставки  $r(X) = r_0$  соответствует некоторое множество векторов  $X$ , вполне возможна зависимость кривых и от величины векторов из этого множества. Для того чтобы выяснить этот вопрос, рассмотрим частный случай, допускающий аналитическое решение системы (11).

Сделаем следующие предположения:

**Предположение 1.** Процесс латентных переменных  $X(t)$ , порождаемый уравнением (8), является нормальным процессом со стационарным математическим ожиданием  $\theta$ . Предположим, что  $\theta = 0$ . Заметим, что такое предположение принимается довольно часто, например в моделях [11, 12].

**Предположение 2.** Рассмотрим случай, когда вероятностные свойства процентной ставки  $r(X)$  подчиняются нейтральной к риску вероятностной мере. Это означает, что средняя ставка доходности актива совпадает с краткосрочной процентной ставкой, иначе говоря, пусть  $\Lambda(X) = \Lambda_0 + \Lambda_1 X = 0$ , т.е.  $\Lambda_0 = 0$  и  $\Lambda_1 = 0$ . Такое предположение упрощает анализ, но идеализирует рыночные отношения. Получающиеся при этом результаты отражают основные закономерности, а введение в расчеты рыночных цен риска обычно только изменяет численные значения, не меняя закономерностей (см., например рис. 3.6, 3.7, 3.8 в [10] для аффинных моделей).

При этих предположениях система (11) упрощается и имеет вид

$$\frac{dA(\tau)}{d\tau} + 2A(\tau)SS^T A(\tau) + A(\tau)K + K^T A(\tau) - \Phi = 0, \quad A(0) = 0,$$

$$\frac{dB(\tau)}{d\tau} + 2A(\tau)SS^T B(\tau) + K^T B(\tau) = 0, \quad B(0) = 0,$$

$$\frac{dC(\tau)}{d\tau} - \text{tr}[SS^T A(\tau)] + \frac{1}{2}B(\tau)^T SS^T B(\tau) - r_{\min} = 0, \quad C(0) = 0.$$

Выясняется, что уравнение для  $B(\tau)$  оказывается линейным однородным дифференциальным уравнением с нулевыми начальными условиями, а это приводит к тому, что функция  $B(\tau)$  равна нулю для всех значений  $\tau > 0$ . Таким образом, система (11) становится еще проще:

$$\frac{dA(\tau)}{d\tau} = -2A(\tau)SS^T A(\tau) - A(\tau)K - K^T A(\tau) + \Phi, \quad A(0) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{dC(\tau)}{d\tau} = \text{tr}[SS^T A(\tau)] + r_{\min}, \quad C(0) = 0. \quad (13)$$

При этом собственно уравнением является только первое для матрицы  $A(\tau)$ , а второе – это формула для производной функции  $C(\tau)$ .

**Предположение 3.** Латентные переменные, составляющие вектор  $X(t)$ , являются независимыми случайными процессами. Это достигается в том случае, когда матрицы  $K$  и  $S$  являются положительно определенными диагональными. Такое предположение вовсе не означает, что исходные переменные состояния в уравнении (2) независимы, поскольку диагональность матриц  $K$  и  $S$  в уравнении (8) не означает, что матрицы  $k$  и  $\sigma$  в уравнении (2) являются диагональными. Они связаны соотношениями  $K = LkL^T$ ,  $S = L\sigma$ , где  $L$  – матрица нормированных собственных векторов, которая обычно диагональной не является.

Пусть  $k_i$  – элемент матрицы  $K$ , стоящий на  $i$ -м месте главной диагонали,  $s_i$  – элемент матрицы  $S$ , стоящий на  $i$ -м месте главной диагонали,  $\phi_i$  –  $i$ -е собственное число матрицы  $\Psi$ , занимающее  $i$ -е место главной диагонали матрицы  $\Phi$ . Если использовать предположение 3 в матричном уравнении (12) и рассмотреть систему скалярных дифференциальных уравнений для элементов матрицы  $A(\tau)$ , то можно заметить, что для каждого элемента  $A_{jk}(\tau)$ ,  $j \neq k$ , получается однородное линейное дифференциальное уравнение с нулевым начальным условием. Это означает, что решения всех этих уравнений нулевые, т.е.  $A_{jk}(\tau) = 0$ ,  $j \neq k$ , для всех  $\tau > 0$ . Учитывая этот факт можно получить для каждого элемента матрицы  $A(\tau)$ , стоящего на главной диагонали, уравнение в следующем виде:

$$\frac{dA_{ii}(\tau)}{d\tau} = -2s_i^2 A_{ii}(\tau)^2 - 2k_i A_{ii}(\tau) + \phi_i, \quad A_{ii}(0) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (14)$$

Таким образом, при сделанных предположениях матричное уравнение (12) распадается на  $n$  независимых уравнений Риккати (14) для диагональных элементов матрицы  $A(\tau)$ , а недиагональные элементы оказываются нулевыми, т.е. матрица  $A(\tau)$  – диагональная. Поскольку коэффициенты уравнения (14) являются константами, используя разделение переменных, можно привести это уравнение к симметричной форме (для краткости индексы здесь опускаем):

$$\frac{dA}{2s^2 A^2 + 2kA - \phi} = -d\tau,$$

что с учетом начального условия  $A(0) = 0$  дает следующее решение:

$$A_{ii}(\tau) = \frac{\phi_i [1 - \exp(-2\tau\sqrt{k_i^2 + 2s_i^2\phi_i})]}{k_i + \sqrt{k_i^2 + 2s_i^2\phi_i} + (\sqrt{k_i^2 + 2s_i^2\phi_i} - k_i) \exp(-2\tau\sqrt{k_i^2 + 2s_i^2\phi_i})}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (15)$$

Таким образом, для положительных  $k_i$ ,  $s_i$  и  $\phi_i$  функция  $A_{ii}(\tau)$  является монотонно возрастающей функцией от  $A_{ii}(0) = 0$  при  $\tau = 0$  до конечного предела

$$A_{ii}(\infty) = \frac{\phi_i}{k_i + \sqrt{k_i^2 + 2s_i^2\phi_i}}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

при  $\tau \rightarrow \infty$ . В дальнейшем для краткости будем обозначать  $v_i \equiv \sqrt{k_i^2 + 2s_i^2\phi_i}$ . Для функции  $C(\tau)$  из равенства (13) получаем соотношение

$$\frac{dC(\tau)}{d\tau} = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2 \phi_i [1 - \exp(-2v_i \tau)]}{k_i + v_i + (v_i - k_i) \exp(-2v_i \tau)}. \quad (16)$$

Поэтому

$$C(\tau) = \tau r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \omega_i \exp(2v_i \tau)}{1 + \omega_i} \right) - (v_i + k_i) \tau \right), \quad \omega_i \equiv \frac{v_i + k_i}{v_i - k_i}. \quad (17)$$

Таким образом, в рассматриваемом иллюстративном частном случае кривую доходности  $y(\tau, X)$  и форвардную кривую  $f(\tau, X)$  можно выразить в явной аналитической форме

$$y(\tau, X) = \frac{1}{\tau} \left( \sum_{i=1}^n A_{ii}(\tau) X_i^2 + C(\tau) \right),$$

где функции  $A_{ii}(\tau)$  и  $C(\tau)$  вычисляются по формулам (15) и (17),

$$f(\tau, X) = \sum_{i=1}^n \frac{dA_{ii}(\tau)}{d\tau} X_i^2 + \frac{dC(\tau)}{d\tau},$$

а производные функций  $A_{ii}(\tau)$  и  $C(\tau)$  вычисляются по формулам (14), (15) и (16).

Кривые доходности  $y(\tau, X)$  и  $f(\tau, X)$  определяются выражениями, из которых видно, что кривые зависят не от компонент вектора  $X$ , а от их квадратов. Кроме того они явно зависят не от собственных чисел  $\{\phi_i\}$ , а от чисел  $\{v_i\}$ , взаимнооднозначно связанных с  $\phi_i$ . Поэтому для удобства рассуждений в дальнейшем введем в рассмотрение вместо переменных  $\{X_i^2, \phi_i\}$  переменные  $\{z_i, v_i\}$  согласно формулам преобразования

$$z_i \equiv \phi_i X_i^2 \geq 0, \quad v_i \equiv \sqrt{k_i^2 + 2s_i^2\phi_i} \geq k_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

$$X_i^2 \equiv \frac{z_i}{\phi_i}, \quad \phi_i \equiv \frac{v_i^2 - k_i^2}{2s_i^2} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Равенства (15)–(17) можно представить в более компактной форме с помощью гиперболических функций, что дает более компактные выражения для кривых  $y(\tau, X)$  и  $f(\tau, X)$  в виде

$$Y(\tau|z, \phi) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\tau} \left( \frac{2z_i}{v_i \operatorname{cth}(v_i \tau) + k_i} + \ln \left( \operatorname{ch}(v_i \tau) + \frac{k_i}{v_i} \operatorname{sh}(v_i \tau) \right) - k_i \tau \right), \quad (18)$$

$$F(\tau|z, \phi) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{v_i^2 z_i}{(v_i \operatorname{ch}(v_i \tau) + k_i \operatorname{sh}(v_i \tau))^2} + \frac{1}{2} \frac{v_i^2 - k_i^2}{v_i \operatorname{cth}(v_i \tau) + k_i} \right). \quad (19)$$

Используя выражения (9), (14)–(17), можно убедиться, что имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{dA_{ii}(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{A_{ii}(\tau)}{\tau} = \phi_i, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{dC(\tau)}{d\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{C(\tau)}{\tau} = r_{\min},$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau, X) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f(\tau, X) = r = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \phi_i X_i^2 = r_{\min} + \sum_{i=1}^n z_i; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dA_{ii}(\tau)}{d\tau} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A_{ii}(\tau)}{\tau} = 0, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dC(\tau)}{d\tau} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{C(\tau)}{\tau} = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2 \phi_i}{k_i + v_i} = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{v_i - k_i}{2}; \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau, X) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau, X) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{v_i - k_i}{2} \equiv y(\infty). \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, обе кривые  $Y(\tau|z, \phi)$  и  $F(\tau|z, \phi)$  при изменении  $\tau$  от нуля до  $\infty$ , стартуя от значения процентной ставки  $r$ , определяемой текущими значениями переменных состояния, стремятся к общему пределу  $y(\infty)$ , не зависящему от текущего состояния, а зависящему только от параметров модели.

Заметим, что функции (18) и (19) для малых  $\tau$  имеют следующие производные:

$$\left. \frac{dY(\tau|\phi, X)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \left. \frac{dF(\tau|\phi, X)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \phi_i (s_i^2 - 2k_i X_i^2) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (v_i^2 - k_i^2 - 4k_i z_i^2).$$

Это говорит о том, что при малых  $\tau$ , во-первых, форвардная кривая изменяется в два раза быстрее, чем кривая доходности, и, во-вторых, вектор латентных переменных  $X$  может определять знак производных. То есть при фиксированной стартовой процентной ставке  $r$  в зависимости от вектора  $X$  кривые  $Y(\tau|z, \phi)$  и  $F(\tau|z, \phi)$  для малых  $\tau$  могут как возрастать, так и убывать.

Анализ временных структур аффинного класса показал, что характер кривых доходностей существенно зависит от текущей (стартовой) процентной ставки  $r$ , хотя предельное значение долгосрочной доходности от текущей ставки не зависит и определяется только параметрами модели. В квадратичных моделях текущая процентная ставка  $r$  при построении кривых доходности в явном виде не используется, вместо нее используются значения латентных переменных  $X$ , которые при известных параметрах модели однозначно определяют процентную ставку  $r$ . Однако в квадратичных моделях одно и то же значение процентной ставки  $r$  может быть получено для некоторого набора различных переменных состояния  $X$ . Интересно выяснить, каково разнообразие кривых доходности при фиксированной процентной ставке, определяемой разнообразием переменных состояния, соответствующих этой фиксированной процентной ставке. Точнее, какова ширина полосы, в которой лежат все возможные кривые доходности (или форвардные кривые), соответствующие некоторой фиксированной ставке  $r$  и различным стартовым векторам  $X$ .

Рассмотрим множество кривых доходности, стартовых от процентной ставки  $r$  и имеющих предельную доходность  $y(\infty)$ . Процентная ставка в скалярной форме определяется с помощью соотношения (9) выражением

$$r = r_{\min} + X^T \Phi X = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \phi_i X_i^2 = r_{\min} + \sum_{i=1}^n z_i. \quad (22)$$

С помощью (18) запишем

$$Y(\tau|z, \phi) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{1}{\tau} \frac{z_i}{v_i \operatorname{cth}(v_i \tau) + k_i} \right) + \left( \frac{1}{2\tau} \ln \left( \operatorname{ch}(v_i \tau) + \frac{k_i}{v_i} \operatorname{sh}(v_i \tau) \right) - \frac{k_i}{2} \right) \right]. \quad (23)$$

Рассмотрим сначала случай, когда матрица  $\Phi$  (т.е. набор собственных чисел  $\{\phi_i\}$ ) фиксирована. Будем называть кривую доходности  $Y(\tau|z, \phi)$  (форвардную кривую) допустимой, если  $Y(0|z, \phi) = r$  и  $Y(\infty|z, \phi) = y(\infty)$ . Ширина полосы, в которой лежат все возможные допустимые кривые доходности, определяется разностью  $Y_{\max}(\tau, z) - Y_{\min}(\tau, z)$ , где  $Y_{\max}(\tau, z)$  – максимум  $Y(\tau|z, \phi)$  по  $z$  при ограничении (22), а  $Y_{\min}(\tau, z)$  – аналогичный минимум. Переменные  $z_i$  – неотрицательные величины, которые принимают значения в интервале  $(0, r - r_{\min})$ . Как следует из (23) доходность определяется как сумма  $n$  положительных слагаемых, каждое из которых, в свою очередь, распадается на два положительных слагаемых, из которых

только первое зависит от  $z_i$ . Тогда максимизация (минимизация) доходности  $Y(\tau|z, \Phi)$  достигается просто: нужно найти максимальный (минимальный) коэффициент при  $z_i$  и назначить максимальное значение для соответствующего ему параметра  $z_i$ . Обозначим символом  $M$  индекс  $i$ , для которого  $v_i \operatorname{cth}(v_i \tau) + k_i \leq v_j \operatorname{cth}(v_j \tau) + k_j$  для всех  $j$ . Аналогично обозначим символом  $m$  индекс  $i$ , для которого  $v_i \operatorname{cth}(v_i \tau) + k_i \geq v_j \operatorname{cth}(v_j \tau) + k_j$  для всех  $j$ . Тогда верхняя и нижняя границы рассматриваемой полосы при заданной матрице  $\Phi$  определяются соотношениями

$$Y_{\max}(\tau, z) = r_{\min} + \frac{1}{\tau} \frac{r - r_{\min}}{v_M \operatorname{cth}(v_M \tau) + k_M} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2\tau} \ln \left( \operatorname{ch}(v_i \tau) + \frac{k_i}{v_i} \operatorname{sh}(v_i \tau) \right) - \frac{k_i}{2} \right),$$

$$Y_{\min}(\tau, z) = r_{\min} + \frac{1}{\tau} \frac{r - r_{\min}}{v_m \operatorname{cth}(v_m \tau) + k_m} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2\tau} \ln \left( \operatorname{ch}(v_i \tau) + \frac{k_i}{v_i} \operatorname{sh}(v_i \tau) \right) - \frac{k_i}{2} \right).$$

Таким образом, ширина полосы, в которой лежат все возможные допустимые кривые доходности  $Y(\tau|z, \Phi)$  при фиксированной процентной ставке  $r$  и заданной матрице  $\Phi$ , равна

$$\Delta_Y = Y_{\max}(\tau, z) - Y_{\min}(\tau, z) = \left( \frac{r - r_{\min}}{v_M \operatorname{cth}(v_M \tau) + k_M} - \frac{r - r_{\min}}{v_m \operatorname{cth}(v_m \tau) + k_m} \right) \frac{1}{\tau}.$$

Аналогично решается проблема определения верхней  $F_{\max}(\tau, z)$  и нижней границ  $F_{\min}(\tau, z)$  для допустимых форвардных кривых:

$$F(\tau|z, \Phi) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{v_i^2 z_i}{(v_i \operatorname{ch}(v_i \tau) + k_i \operatorname{sh}(v_i \tau))^2} \right) + \left( \frac{1}{2} \frac{v_i^2 - k_i^2}{v_i \operatorname{cth}(v_i \tau) + k_i} \right) \right].$$

Пусть символом  $H$  обозначается индекс  $i$ , для которого  $\operatorname{ch}(v_i \tau) + (k_i / v_i) \operatorname{sh}(v_i \tau) \leq \operatorname{ch}(v_j \tau) + (k_j / v_j) \operatorname{sh}(v_j \tau)$  для всех  $j$ . Аналогично обозначим символом  $h$  индекс  $i$ , для которого  $\operatorname{ch}(v_i \tau) + (k_i / v_i) \operatorname{sh}(v_i \tau) \geq \operatorname{ch}(v_j \tau) + (k_j / v_j) \operatorname{sh}(v_j \tau)$  для всех  $j$ . Тогда верхняя и нижняя границы рассматриваемой полосы при заданной матрице  $\Phi$  определяются соотношениями

$$F_{\max}(\tau, z) = r_{\min} + \frac{v_H^2 (r - r_{\min})}{(v_H \operatorname{ch}(v_H \tau) + k_H \operatorname{sh}(v_H \tau))^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{v_i^2 - k_i^2}{v_i \operatorname{cth}(v_i \tau) + k_i},$$

$$F_{\min}(\tau, z) = r_{\min} + \frac{v_h^2 (r - r_{\min})}{(v_h \operatorname{ch}(v_h \tau) + k_h \operatorname{sh}(v_h \tau))^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{v_i^2 - k_i^2}{v_i \operatorname{cth}(v_i \tau) + k_i}.$$

Ширина полосы, в которой лежат все возможные допустимые форвардные кривые  $F(\tau|z, \Phi)$  при фиксированной процентной ставке  $r$  и заданной матрице  $\Phi$ , равна

$$\Delta_F = F_{\max}(\tau, z) - F_{\min}(\tau, z) = \left( \frac{v_H^2 (r - r_{\min})}{(v_H \operatorname{ch}(v_H \tau) + k_H \operatorname{sh}(v_H \tau))^2} - \frac{v_h^2 (r - r_{\min})}{(v_h \operatorname{ch}(v_h \tau) + k_h \operatorname{sh}(v_h \tau))^2} \right) \frac{1}{\tau}.$$

Теперь исследуем влияние матрицы  $\Phi$  на исследуемое множество допустимых кривых доходности (форвардных кривых), составляющих рассматриваемую полосу. Элементы этой матрицы определяют не только процентную ставку (22), но и предельную доходность  $y(\infty)$ :

$$y(\infty) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{v_i - k_i}{2}. \quad (24)$$

Поскольку матрица  $\Phi$  задается набором собственных чисел  $\{\phi_i\}$ , то и допустимый набор матриц может определяться в пространстве положительных собственных чисел. Однако проблема выбора матриц  $\Phi$  будет сложнее, так как эти матрицы определяют не только стартовую процентную ставку  $r$ , но и предельную долгосрочную доходность  $y(\infty)$ . Поэтому обсуждаемое разнообразие матриц (или, что одно

и то же, разнообразие наборов чисел  $\{v_i\}$  должно удовлетворять не только равенству (22), но и соотношению (24) при фиксированных  $r$  и  $y(\infty)$ .

Заметим, что из (24) следует, что  $k_i \leq v_i \leq 2(y(\infty) - r_{\min}) + k_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . В первом слагаемом, зависящем от  $z_i$  в выражении (23) для кривой доходности  $Y(\tau|z, \Phi)$ , знаменатель  $v_i \operatorname{cth}(v_i \tau) + k_i$  монотонно возрастает с увеличением  $v_i$ . Следовательно, минимальное по  $v_i$  значение знаменателя  $k_i (\operatorname{cth}(k_i \tau) + 1)$  достигается при  $v_i = k_i$ , а минимальное по  $v_i$  и  $k_i$  значение знаменателя достигается при минимальном  $k_i = k_0$ . Второе слагаемое в выражении (23) оказывается равным нулю, когда  $v_i = k_i$ , т.е. принимает свое минимальное значение. С ростом  $v_i$  оно монотонно возрастает и достигает своего наибольшего значения при  $v_i = 2(y(\infty) - r_{\min}) + k_i$ . Поэтому наибольшее значение второго слагаемого достигается при максимальном  $k_i = k^0$ , для которого  $v_i = v^0 = 2(y(\infty) - r_{\min}) + k^0$ . Так что границы множества допустимых кривых доходности  $Y(\tau|z, \Phi)$  при варьировании по  $\{z, v\}$  имеют вид

$$Y_{\max}(\tau|z, \Phi) = r_{\min} + \frac{1}{\tau} \frac{r - r_{\min}}{k_0 \operatorname{cth}(k_0 \tau) + k_0} + \frac{1}{2\tau} \ln \left( \operatorname{ch}(v^0 \tau) + \frac{k^0}{v^0} \operatorname{sh}(v^0 \tau) \right) - \frac{k^0}{2},$$

$$Y_{\min}(\tau|z, \Phi) = r_{\min} + \frac{1}{\tau} \frac{r - r_{\min}}{v^0 \operatorname{cth}(v^0 \tau) + k^0} + \frac{1}{2\tau} \ln \left( \operatorname{ch}(v_0 \tau) + \frac{k_0}{v_0} \operatorname{sh}(v_0 \tau) \right) - \frac{k_0}{2}.$$

Аналогичный анализ форвардных кривых  $F(\tau|z, \Phi)$  дает следующие границы множества допустимых форвардных кривых при варьировании по  $\{z, v\}$ :

$$F_{\max}(\tau|z, \Phi) = r_{\min} + \frac{r - r_{\min}}{\exp(2k_0 \tau)} + \frac{1}{2} \frac{(v^0)^2 - (k^0)^2}{v^0 \operatorname{cth}(v^0 \tau) + k^0},$$

$$F_{\min}(\tau|z, \Phi) = r_{\min} + \frac{r - r_{\min}}{(\operatorname{ch}(v^0 \tau) + (k^0 / v^0) \operatorname{sh}(v^0 \tau))^2} + \frac{1}{2} \frac{(v_0)^2 - (k_0)^2}{v_0 \operatorname{cth}(v_0 \tau) + k_0}.$$

Заметим, что вычисление границ множества допустимых кривых при варьировании по  $\{z, v\}$  при максимизации первых слагаемых требует предположения  $v_i = k_i$ , что, в свою очередь, подразумевает равенство нулю, по крайней мере, одного собственного числа матрицы  $\Phi$ . А это противоречит предположению о положительной определенности этой матрицы. Поэтому такие границы являются реально недостижимыми. Реальная граница будет настолько близкой к этой недостижимой, насколько близким к нулю будет минимальное собственное число матрицы  $\Phi$ .

Проиллюстрируем сказанное численным примером для простейшего случая  $n = 2$ . Пусть  $r_{\min} = 0$  и

$$K = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,13 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0,07 & 0 \\ 0 & 0,08 \end{pmatrix}.$$

Для определения базовых кривых будем использовать следующую пару  $(\Phi, X)$ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,08 \end{pmatrix}.$$

В этом случае значение стартовой процентной ставки  $r = 0,0481$ , значение предельной доходности  $y(\infty) = 0,06954$ . На рис. 1 представлены кривая доходности  $Y_0(u)$  и форвардная кривая  $F_0(u)$  для этого случая. Чтобы представить эти кривые «целиком», для всего интервала значений сроков до погашения  $\tau \in (0, \infty)$  использовано нелинейное преобразование сроков до погашения  $u = 1 - e^{-\rho \tau}$ , которое отображает положительную полуось  $(0, \infty)$  в единичный интервал  $(0, 1)$ . Принятое при расчетах численное значение  $\rho = \ln 10 / 30 = 0,07675$  соответствует тому, что сроки до погашения от 0 до 30 отображаются в интервал  $(0, 0,9)$ . Так что  $Y_0(u) = y(\tau, X)$ ,  $F_0(u) = f(\tau, X)$ , где  $\tau = -\ln(1 - u) / \rho$ . По обычно принятой классификации полученные кривые относятся к типу «нормальных кривых», т.е. монотонно возрастающих до конечного предела на всем интервале изменения  $\tau$ .



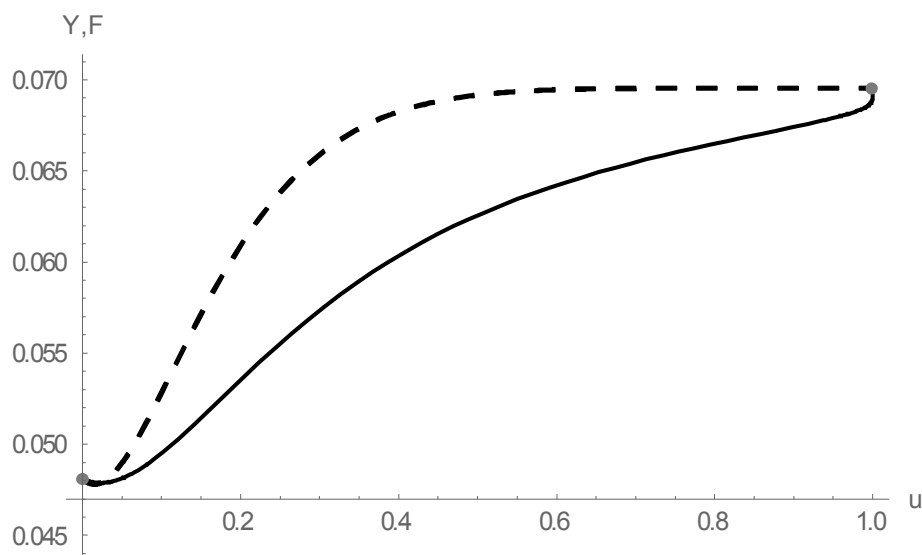


Рис. 1. Кривая доходности  $Y_0(u)$  (сплошная) и форвардная кривая  $F_0(u)$  (пунктирная) для базового варианта (параметры  $\phi_1 = 1$ ,  $\phi_2 = 4$ ,  $X_1 = 0,15$ ,  $X_2 = 0,08$ , соответствуют значениям  $r = 0,0481$ ,  $y(\infty) = 0,06954$ )

На рис. 2. изображены кривая доходности  $Y_0(u)$  (сплошная) и верхняя и нижняя границы  $Y_{\max}(u)$  и  $Y_{\min}(u)$  той полосы, в которой лежат все возможные кривые доходности, соответствующие допустимым векторам переменных состояния. Допустимыми векторами считаются те, которые обеспечивают значения  $r = 0,0481$ ,  $y(\infty) = 0,06954$  при фиксированной (базовой) матрице  $\Phi$ . При этих же условиях на рис. 3 представлена форвардная кривая  $F_0(u)$  (сплошная) и верхняя и нижняя границы  $F_{\max}(u)$  и  $F_{\min}(u)$  полосы форвардных кривых, соответствующих допустимым векторам переменных состояния  $X$ .

Те же кривые, что и на рис. 2 и 3, показаны на рис. 4 и 5: кривая доходности  $Y_0(u)$  (сплошная), форвардная кривая  $F_0(u)$  (сплошная) и верхняя и нижняя границы (пунктирными линиями) полос соответствующих допустимых кривых, но уже для случая, когда могут варьироваться не только допустимые вектора переменных состояния  $X$ , но и допустимые матрицы  $\Phi$ , что, как видно, существенно расширяет полосу возможных кривых доходности.

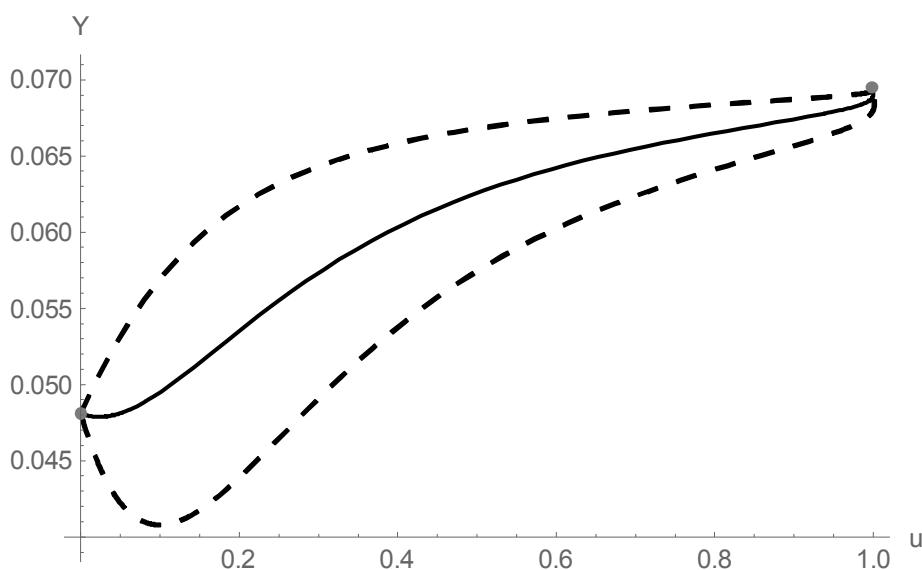


Рис. 2. Кривая доходности  $Y_0(u)$  (сплошная) и верхняя и нижняя границы  $Y_{\max}(u)$  и  $Y_{\min}(u)$  полосы, в которой лежат все возможные кривые доходности, соответствующие допустимым векторам переменных состояния, обеспечивающим значения  $r = 0,0481$ ,  $y(\infty) = 0,06954$  при фиксированной (базовой) матрице  $\Phi$

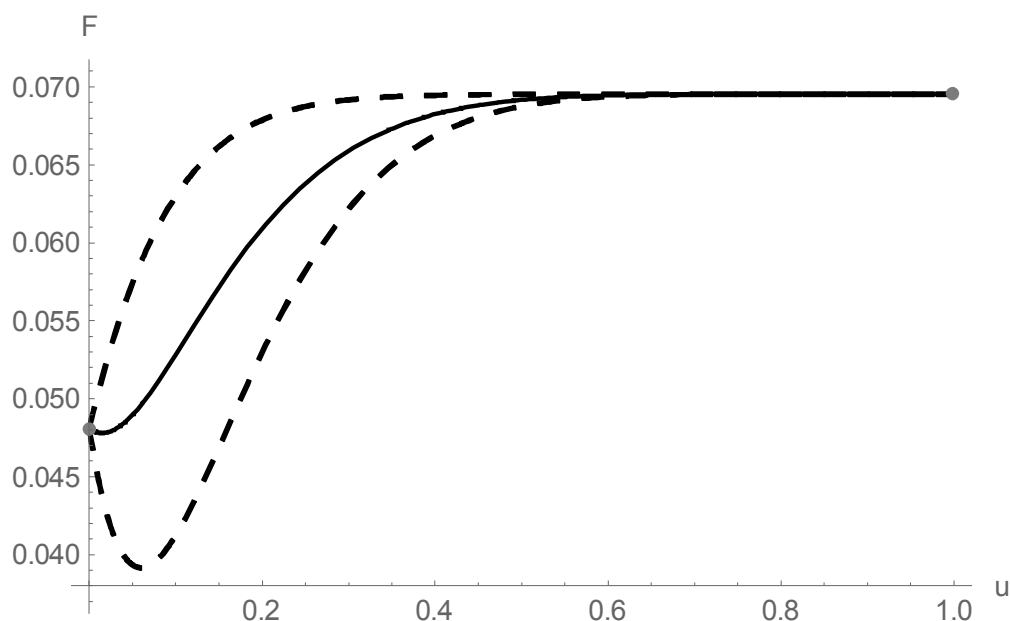


Рис. 3. Форвардная кривая  $F_0(u)$  (сплошная) и верхняя и нижняя границы  $F_{\max}(u)$  и  $F_{\min}(u)$  (пунктирные) полосы форвардных кривых, соответствующих допустимым векторам переменных состояния  $X$  при фиксированной (базовой) матрице  $\Phi$

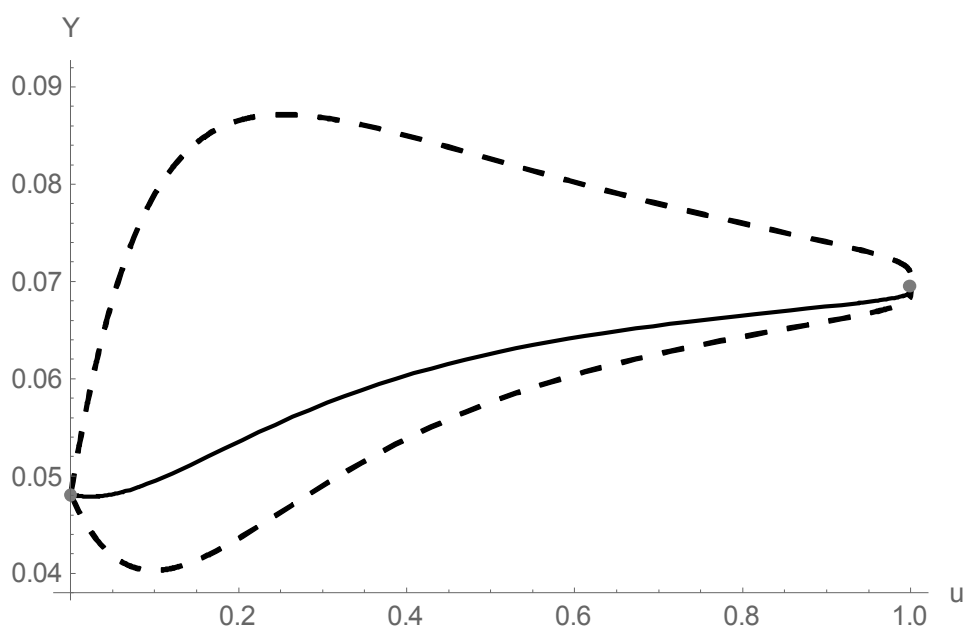


Рис. 4. Кривая доходности  $Y_0(u)$  (сплошная) и верхняя и нижняя границы  $Y_{\max}(u)$  и  $Y_{\min}(u)$  полосы, в которой лежат все возможные кривые доходности, соответствующие допустимым векторам переменных состояния  $X$  и матрицам  $\Phi$ , обеспечивающим значения  $r = 0,0481$ ,  $y(\infty) = 0,06954$

Изменение ширины полос допустимых кривых в зависимости от срока до погашения для кривых, изображенных на рис. 2–5, показано на рис. 6. Для удобства сравнения на этом рисунке приведены сведения для обоих случаев: 1) допустимые кривые соответствуют различным векторам  $X$  при фиксированной матрице  $\Phi$ ; 2) допустимые кривые определяются изменением как векторов  $X$ , так и матриц  $\Phi$ .

В заключение отметим еще одну особенность квадратичных моделей временных структур на основе рассмотренного численного примера. При принятых исходных данных базовые кривые  $Y_0(u) = y(\tau, X)$  и  $F_0(u) = f(\tau, X)$  относятся к типу «нормальных кривых», т.е. монотонно возрастают на всем интервале изменения  $\tau$  от стартовой процентной ставки  $r$  до конечного предела  $y(\infty)$  долгосрочной доходности.

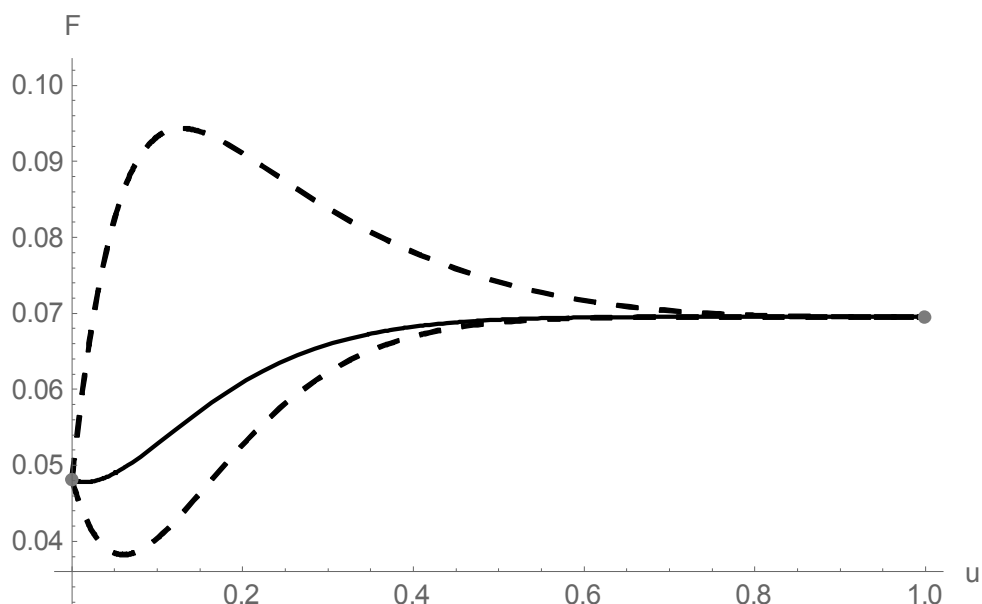


Рис. 5. Форвардная кривая  $F_0(u)$  (сплошная) и верхняя и нижняя границы  $F_{\max}(u)$  и  $F_{\min}(u)$  полосы, в которой лежат все возможные форвардные кривые, соответствующие допустимым векторам переменных состояния  $X$  и матрицам  $\Phi$ , обеспечивающим значения  $r = 0,0481$ ,  $y(\infty) = 0,06954$

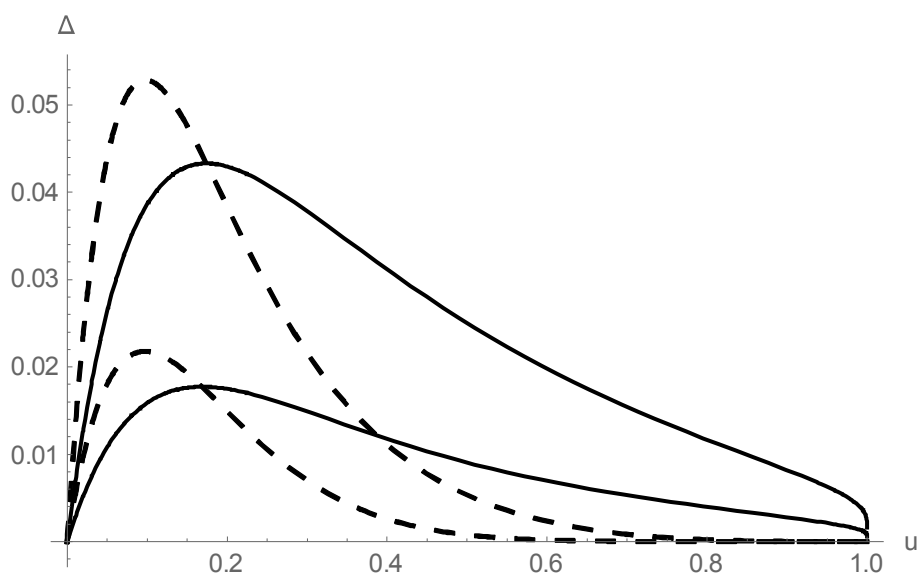


Рис. 6. Ширины  $\Delta$  полос, представленных на рис. 2–5, для кривых доходности (сплошные линии) и форвардных кривых (пунктирные линии) при варьировании только вектором  $X$  (нижние кривые) и при варьировании парой  $(X, \Phi)$ , верхние кривые

В аффинной модели временной структуры это будет единственным решением. В квадратичной модели мы получаем целое семейство кривых, обладающих свойством  $Y(0|z, \phi) = r$  и  $Y(\infty|z, \phi) = y(\infty)$ . При этом в этом семействе имеются кривые, относящиеся как к типу «нормальных кривых», так и к другим типам, предполагающим наличие максимума или минимума.

### Заключение

Представленные результаты иллюстрируют тот факт, что квадратичные модели временной структуры доходности позволяют получать более богатый спектр допустимых кривых доходности и форвардных кривых, чем аффинные модели, которые для фиксированной стартовой процентной ставки позволяют получить только одну кривую, в то время как квадратичные модели при условиях фиксиро-

ванных стартовой и долгосрочной предельной ставок  $r$  и  $y(\infty)$  могут давать довольно широкий спектр кривых доходности. Следовательно, они обладают большими возможностями для подгонки теоретических кривых к реальным рыночным временным структурам. Однако это будет реально осуществимо, если существует возможность контролировать используемые в квадратичной модели латентные переменные. До сих пор в литературе отсутствует какое-либо описание этих переменных в экономическом смысле.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ahn D.-H., Dittmar R.F., Gallant A.R. Quadratic term structure models: Theory and evidence // Review of Financial Studies. 2001. V. 15. P. 243–288.
2. Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure // Journal of Financial Economics. 1977. V. 5. P. 177–188.
3. Медведев Г.А. О временной структуре доходности. 1. Модель Васичека // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1 (18). С. 102–111.
4. Медведев Г.А. О временной структуре доходности. 2. Модель Кокса–Ингерсолла–Росса // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 102–111.
5. Медведев Г.А. О временной структуре доходности. 3. Однофакторная модель Даффи–Кана // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3 (20). С. 71–80.
6. Медведев Г.А. О временной структуре доходности. 4. Двухфакторные модели Даффи–Кана // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 89–99.
7. Медведев Г.А. О временной структуре доходности. 5. Двухфакторные модели Даффи–Кана (продолжение) // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 64–74.
8. Медведев Г.А. О временной структуре доходности. 6. Трехфакторные модели // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 3 (24). С. 113–122.
9. Медведев Г.А. О временной структуре доходности. 7. Новая версия // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 71–83.
10. Медведев Г.А. Стохастические процессы финансовой математики. Минск : БГУ, 2005. 243 с.
11. Constantinides G. A theory of the nominal structure of interest rates // Review of Financial Studies. 1992. V. 5. P. 531–552.
12. Leippold M., Wu L. Design and Estimation of Quadratic Term Structure Models // European Finance Review. 2003. V. 7. P. 47–73.

**Медведев Геннадий Алексеевич** – д-р. физ.-мат. наук, профессор. E-mail: MedvedevGA@bsu.by

**Павлив Дмитрий Александрович**. E-mail: simoco@yandex.ru

Белорусский государственный университет. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 30 июня 2016 г.

*Medvedev Gennady A., Pavliv Dmitriy A.* (Belarusian State University, Belarus).

**On quadratic models of yield in risk-neutral world.**

**Keywords:** yield term structure; quadratic model; risk neutral probability measure.

DOI: 10.17223/19988605/37/5

Instead of "usual used" quadratic models of the interest rate it is possible to obtain the equivalent description of the interest rate through process  $X(t)$  unobserved (latent) state variables by relations

$$dX(t) = K(\theta - X(t)) dt + S dW(t), t > t_0, X(t_0) = X_0, r(t) = r_{\min} + X(t)^T \Phi X(t), X(t) \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^1, \Phi \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

Where  $K, \theta, S, X_0$  are corresponding constant vectors and matrixes, and  $\Phi$  is a diagonal matrix on which diagonal positive eigenvalues of initial matrix of "usual used" model are located. The condition of absence of arbitrage leads to the equation in partial derivatives for the price of zero coupon bond which is obtained in form  $P(r(X), \tau) = \exp[-X^T A(\tau) X - X^T B(\tau) - C(\tau)]$ . For functions of term structure  $A(\tau), B(\tau)$  and  $C(\tau)$  there is a system of the nonlinear ordinary differential equations which generally in an explicit analytical form is unsolved.

In paper assumptions are made: 1) process of latent variables  $X(t)$  is normal process with a stationary expectation  $\theta = 0$ . 2) probability properties of the interest rate  $r(X)$  submit to a risk neutral probability measure. At these assumptions it is found out that function  $B(\tau) = 0$  for all values  $\tau$ . 3) the latent variables constituting vector  $X(t)$ , are independent stochastic processes.

At these assumptions the functions of term structure  $A(\tau)$  and  $C(\tau)$  are obtained in the analytical form and the yield curve  $Y(\tau)$  and the forward rate curve  $F(\tau)$  are derived in an explicit form for  $z_i \equiv \phi_i X_i^2 \geq 0, v_i \equiv \sqrt{k_i^2 + 2s_i^2 \phi_i} \geq k_i, 1 \leq i \leq n$ :

$$Y(\tau) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\tau} \left( \frac{2z_i}{v_i \operatorname{cth}(v_i \tau) + k_i} + \ln \left( \operatorname{ch}(v_i \tau) + \frac{k_i}{v_i} \operatorname{sh}(v_i \tau) \right) - k_i \tau \right),$$

$$F(\tau) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{v_i^2 z_i}{(v_i \operatorname{ch}(v_i \tau) + k_i \operatorname{sh}(v_i \tau))^2} + \frac{1}{2} \frac{v_i^2 - k_i^2}{v_i \operatorname{cth}(v_i \tau) + k_i} \right).$$

Both curves  $Y(\tau)$  and  $F(\tau)$  at change  $\tau$  from 0 to  $\tau$  or 0 до  $\infty$ , starting from the fixed value of the interest rate  $r$ , determined by current values of state variables  $X(t)$ , converge to a general limit  $y(\infty) = r_{\min} + \sum_{i=1}^n \frac{v_i - k_i}{2}$  that is independent on current state  $X(t)$  and is depending only from model parameters.

As seen, in quadratic models the current interest rate  $r$  at yield curve deriving in an explicit form is not used, instead of it values of latent variables  $X$  which at known parameters models uniquely determine the interest rate  $r$  are used. However in quadratic models the same value of the interest rate  $r$  can be derived for some set of various state variables  $X$ . In paper it is found out, how is the family of yield curve at a fixed interest rate determined by a variety of state variables, corresponding to this fixed interest rate. Besides, the width of a strip in which lie all possible yield curves (or forward curves), corresponding to various starting vectors  $X$  and to matrixes  $\Phi$ , that determine the rate  $r$ , is found.

All received analytical results are illustrated by a numerical example.

## REFERENCES

1. Ahn, D.-H., Dittmar, R. F. & Gallant, A.R. (2001) Quadratic term structure models: Theory and evidence. *Review of Financial Studies*. 15. pp. 243-288. DOI: 10.1093/rfs/15.1.243
2. Vasicek, O. (1977) An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*. 5. pp. 177-188. DOI: 10.1002/9781119186229.ch6.
3. Medvedev, G.A. (2012) On term structure of yield rates. 1. Vasiček model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(18). pp. 102-111. (In Russian).
4. Medvedev, G.A. (2012) On term structure of yield rates. 2. The Cox – Ingersoll – Ross model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 102-111. (In Russian).
5. Medvedev, G.A. (2012) On term structure of yield rates. 3. The Duffie – Kan one-factor model. *Tomsk Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(20). pp. 71-80. (In Russian).
6. Medvedev, G.A. (2012) On term structure of yield rates. 4. The Duffie – Kan two factor model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(21). pp. 89-99. (In Russian).
7. Medvedev, G.A. (2013) On term structure of yield rates. 5. The Duffie-Kan two factor model (continuation). *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 64-74. (In Russian).
8. Medvedev, G.A. (2013) On term structure of yield rates. 6. The three factor model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(24). pp. 113-122. (In Russian).
9. Medvedev, G.A. (2013) On term structure of yield rates. 7. The new version. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 71-83. (In Russian).
10. Medvedev, G.A. (2005) *Stokhasticheskie protsessy finansovoy matematiki* [Stochastic processes of financial mathematics]. Minsk: BSU.
11. Constantinides, G. (1992) A theory of the nominal structure of interest rates. *Review of Financial Studies*. 5. pp. 531-552.
12. Leippold, M. & Wu, L. (2003) Design and Estimation of Quadratic Term Structure Models. *European Finance Review*. 7. pp. 47-73. DOI: 10.1093/rof/rfl002/.