

УДК 336:51

DOI: 10.17223/19988605/38/4

Г.А. Медведев

ОБ ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ МОДЕЛИ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ДОХОДНОСТИ

Рассмотрена квадратичная модель временной структуры процентных ставок доходности бескупонной облигации, когда краткосрочная ставка имеет квадратичную зависимость от переменных состояния. Анализ проводится для случая, когда переменные состояния образуют вектор с независимыми компонентами, а временная структура определяется при нейтральной к риску вероятностной мере. Показано, что в этом случае процесс краткосрочной ставки имеет распределение гамма, такое же как для аффинной модели Даффи–Кана. Проводится сравнение временных структур доходности этой аффинной модели с квадратичной моделью доходности. Показано, что предельные (краткосрочные и долгосрочные) доходности этих моделей полностью совпадают, хотя сами временные структуры различаются. Показано, что на форму рассмотренной квадратичной временной структуры значения компонент вектора переменных состояний не влияют, она зависит только от величины стартовой процентной ставки. Сравнительные свойства аффинной модели Даффи–Кана и квадратичной модели доходности иллюстрируются численным примером.

Ключевые слова: временные структуры доходности; квадратичные модели; нейтральная к риску вероятностная мера; аффинная модель Даффи–Кана.

В рамках теории диффузионных процессов существуют разнообразные версии изменения краткосрочных процентных ставок доходности. Тем не менее до сих пор не появилось такой модели, которая смогла бы быть подходящей основой для построения временной структуры доходности, близкой к существующей на реальном финансовом рынке. Наиболее известны модели процентных ставок, приводящие к аффинным временным структурам доходности, поскольку они просты и подразумевают решение в аналитическом виде. Однако воспроизведения реальных временных структур с помощью аффинных моделей неточны. В последнее время развитие моделей идет в двух направлениях: увеличение размерности моделей и отказ от аффинных свойств. В качестве представителей такого развития наиболее популярны сейчас так называемые квадратичные модели процессов процентных ставок [1], в которых процесс процентной ставки $r(t)$ задается уравнениями

$$\begin{aligned} dX(t) &= \xi(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t), \quad t > t_0, \quad X(t_0) = X_0, \\ r(t) &= \alpha + X(t)^T \Psi X(t), \quad X(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1, \quad \Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

Обычно $\alpha \geq 0$, Ψ – симметрическая положительно определенная матрица. Когда вектор $\xi(X)$ линейно зависит от X , а матрица $\sigma(X)$ не зависит от X , процесс $X(t)$ является гауссовым и в стационарном режиме имеет, скажем, математическое ожидание μ и матрицу ковариации V .

Утверждение. При принятых условиях производящая функция моментов процесса процентной ставки $r(t)$ определяется соотношением

$$M(z) = e^{\alpha z - \mu^T V^{-1} \mu / 2 + \mu^T (V - 2z V \Psi V)^{-1} \mu / 2} \frac{|V|^{1/2}}{|V - 2z V \Psi V|^{1/2}},$$

где $|V| = \det V$, z – вещественная переменная с областью определения, задаваемой неравенством

$$|V - 2z V \Psi V| > 0.$$

Следствие 1. Стационарное математическое ожидание процесса $r(t)$

$$E[r] = \alpha + \mu^T \Psi \mu + V_0 \Psi,$$

где o – сумма произведений соответствующих элементов матриц, $V_0 \Psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} \Psi_{ij}$.

Следствие 2. Пусть Ψ и V – диагональные матрицы $\Psi = \psi I$, $V = \nu I$. В этом случае

$$M(z) = e^{\alpha z - \mu^T \mu z \psi / (1 - 2z \nu \psi)} \frac{1}{(1 - 2z \nu \psi)^{n/2}},$$

а основные стационарные моменты процесса $r(t)$ вычисляются по формулам

$$E[r] = \alpha + n \nu \psi + \mu^T \mu \psi, \text{ Var}[r] = 2\nu (n \nu + 2\mu) \psi^2, \\ E[(r - E[r])^3] = 8\nu^2 (n \nu + 3\mu) \psi^3.$$

Следствие 3. Если условия следствия 2 дополнить равенством $\mu = 0$, то маргинальным распределением процесса $r(t)$ будет сдвинутое распределение гамма с параметром сдвига α , параметром масштаба $1/2\nu\psi$ и параметром формы $n/2$.

Заметим, что сдвинутое распределение гамма характеризует также краткосрочную процентную ставку в модели Даффи–Кана, где процесс $r(t)$ следует стохастическому дифференциальному уравнению [2]

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{2kD \frac{r(t) - \alpha}{\theta - \alpha}} dW(t). \quad (1)$$

Таким образом, модель Даффи–Кана (1) и квадратичная модель

$$dX(t) = -K X(t) dt + \Sigma dW(t), t > t_0, X(t_0) = X_0, \\ r(t) = \alpha + X(t)^T \Psi X(t), X(t) \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1, \Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (2)$$

порождают случайные процессы $r(t)$ с одним и тем же распределением, когда условия следствий 2 и 3 выполняются, т.е. $K = kI$, Σ – диагональная матрица с элементами $\sqrt{2k\nu}$, $\Psi = \psi I$. При этом параметры уравнения (1) должны быть согласованы с параметрами модели (2) следующими равенствами:

$$\theta = \alpha + n \nu \psi, D = 2 n \nu^2 \psi^2.$$

Представляет интерес выяснить, насколько разными (или близкими) будут временные структуры процентных ставок доходности для этих двух моделей при данных условиях. Рассмотрим этот вопрос в нейтральной к риску постановке, когда рыночные цены риска равны нулю.

Основываясь на известных результатах [2], временную структуру процентных ставок доходности $y(\tau)$ (кривую доходности) и форвардных процентных ставок $f(\tau)$ (форвардную кривую) для модели (1) можно записать в виде

$$y_1(\tau) = \alpha + (r - \alpha) \frac{B(\tau)}{\tau} + \frac{kn\nu\psi}{G} \left(1 - \frac{\ln(1 + gB(\tau))}{\tau g} \right), \quad (3)$$

$$f_1(\tau) = r + n\nu\psi k B(\tau) - k B(\tau) (r - \alpha) - 2kn\nu\psi B(\tau)^2 (r - \alpha), \quad (4)$$

где $B(\tau) = \left(\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon\tau} - 1} + G \right)^{-1}$, $\varepsilon = \sqrt{k^2 + 4kn\nu\psi}$, $g = (\varepsilon - k) / 2$, $G = (\varepsilon + k) / 2$.

Заметим, что обе эти кривые имеют одни и те же предельные значения как при краткосрочных, так и при долгосрочных доходностях:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y_1(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f_1(\tau) = r; \lim_{\tau \rightarrow \infty} y_1(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f_1(\tau) \equiv y(\infty) = \alpha + \frac{ng}{2} < \theta. \quad (5)$$

Для модели (2) эти кривые определяются с помощью гиперболических функций соотношениями [3]

$$y_2(\tau) = \alpha + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\tau} \left(\frac{2\psi_i X_i^2}{\varepsilon_i \text{cth}(\varepsilon_i \tau) + k_i} + \ln \left(\text{ch}(\varepsilon_i \tau) + \frac{k_i}{\varepsilon_i} \text{sh}(\varepsilon_i \tau) \right) - k_i \tau \right), \quad (6)$$

$$f_2(\tau) = \alpha + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\varepsilon_i^2 \psi_i X_i^2}{(\varepsilon_i \text{ch}(\varepsilon_i \tau) + k_i \text{sh}(\varepsilon_i \tau))^2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_i^2 - k_i^2}{\varepsilon_i \text{cth}(\varepsilon_i \tau) + k_i} \right), \quad (7)$$

где $\varepsilon_i \equiv \sqrt{k_i^2 + 4k_i \nu_i \psi_i} \geq k_i$, $1 \leq i \leq n$. Согласно (2) имеем $r = \alpha + \sum_{i=1}^n \psi_i X_i^2$. Для нашего случая, когда по

принятым предположениям параметры k , ν и ψ не зависят от индекса, формулы (6) и (7) упрощаются к виду

$$y_2(\tau) = \alpha + \frac{r - \alpha}{\tau \varepsilon \operatorname{cth}(\varepsilon \tau) + \tau k} + \frac{n}{2\tau} \ln \left(\operatorname{ch}(\varepsilon \tau) + \frac{k}{\varepsilon} \operatorname{sh}(\varepsilon \tau) \right) - \frac{nk}{2}, \quad (8)$$

$$f_2(\tau) = \alpha + \frac{\varepsilon^2 (r - \alpha)}{(\varepsilon \operatorname{ch}(\varepsilon \tau) + k \operatorname{sh}(\varepsilon \tau))^2} + \frac{n}{2} \frac{\varepsilon^2 - k^2}{\varepsilon \operatorname{cth}(\varepsilon \tau) + k}, \quad (9)$$

который не предусматривает явной зависимости от конкретных значений латентных переменных состояния X , а параметры k , ε и ν те же, что и в формулах (3) и (4). Анализ показывает, что кривые (8) и (9) имеют одинаковые предельные значения как при краткосрочных, так и при долгосрочных доходностях, точно такие же, как у кривых (3) и (4), приведенных в равенствах (5).

Из представлений (8) и (9) видно, что при предположениях следствий 2 и 3 в квадратичной модели (2) при фиксированной процентной ставке r в отличие от ожидаемого семейства кривых, как в [3], существуют единственные кривые $y_2(\tau)$ и $f_2(\tau)$. Это объясняется тем, что эти кривые зависят не от конкретных значений X_t , а от суммы квадратов всех переменных состояний X_t , которая как раз задает фиксированную процентную ставку r .

Заметим, что функции (3)–(4) и (8)–(9) для малых τ имеют следующие производные:

$$\left. \frac{dy_1(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{1}{2} \frac{df_1(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{1}{2} \frac{dy_2(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{1}{4} \frac{df_2(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{k(\theta - r)}{2},$$

где $\theta = \alpha + n \nu \psi$ – стационарное математическое ожидание процесса процентной ставки $r(t)$. Это говорит, в частности, о том, что при малых τ , во-первых, форвардная кривая изменяется в два раза быстрее, чем кривая доходности для обеих моделей, во-вторых, вектор латентных переменных X не влияет на знак производных, и, в-третьих, кривые квадратичной модели при малых τ изменяются в два раза быстрее, чем кривые аффинной модели Даффи–Кана.

Как известно, в практике обычно встречаются кривые доходности (и форвардные кривые) трех типов: нормальные (монотонно возрастающие), инверсные (монотонно убывающие) и кривые с максимумом («горбатые»). Все эти три типа могут порождаться рассматриваемыми здесь моделями в зависимости от значения стартовой процентной ставки r . Когда $r < y(\infty)$, получается нормальная кривая. Когда $r > \theta$, кривые доходности инверсные. Если $y(\infty) < r < \theta$, кривая доходности имеет максимум. На рис. 1–3 для иллюстрации эти случаи показаны. Чтобы представить эти кривые «целиком» для всего интервала значений сроков до погашения $\tau \in (0, \infty)$, использовано нелинейное преобразование сроков до погашения $u = 1 - e^{-\rho \tau}$, которое отображает положительную полуось $(0, \infty)$ в единичный интервал $(0, 1)$. Принятое при расчетах численное значение $\rho = \ln 10/30 = 0,07675$ соответствует тому, что сроки до погашения от 0 до 30 отображаются в интервал $(0; 0,9)$. Так что $y(\tau)$ отображает $Y(u)$, а $f(\tau)$ отображает $F(u)$, где $\tau = -\ln(1 - u) / \rho$.

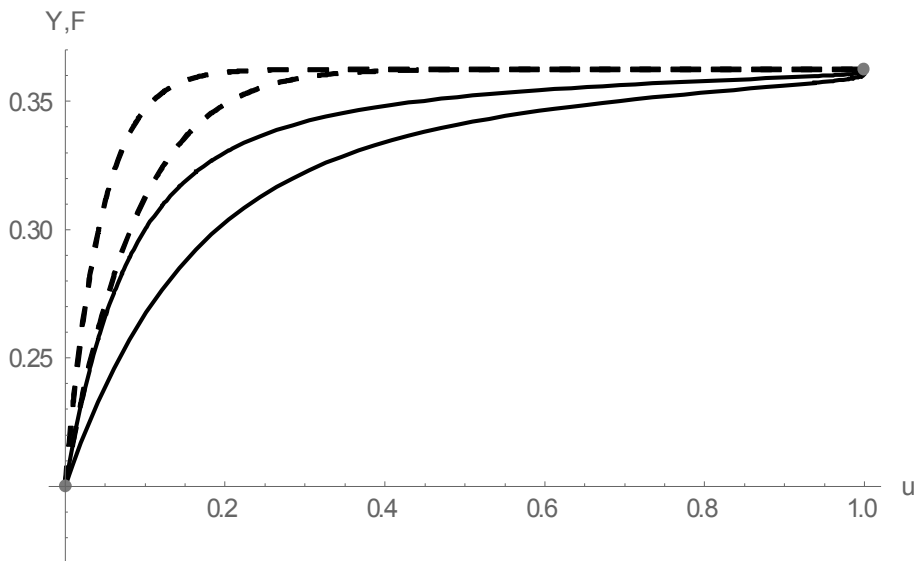


Рис. 1. Нормальные типы кривых $Y(u)$ и $F(u)$; $r = 0,2 < y(\infty) = 0,3625$

Кривые доходности $Y(u)$ показаны сплошными линиями, а форвардные кривые $F(u)$ – пунктирными. Круглыми маркерами показаны предельные значения доходностей при $\tau \rightarrow 0$ ($u \rightarrow 0$) и при $\tau \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow 1$). Кривые доходности для модели Даффи–Кана располагаются ниже соответствующих кривых квадратичной модели для нормального типа (рис. 1) и выше – для инверсного типа (рис. 2). В качестве параметров моделей были выбраны следующие: $\alpha = 0$, $n = 5$, $v = 0,08$, $\psi = 1$, $k = 0,7$ ($k = 0,5$ для рис. 3), $\theta = 0,4$, $y(\infty) = 0,3625$ ($y(\infty) = 0,3508$ для рис. 3).

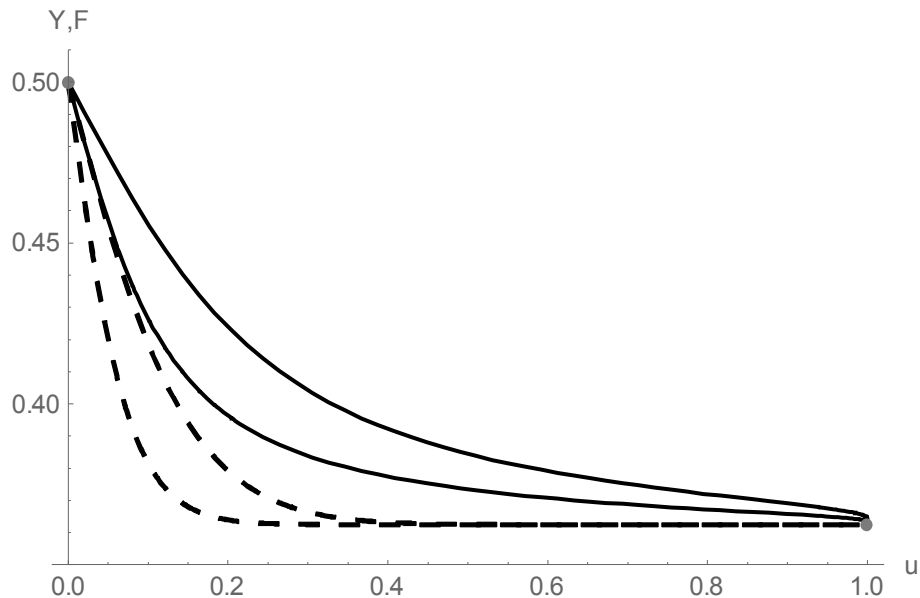


Рис. 2. Инверсные типы кривых; $r = 0,5 > \theta = 0,4$

Таким образом, когда в квадратичной модели любой размерности n латентные переменные состояния X независимы и одинаково распределены по нормальному закону с нулевым средним, то временная структура процентных ставок доходности не зависит от конкретных значений переменных X , а определяется только стартовым значением r текущей краткосрочной процентной ставки точно так же, как в аффинных моделях. При этом долгосрочные предельные ставки получаются такими же, как в модели Даффи–Кана. Причем распределение вероятностей процесса краткосрочной процентной ставки в этих моделях оказывается идентичным – сдвинутым гамма-распределением.

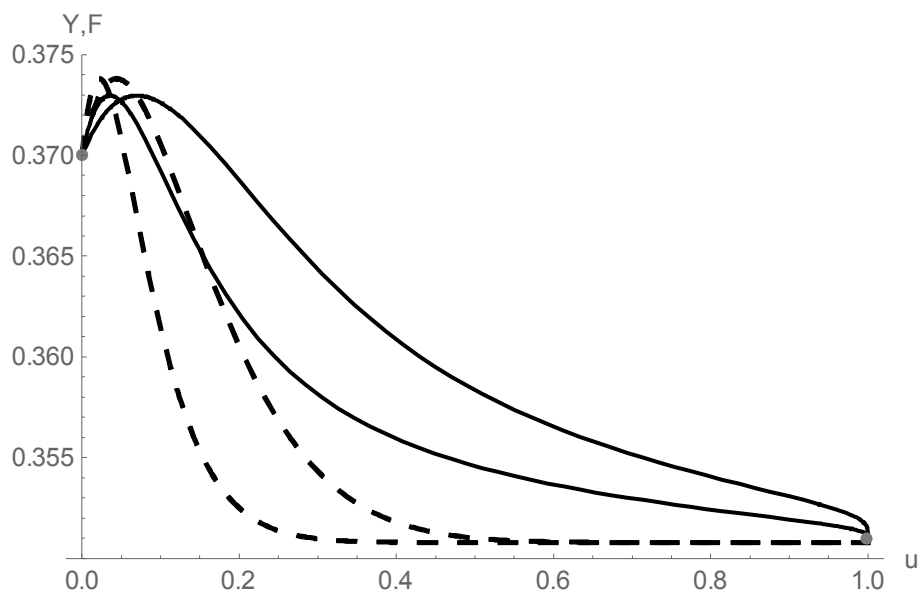


Рис. 3. Кривые с максимумом; $y(\infty) = 0,3508 < r = 0,37 < \theta = 0,4$

Особенностью квадратичной модели является более быстрая, чем в модели Даффи–Кана, сходимость к предельному значению долгосрочной доходности, которая иллюстрируется на рис. 4 с помощью отношений

$$\delta Y = \frac{Y_2(u) - y(\infty)}{Y_1(u) - y(\infty)}, \quad \delta F = \frac{F_2(u) - y(\infty)}{F_1(u) - y(\infty)}.$$

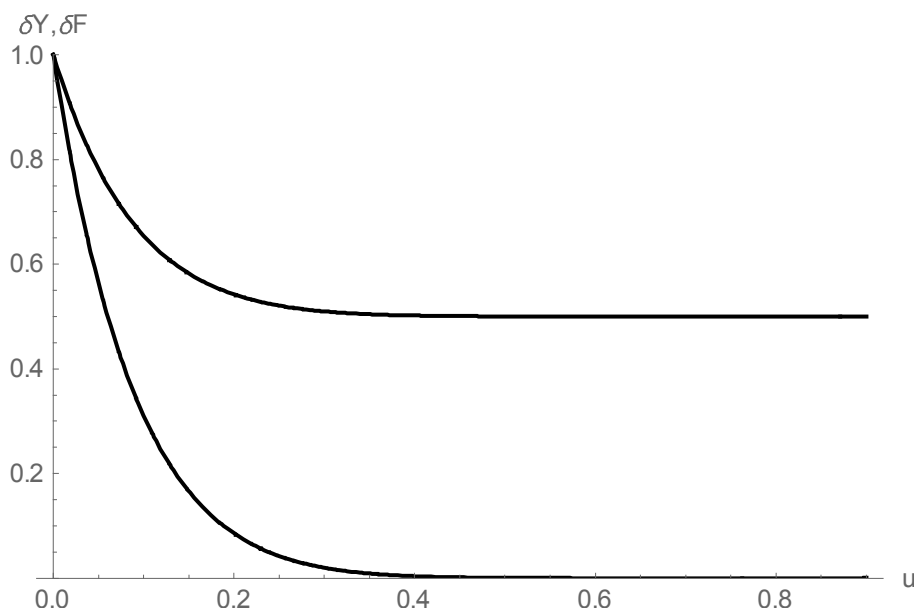


Рис. 4. Отношения δY (верхняя кривая) и δF (нижняя кривая), характеризующие сравнительную скорость сходимости кривых доходности рис. 1 к предельному значению $y(\infty)$

Из рисунка следует, что для данных рис. 1 практически для всех сроков погашения кривая $y_2(\tau)$ в два раза ближе к предельному значению $y(\infty)$, чем кривая $y_1(\tau)$. Что касается форвардной кривой $f_2(\tau)$, то она практически уже достигает своего предельного значения для $\tau > 9$ лет ($u > 0,5$).

К сожалению, хотя квадратичные модели доходности активно обсуждаются в литературе, природа квадратичных моделей оказывается загадочной, поскольку они являются математическими абстракциями, и ни один из авторов, описывающих свойства этих моделей, не привел объяснения, каким образом пользователь этих моделей может наблюдать значения латентных переменных состояния X и вообще существуют ли они, как они определяются и каков их экономический смысл.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ahn D.-H., Dittmar R.F., Gallant A.R. Quadratic term structure models: Theory and evidence // Review of Financial Studies. 2001. V. 15. P. 243–288.
2. Медведев Г.А. О временной структуре доходности. 3. Однофакторная модель Даффи–Кана // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3 (20). С. 71–80.
3. Медведев Г.А., Павлив Д.А. О квадратичных моделях доходности в риск-нейтральной среде // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 4 (37). С. 44–56.

Медведев Геннадий Алексеевич, д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: MedvedevGA@bsu.by
Белорусский государственный университет (г. Минск, Республика Беларусь)

Поступила в редакцию 22 августа 2016 г.

Medvedev Gennady A. (Belarusian State University, Belarus, Minsk).

On a quadratic model of yield term structure.

Keywords: time yield structure; quadratic model; risk neutral probability measure; Duffie–Kan affine model.

DOI: 10.17223/19988605/38/4

Within framework of the theory of diffusion processes there are various versions of an evolution of short-term yield interest rates. Nevertheless till now there was no such model which could be a suitable basis for construction of term structure of yield close to existing one on real financial market. The models of interest rates leading to affine term structures of yield are simple, most known and imply a solution in an analytical form. However, reproduction of real term structures by means of affine models are inexact. Recently development of models goes in two directions: increase dimension of models and refusal of affine properties. As representatives of such development are most popular now so-called quadratic models of interest rate processes in which interest rate process $r(t)$ is set by the equations

$$\begin{aligned} dX(t) &= \xi(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t), \quad t > t_0, \quad X(t_0) = X_0, \\ r(t) &= \alpha + X(t)^T \Psi X(t), \quad X(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1, \quad \Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

Usually $\alpha \geq 0$, Ψ is a symmetrical positive definite matrix. When the vector $\xi(X)$ linearly depends on X , and the matrix $\sigma(X)$ does not depend on X , process $X(t)$ is Gaussian and in a stationary conditions has, say, expectation μ and a matrix of a covariance V . If Ψ and V are diagonal matrixes $\Psi = \psi I$, $V = \nu I$, and $\mu = 0$ the shifted gamma distribution with shift parameter α , scale parameter $1/2\nu\psi$ and form parameter $n/2$ will be marginal distribution of process $r(t)$. The shifted gamma distribution characterizes also the short-term interest rate in affine model of Duffie–Kan. Thus, the Duffie–Kan model and quadratic model generate the stochastic processes $r(t)$ with identical distribution. In the paper, the explicit expressions for the term structure of zero-coupon yield to maturity and forward interest rate curve for both models are obtained. Also, the differences between the yield term structures of the models considered in the risk-neutral setting are discussed, when the market price of risk is zero. It is shown that if in quadratic model of any dimension n latent state variable X are independent and identical distributed under the normal law with a zero expectation the term structure of interest rates of yield does not depend on concrete values of variables X , and is depended only on starting value r of the current short-term interest rate in the same way as in affine models. Thus long-term limiting rates turn out the same, as in model of Duffie–Kan. Comparative properties of affine Duffie–Kan model and quadratic model of yield are illustrated by a numerical example.

REFERENCES

1. Ahn, D.-H., Dittmar, R.F. & Gallant, A.R. (2001) Quadratic term structure models: Theory and evidence. *Review of Financial Studies*. 15. pp. 243–288.
2. Medvedev, G.A. (2012) On term structure of yield rates. 3. The Duffie–Kan one-factor model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(20). pp. 71–80. (In Russian).
3. Medvedev, G.A. & Pavliv, D.A. (2016) On quadratic models of yield in risk-neutral world. *Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(37). pp. 44–56. (In Russian).