УДК 512.623.23
DOI 10.17223/19988621/46/2

Н.Ю. Галанова

ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПОЛЯ С СИММЕТРИЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

Исследуются свойства упорядоченных полей с симметричными сечениями. Рассматриваются вещественно замкнутые упорядоченные поля K, $|K|=|G|=cf(G)=\beta>\aleph_0$, где G есть группа архимедовых классов поля K, такие, что конфинальность каждого симметричного сечения K равна β. Показывается, что такой класс полей совпадает с классом всех полей ограниченных формальных степенных рядов $\mathbf{R}[[G,\beta]]$, где G есть делимая абелева группа, $|G|=cf(G)=\beta>\aleph_0$, при условии ОКГ. По заданному упорядоченному полю с симметричным сечением строится его подполе с симметричным сечением того же типа конфинальности.

Ключевые слова: *линейно упорядоченная абелева группа, линейно упорядоченное поле, поле ограниченных формальных степенных рядов, простое трансцендентное расширение упорядоченного поля, вещественное замыкание, симметричное сечение, конфинальность сечения.*

Предварительные сведения

Строение сечений в упорядоченном поле несёт существенную информацию о свойствах самого поля. В данной статье будем использовать понятия симметричного и трансцендентного сечений из классификации сечений, разработанной Г.Г. Пестовым [1–4]. Автором статьи были полностью исследованы симметричные сечения для полей ограниченных формальных степенных рядов и некоторых моделей нестандартной вещественной прямой [5–7]. В данной статье исследование симметричных сечений продолжается для более общего случая.

Сечение (A,B) упорядоченного поля K называется *симметричным*, если для каждого $a\in A$ существует такое $a_1\in A$, что $(a_1+(a_1-a))\in B$, и для каждого $b\in B$ существует такое $b_1\in B$, что $(b_1-(b-b_1))\in A$ [1–4].

Пусть A – упорядоченное множество. Говорят, что подмножество X множества A *конфинально* A, если для каждого $x\in A$ существует $y\in X$, такой, что $x\le y$. Наименьшая мощность среди мощностей всех множеств, конфинальных A, называется *конфинальностью* A и обозначается $cf(A)$ [4].

Конфинальностью симметричного сечения (A,B) называется $cf(A)$ [4,8].

Пусть P – упорядоченное расширение поля K. Будем говорить, что элемент $t\in P\setminus K$ *порождает сечение* (A,B) в упорядоченном поле K, если $A<t<B$.

Говорят, что *многочлен* $f(x)$ *меняет знак на сечении* (A,B) упорядоченного поля P, если существуют такие $a\in A,\ b\in B$, что на множестве $A\cap[a,b]$ многочлен строго положителен (отрицателен), а на множестве $B\cap[a,b]$ строго отрицателен (положителен). Если все многочлены из $P[x]$ не меняют знак на сечении, то это сечение называется *трансцендентным.* В противном случае сечение называется *алгебраическим* [1–4] .

Теорема 1.1. [1] Упорядоченное поле P вещественно замкнуто тогда и только тогда, когда все сечения P трансцендентны.

Пусть G – линейно упорядоченная мультипликативная абелева группа, $\mathbf{R}$ – поле вещественных чисел.

Через $\mathbf{R}[[G]]$ обозначается [9] *поле формальных степенных рядов* вида $x = \sum\limits_{g \in G} r_g g$, $r_g \in \mathbf{R}$, где носитель ряда $\operatorname{supp}(x) = \{g \in G \mid r_g \neq 0\}$ – вполне антиупорядоченное (каждое непустое подмножество имеет наибольший элемент) подмножество группы G.

Полагаем $x > 0 \Leftrightarrow r_{g_0} > 0,\ g_0 = \max(\operatorname{supp}(x))$.

Пусть β – кардинал, $\aleph_0 < \beta \leq |G|$. Через $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ обозначается [8] поле таких формальных степенных рядов x, что $|\operatorname{supp}(x)| < \beta$. Это поле называется *полем ограниченных формальных степенных рядов*.

Элементы a,b упорядоченного поля K называются *архимедовски эквивалентными*, если существует такое натуральное число n, что $n|a|>|b|$ и $n|b|>|a|$. Если a и b архимедовски эквивалентны, то пишем $a \sim b$.

С каждым упорядоченным полем K связано понятие его *группы архимедовых классов*, она получается как фактор-группа мультипликативной группы $K \setminus \{0\}$ по отношению к архимедовской эквивалентности [1–4].

Группа архимедовых классов упорядоченного поля $\mathbf{R}[[G]]$ изоморфна G.

Как было доказано Капланским [8, 9], каждое линейно упорядоченное поле вкладывается с сохранением порядка в поле формальных степенных рядов, построенное по группе архимедовых классов данного поля.

Мультипликативная группа G называется делимой [8], если для любого $g \in G$ и любого натурального n существует решение уравнения $h^n = g$. Доказано [8], что если группа G – делимая, то поля $\mathbf{R}[[G]]$, $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ вещественно замкнуты.

Поле $\mathbf{R}[[G]]$ является архимедовски замкнутым, что равносильно отсутствию симметричных сечений [2–4], [10].

Теорема 1.2. [2] Если сечение (A,B) поля K трансцендентно, то порядок из K единственным образом продолжается на поле $K(t)$, полученном заполнением этого сечения.

Теорема 1.3. [3] Пусть P есть упорядоченное расширение поля K, такое, что для каждого $x \in P$ существует $y \in K$, такое, что $x \sim y$. Тогда каждый элемент из $P \setminus K$ индуцирует симметричное сечение в K.

Теорема 1.4. [3] Пусть K есть подполе архимедовски замкнутого поля P и (A,B) есть симметричное сечение в K. Тогда существует $t \in P$ такое, что $A < t < B$.

Теорема 1.5. [2] Пусть упорядоченные вещественно замкнутые поля F_1, F_2 таковы, что $|F_1| = |F_2| = \alpha$ и конфинальность каждого симметричного сечения в обоих полях равна α. Тогда для того чтобы F_1, F_2 были упорядоченно изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы группы архимедовых классов этих полей были изоморфны.

Теорема 1.6. [10] Пусть G – линейно упорядоченная делимая абелева группа. Пусть β – кардинал, $\aleph_0 < \beta \le |G|$. Тогда конфинальность каждого симметричного сечения поля $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ равна $cf(\beta)$. В частности, если β – регулярный кардинал, то конфинальность каждого симметричного сечения $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ равна β.

Следствие 1.7. (ОКГ) Пусть G – линейно упорядоченная делимая абелева группа, β – регулярный кардинал, $\aleph_0 < \beta = cf(G) = |G|$. Тогда каждое вещественно замкнутое поле K мощности β с группой архимедовых классов G, в котором каждое симметричное сечение имеет конфинальность β, упорядоченно изоморфно полю $\mathbf{R}[[G,\beta]]$.

Доказательство. Так как $\beta = cf(G)$, группа G имеет вполне антиупорядоченные подмножества мощности β. Поэтому $\mathbf{R}[[G]] \setminus \mathbf{R}[[G,\beta]] \ne \varnothing$. При ОКГ мощность поля $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ равна $|G|$ (см. [8]). Пусть поле K удовлетворяет условиям следствия, тогда $|K| = |\mathbf{R}[[G,\beta]]| = \beta$. Группы архимедовых классов обоих полей равны G. Симметричные сечения обоих полей имеют конфинальность β. По теореме 1.5 K изоморфно $\mathbf{R}[[G,\beta]]$.

Свойства упорядоченных полей с симметричными сечениями

Рассмотрим некоторые следствия теории сечений, изложенной в [1–4], [10].

Лемма 2.1. Пусть P – упорядоченное расширение поля K, (A,B) – сечение поля K и между берегами сечения (A,B) нет элементов из P. Тогда пара множеств $(\tilde{A},\tilde{B})$, заданная следующим образом: $\tilde{A} = \{x \in P \mid \exists a \in A \quad x \le a\}$, $\tilde{B} = \{x \in P \mid \exists b \in B \quad b \le x\}$, является сечением поля P и $cf(A,B) = cf(\tilde{A},\tilde{B})$. При этом если (A,B) симметричное сечение, то $(\tilde{A},\tilde{B})$ также симметричное сечение.

Доказательство. По условию $A \subset \tilde{A}, \quad B \subset \tilde{B}$. Так как между берегами (A,B) нет элементов из P, то $(\tilde{A},\tilde{B})$ – сечение P. Множество наименьшей мощности, конфинальное A, будет также и множеством наименьшей мощности, конфинальным $\tilde{A}$, поскольку A конфинально $\tilde{A}$. Отсюда получаем $cf(A,B) = cf(\tilde{A},\tilde{B})$. Пусть теперь (A,B) – симметричное сечение; докажем, что $(\tilde{A},\tilde{B})$ также симметрично. Пусть $\tilde{a} \in \tilde{A}$. Найдётся $a \in A$ такое, что $\tilde{a} \le a$. Далее, по определению симметричного сечения существует такое $a_1 \in A$, что $(a_1 + (a_1 - a)) \in B$. Из того, что $(a_1 + (a_1 - a)) \le (a_1 + (a_1 - \tilde{a}))$ и $(a_1 + (a_1 - \tilde{a})) \in P$, следует, что $(a_1 + (a_1 - \tilde{a})) \in \tilde{B}$. Аналогично, для каждого $\tilde{b} \in \tilde{B}$ существует такое $b_1 \in B$, что $(b_1 - (\tilde{b} - b_1)) \in \tilde{A}$.

Утверждение 2.2. Пусть упорядоченное поле K имеет группу архимедовых классов G. Сечение (A,B) поля K симметрично тогда и только тогда, когда существует элемент $t \in \mathbf{R}[[G]] \setminus K$ такой, что $A < t < B$.

Доказательство. Если $t \in \mathbf{R}[[G]] \setminus K$ таково, что $A < t < B$, то по теореме 1.3 (A, B) симметрично. Это следует также и из теоремы 1.4, так как поле $\mathbf{R}[[G]]$ архимедовски замкнуто [10].

С другой стороны, если между (A, B) нет элементов из $\mathbf{R}[[G]]$, то (A, B) индуцирует (по лемме 2.1) симметричное же сечение $(\tilde{A}, \tilde{B})$ в $\mathbf{R}[[G]]$, но в $\mathbf{R}[[G]]$ нет симметричных сечений [10].

Докажем следующий факт, используя теорию сечений.

Лемма 2.3. Пусть Γ – вполне упорядоченное множество, $\{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ – семейство вещественно замкнутых упорядоченных полей, таких, что $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ $\gamma_1 < \gamma_2 \Rightarrow F_{\gamma_1} \subset F_{\gamma_2}$. Тогда $F = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma$ – упорядоченное вещественно замкнутое поле.

Доказательство. Очевидно, что F – упорядоченное поле. Проверим вещественную замкнутость F. Согласно теореме 1.1, достаточно доказать, что все сечения поля F трансцендентны. Допустим противное, т.е. пусть существует алгебраическое сечение (A, B) поля F. Тогда существует многочлен $f(x) \in F[x]$ и такие $a \in A, b \in B$, что на множестве $A \cap [a, b]$ многочлен $f(x)$ строго положителен (отрицателен), а на множестве $B \cap [a, b]$ строго отрицателен (положителен). Найдётся F_{γ_0}, такое, что $f(x) \in F_{\gamma_0}[x]$ и $a, b \in F_{\gamma_0}$. Тогда $f(x)$ строго положителен (отрицателен) на $A \cap [a, b] \cap F_{\gamma_0}$, а на множестве $B \cap [a, b] \cap F_{\gamma_0}$ строго отрицателен (положителен). Это означает, что сечение $(A \cap F_{\gamma_0}, B \cap F_{\gamma_0})$ поля F_{γ_0} – алгебраическое, что противоречит вещественной замкнутости F_{γ_0}.

Конструкция упорядоченного поля с симметричными сечениями

Пусть вещественно замкнутые упорядоченные поля P и K имеют одинаковую группу архимедовых классов G, $K \subset P$.

Пусть (A, B) – симметричное сечение поля P, β – кардинал, $\aleph_0 < \beta \leq |G|$, $cf(A, B) = \beta$. Обозначим через $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \beta}$ множество наименьшей мощности, конфинальное A.

Далее, пусть $x_\gamma \in P \setminus K$ для всех $\gamma \in \beta$.

Построим по трансфинитной рекурсии последовательность вещественно замкнутых полей $\{K_\gamma\}_{\gamma \in \beta}$. Полагаем $K_1 = \overline{K(x_1)}$ – вещественное замыкание простого трансцендентного расширения поля K.

Если γ – не предельный ординал, то $K_\gamma = \overline{K_{\gamma-1}(x_\gamma)}$. Заметим, что если $x_\gamma \in K_{\gamma-1}$, то $K_\gamma = K_{\gamma-1}$.

Если γ – предельный ординал, то $K_\gamma = \overline{\left(\bigcup_{\alpha < \gamma} K_\alpha \right)(x_\gamma)}$.

Полагаем $H = \bigcup_{\gamma \in \beta} K_\gamma$.

Теорема 3.1. Множество H является вещественно замкнутым упорядоченным полем, имеющим симметричное сечение конфинальности β.

Доказательство. Очевидно, что $K \subset H$. По построению $\gamma_1 < \gamma_2 \Rightarrow K_{\gamma_1} \subset K_{\gamma_2}$ и каждое K_γ – вещественно замкнуто. Поэтому $H = \bigcup_{\gamma \in \beta} K_\gamma$ – вещественно замкнутое упорядоченное поле (лемма 2.3).

Так как поле P – вещественно замкнутое, то $H \subset P$.

Сечение (A, B) поля P – симметричное, поэтому (утверждение 2.2) найдётся $t \in \mathbf{R}[[G]] \setminus P$, такой, что $A < t < B$. Элемент t будет порождать симметричное сечение поля H. Обозначим его $(\tilde{A}, \tilde{B})$, по построению $\tilde{A} \subset A$. Так как $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \beta}$ – множество наименьшей мощности, конфинальное A, и $x_\gamma \in \tilde{A}$, то $cf(A, B) = cf(\tilde{A}, \tilde{B}) = \beta$.

Пример. Пусть G – линейно упорядоченная делимая абелева группа, β – регулярный кардинал, $\aleph_0 < \beta < \beta^+ \leq |G|$. Обозначим $K = \mathbf{R}[[G, \beta]]$, $P = \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$.

Пусть $\Gamma = \{g_\gamma\}_{\gamma \in \beta^+}$ – подмножество группы G, такое, что отображение $\gamma \mapsto g_\gamma$ задаёт инверсное подобие кардинала β^+ и множества Γ. Зададим ряд: $t = \sum_{g \in \Gamma} 1g$, $t \in \mathbf{R}[[G]] \setminus P$. Ряд t порождает в поле $P = \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$ сечение конфинальности β^+, обозначим его (A, B).

Для каждого γ, $\beta \leq \gamma < \beta^+$, обозначим через x_γ срезку ряда t с носителем $\operatorname{supp}(x_\gamma) = \{g \in \Gamma \mid g > g_\gamma\}$. Так как мощность $\operatorname{supp}(x_\gamma)$ равна β, каждый ряд x_γ принадлежит полю $P = \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$.

Возрастающая последовательность $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \beta^+}$ конфинальна A.

Поле H из теоремы 3.1 имеет симметричное сечение конфинальности β^+. При этом $\mathbf{R}[[G, \beta]] \subset H \subset \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$.

Остаются открытыми вопросы: будет ли H равно (изоморфно) $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$; существует ли линейно упорядоченное поле с симметричными сечениями разной конфинальности?

Сечение (A, B) упорядоченного поля K называется *фундаментальным*, если $\forall \varepsilon \in K^+ \setminus \{0\} \;\; \exists a \in A \;\; \exists b \in B \quad |b - a| < \varepsilon$.

Замечание. Пусть принимается обобщённая континуум-гипотеза. Если β – регулярный кардинал, $\aleph_0 < \beta < \beta^+ = cf(G) = |G|$, то по следствию 1.7 из теоремы 1.5 об изоморфизме каждое вещественно замкнутое поле с группой архимедовых классов G, в котором каждое симметричное сечение имеет конфинальность β^+, упорядоченно изоморфно полю $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$. Поле H в этом случае будет изоморфно $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$ тогда и только тогда, когда все симметричные сечения в H

будут иметь конфинальность β^+. При этом симметричные фундаментальные сечения всегда имеют конфинальность равную $cf(G)$ [10]. Поэтому для установления изоморфизма полей H и $\mathbf{R}[[G,\beta^+]]$ достаточно исследовать конфинальность только нефундаментальных симметричных сечений поля H.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пестов Г.Г.* Строение упорядоченных полей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980.
2. *Пестов Г.Г.* К теории сечений в упорядоченных полях // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 6. С. 1350–1360.
3. *Пестов Г.Г.* К теории упорядоченных полей и групп: дис. ... докт. физ.-мат. наук. Томск, 2003.
4. *Пестов Г.Г.* Исследования по упорядоченным группам и полям в Томском государственном университете // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 3(15).
5. *Галанова Н.Ю.* Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов и нестандартной вещественной прямой // Алгебра и логика. 2003. Т. 42. № 1. С. 26–36.
6. *Galanova N.Yu.* Symmetric and asymmetric gaps in some fields of formal power series // Serdica Math. 2004. V. 30. P. 495–504.
7. *Galanova N.Y.* An investigation of the fields of bounded formal power series by means of theory of cuts // Acta Appl. Math. 2005. V. 85. P. 121–126.
8. *Dales H.J.*, *Woodin H.* Super real fields. Oxford: Clarenden Press, 1996.
9. *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.
10. *Галанова Н.Ю.*, *Пестов Г.Г.* Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов // Алгебра и логика. Т. 47. № 2. 2008. С. 174–185.

Статья поступила 30.08.2016 г.

Galanova N.Yu. (2017) TOTALLY ORDERED FIELDS WITH SYMMETRIC GAPS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 14–20

DOI 10.17223/19988621/46/2

The paper investigates properties of totally ordered fields with symmetric gaps. Let (A,B) be a gap of an ordered field K. The set A is called long-shore if for all $a \in A$ there exists $a_1 \in A$ such that $(a_1 + (a_1 - a)) \in B$. If both of the shores A and B are long-shore, then the gap (A,B) is called symmetric. We consider under (GCH) a real closed field K, $|K| = |G| = cf(G) = \beta > \aleph_0$, where G is the group of Archimedean classes of K and cofinality of each symmetric gap of K is β. We show that K is order-isomorphic to the field of bounded formal power series $\boldsymbol{R}[[G,\beta]]$. We prove that a gap (A,B) of an ordered field K is symmetric iff $\exists t \in \boldsymbol{R}[[G]] \setminus K$, $A < t < B$, where G is the group of Archimedean classes of K. For any ordered field, with a symmetric gap of cofinality β we construct a subfield, with a symmetric gap of the same cofinality. We consider an example of real closed field H, $\boldsymbol{R}[[G,\beta]] \subset H \subset \boldsymbol{R}[[G,\beta^+]]$, with a symmetric gap of cofinality β^+.

Keywords: totally ordered Abelian group, totally ordered field, field of bounded formal power series, simple transcendental extension of ordered field, real closure, symmetric gap, cofinality of a gap.

GALANOVA Nataliya Yur'evna (Candidate of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail:galanova@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Pestov G.G.(1980) *Stroenie uporyadochennykh poley* [The structure of ordered fields]. Tomsk: TSU publ.
2. Pestov G.G. (2001) On the Theory of Cuts in Ordered Fields. *Sib. Math. J.* 42(6) 1123–1131. DOI: 10.1023/A:1012800828633.
3. Pestov G.G. (2003). K teorii uporyadochennykh poley i grupp [To the theory of ordered fields and groups]. Dis. doct. fiz.-mat. nauk: 01.01.06. Tomsk. 273 p.
4. Pestov G.G. (2011) Issledovaniya po uporyadochennym gruppam i polyam v Tomskom gosudarstvennom universitete [Investigations on ordered groups and fields in Tomsk State University]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 3(15).
5. Galanova N.Yu. (2003) Symmetry of sections in fields of formal power series and non-standard real line. *Algebra and Logic*. 42. pp. 14–19. DOI:10.1023/A:1022672606591.
6. Galanova N.Yu. (2004) Symmetric and asymmetric gaps in some fields of formal power series. *Serdica Math*. 30. pp. 495–504.
7. Galanova N.Y. (2005) An investigation of the fields of bounded formal power series by means of theory of cuts. *Acta Appl. Math*. 85. pp. 121–126. DOI: 10.1007/s10440-004-5593-5.
8. Dales H.J., Woodin H. (1996) *Super real fields*. Oxford: Clarenden Press.
9. Fuchs L.(1963) *Partially ordered algebraic systems*. Oxford: Pergamon Press.
10. Galanova N.Y., Pestov G.G. (2008) Symmetry of cuts in fields of formal power series. *Algebra and Logic*. 47. 2. pp. 100–106. DOI: 10.1007/s10469-008-9001-5.