

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/46/8

Д.Ю. Гаврилов

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ  
БРУСА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ,  
ВЫПОЛНЕННОГО ИЗ МАТЕРИАЛА ПОРИСТОЙ СТРУКТУРЫ  
ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ**

Статья посвящена задаче рационального распределения пористости по высоте сечения нагруженного элемента конструкции при чистом изгибе. Решение такой задачи позволит обеспечить необходимую несущую способность при снижении материалоемкости конструкции. Целью исследования является разработка методики решения задачи чистого изгиба бруса прямоугольного поперечного сечения, выполненного из материала пористой структуры с учетом технических ограничений производства, и получение численного решения задачи.

**Ключевые слова:** *пористость, чистый изгиб, брус.*

Рассмотрим чистый изгиб бруса, выполненного из материала (стали) пористой структуры с переменной по высоте сечения пористостью  $p$ . Ограничимся случаем упругого деформирования, полагая, что максимальные напряжения в бруссе  $\sigma_{\max}$  не превышают предела текучести материала  $\sigma_T$ . Известно, что упругая характеристика материала (модуль Юнга  $E$ ) является функцией пористости материала. Экспериментальные данные, описанные в [1, 2], представлены для пористого железа, изготовленного из порошка марки ПЖМ. Полученные двусторонним прессованием в пресс-формах брикеты спекали при температуре 1470 К в среде водорода в течение 2 ч. После механической обработки образцы подвергали отжигу для снятия наклепа в поверхностном слое и восстановления окислов, образовавшихся в материале от окончания спекания до завершения шлифования. Отжиг производили при температуре 1170 К в среде водорода в течение 1 ч.

На основе представленных выше экспериментальных данных зависимости  $E(p)$  и  $\sigma_T(p)$  могут быть представлены полиномами:

$$E = a_1 + a_2 p + a_3 p^2; \quad (1)$$

$$\sigma_T = c_1 + c_2 p + c_3 p^2. \quad (2)$$

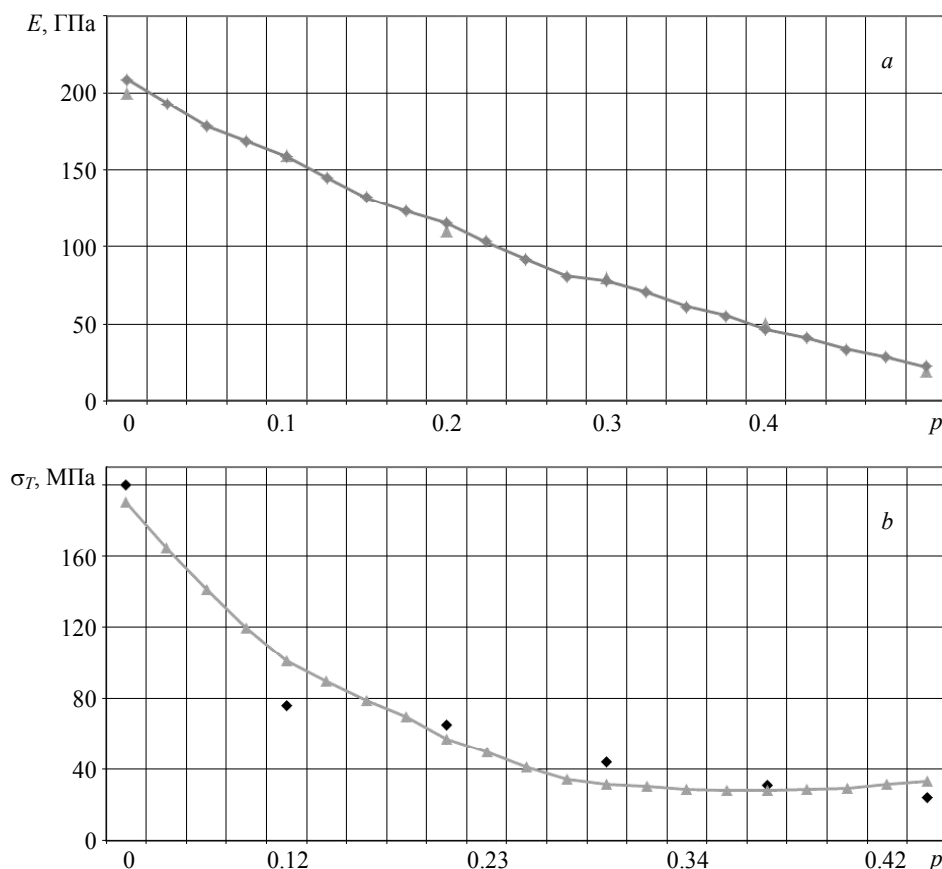
Сглаживая заданную функцию методом наименьших квадратов (МНК), коэффициенты  $a_i, c_i$  найдем с помощью минимизации отклонения сглаживающей функции от заданных точек в некотором среднеинтегральном смысле.

Конечным результатом МНК будут являться значения соответствия  $\sigma_T, E$  пористости в границах от 0 до 0.4. Максимальное значение пористости выбрано из соображения технологических возможностей по изготовлению конструкций.

На рис. 1 представлены графики функций соответственно (1) и (2) при значениях коэффициентов, приведенных в таблице.

Значения коэффициентов аппроксимирующего полинома, МПа

$a_1$	209285,7143	$c_1$	196,0368975
$a_2$	-535000	$c_2$	-645,964465
$a_3$	321428,5714	$c_3$	627,5555095



**Рис. 1а.** Графики зависимости модуля Юнга (а) и нормальных напряжений (б) от пористости  
**Fig. 1a.** Diagrams of Young's modulus (a) and normal stresses (b) as a function of porosity

Положим теперь, что пористость  $p$  меняется по высоте сечения  $y$ :

$$p = p(y), \quad 0 \leq y \leq h/2,$$

где  $y$  – координата высоты полусечения бруса,  $h$  – высота полусечения бруса.

Тогда  $E = E(y)$ , т.е. модуль Юнга есть функция координаты высоты ( $y$ ) поперечного сечения бруса.

Задача изгиба, таким образом, сводится к задаче изгиба бруса, выполненного из неоднородного материала с переменной по высоте сечения упругой характеристикой  $E = E(y)$  и переменным пределом текучести  $\sigma_T = \sigma_T(y)$ .

Обозначим изгибающий момент на брусе через  $M$ . При чистом изгибе бруса соблюдается гипотеза плоских сечений, т.е. сечения после деформаций остаются плоскими и нормальными к оси бруса, а геометрические размеры неизменными.

Соответственно закону Гука при растяжении-сжатии для изогнутого бруса определим закон изменения напряжений по высоте сечения:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$  – максимальная деформация изогнутого бруса.

Величина изгибающего момента в сечении определится по формуле

$$M = 2 \int_0^{h/2} \sigma b y dy, \quad (4)$$

где  $b$  – ширина поперечного сечения бруса

Цель исследования – подобрать такой закон распределения модуля Юнга  $E$  и, следовательно, пористости  $p$  по высоте сечения бруса, чтобы получить максимально возможный изгибающий момент при ограничениях на напряжение  $\sigma \leq \sigma_T$  и на пористость  $p_{\min} \leq p \leq p_{\max}$ , задаваемую техническими возможностями производства.

Данная постановка является сложной задачей линейного программирования, для решения которой используем приближенный подход. Суть приближенного решения заключается в следующем.

Разбиваем полусечение бруса по высоте сечения на  $n$  элементов:  $y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , где  $y_j$  – расстояние от горизонтальной оси сечения до соответствующего слоя с шагом,  $\delta = \frac{h}{2n}$  (рис. 2). В пределах каждого слоя получаем все

характеристики постоянными, меняющимися от слоя к слою.

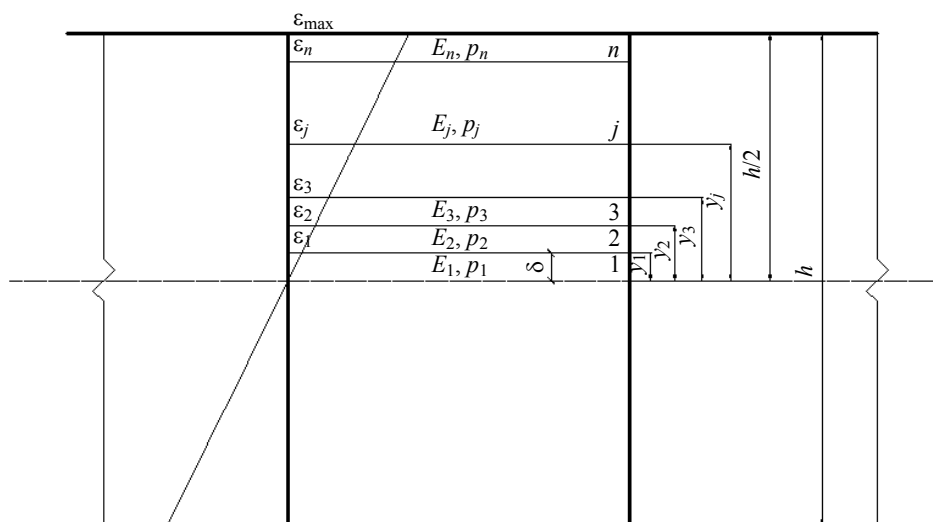


Рис. 2. Схема разбиения сечения бруса по высоте  
Fig. 2. Partitioning scheme of a beam cross section along the height

Соответственно получим

$$y_1 = \delta, \quad y_j = y_{j-1} + \delta, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Максимальные напряжения в слоях будут равны

$$\sigma_j = E_j \varepsilon_j \leq \sigma_{Tj}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Модуль Юнга  $E = E(y_j)$  зависит от расстояния от оси сечения до слоя  $y_j$ , при этом имеем ограничение по напряжению:

$$\sigma \leq \sigma_T(y_j). \quad (6)$$

Поскольку имеем  $E(p)$ ,  $\sigma_T(p)$  в виде зависимостей (1), (2), то из условия (6) получаем

$$\varepsilon_j \{a_1 + a_2 p_j + a_3 p_j^2\} \leq c_1 + c_2 p_j + c_3 p_j^2,$$

где значения коэффициентов  $a$  и  $c$  приведены в таблице,  $p_j$  – пористость в  $j$ -м слое.

Соответственно получаем условие для определения  $p_j$  на высоте  $y_j$ .

$$p_j^2 + p_j \frac{a_2 - \varepsilon_j c_2}{a_3 \varepsilon_j - c_3} + \frac{a_1 \varepsilon_j - c_1}{a_3 \varepsilon_j - c_3} \leq 0. \quad (7)$$

Обращаем неравенство (7) в равенство и решаем его как обыкновенное квадратное уравнение, находя положительный корень. Найденное значение пористости следует согласовать с условием  $p_{\min} \leq p_j \leq p_{\max}$ . В случае выхода искомого значения  $p_j$  за указанные пределы принимаем граничное значение пористости. Найдя пористость  $p_j$ , находим  $E_j$ .

Величина изгибающего момента определится по формуле

$$M \approx 2 \sum_{j=1}^n \sigma_j b \delta y_j = 2 \sum_{j=1}^n E_j \varepsilon_j b \delta y_j. \quad (8)$$

В качестве примера примем  $h = 20$  см,  $n = 20$ ,  $\varepsilon_{\max} = 0.000952381$ ,  $b = 10$  см. Получим значение пористости для каждого элементарного слоя и представим в виде эпюры на рис. 3. Эпюра распределения нормальных напряжений изображена на рис. 4.

Суммарный изгибающий момент, воспринимаемый брусом с распределенной по высоте сечения пористостью, будет равен 3.01 кНм. Стоит отметить, что увеличение числа слоев разбиения бруса будет приводить к уточнению значения вычисленного изгибающего момента.

Для оценки роли пористости при изгибе бруса сравним значение воспринимаемого изгибающего момента в случае изменяющейся по высоте сечения пористости с моментом в случае постоянной (средней) пористости при тех же нагрузках.

Расчетные формулы для момента будут следующие:

Для средней пористости:

$$E_{\text{ср}} = a_1 + a_2 p_{\text{ср}} + a_3 p_{\text{ср}}^2, \quad \sigma_j = E_{\text{ср}} \varepsilon_j,$$

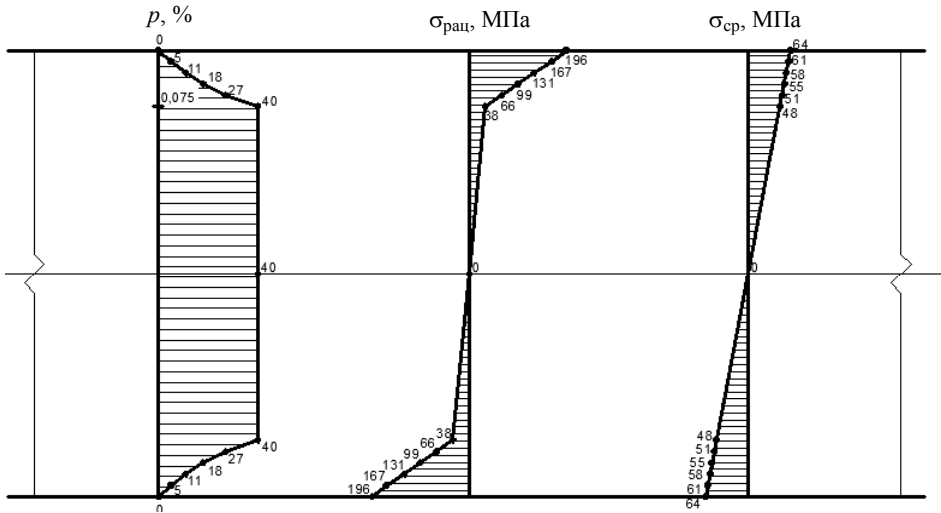
$$M^{(1)} \approx 2 E_{\text{ср}} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j b \delta y_j, \quad (9)$$

где  $E_{cp}$  – значение модуля Юнга, соответствующее средней пористости  $p_{cp} = 0.33$ .  
Для переменной пористости

$$E_{cp} = E(p_j) ,$$

$$M^{(2)} \approx 2 \sum_{j=1}^n E_j \epsilon_j b \delta y_j . \tag{10}$$

В случае если равномерно распределить среднюю пористость  $p_{cp} = 0.33$  по всему поперечному сечению, получим момент равный 1.844 МНм. Эпюра нормальных напряжений в этом случае отражена на рис. 5.



**Рис. 3.** Эпюра значений рационально подобранной пористости  
**Fig. 3.** Plot of values of rationally chosen porosity

**Рис. 4.** Эпюра значений нормальных напряжений при рационально подобранной пористости  
**Fig. 4.** Plot of values of normal stresses at rationally chosen porosity

**Рис. 5.** Эпюра значений нормальных напряжений при средней по сечению пористости  
**Fig. 5.** Plot of the values of normal stresses at average porosity in cross section

Анализируя результат, видим, что момент при изменяемой по высоте сечения пористости выше, чем момент при средней пористости на 63 %.  
Таким образом, аналитически подтверждено, что при варьировании пористости по высоте сечения можно повысить несущую способность бруса при его изгибе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кашталян Ю.А. Характеристики упругих материалов при высоких температурах. Киев: Наукова думка, 1970. 112 с.  
2. Белов С.В. Пористые металлы в машиностроении. М.: Машиностроение, 1981. 247 с.

Gavrilov D.Yu. (2017) THE STRESS STATE OF A RECTANGULAR CROSS SECTION BEAM MADE OF A MATERIAL WITH POROUS STRUCTURE AT PURE BENDING. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 46. pp. 64–69

DOI 10.17223/19988621/46/8

The article is devoted to the problem of rational distribution of porosity along the height of the cross section of a loaded structural element at pure bending. We consider pure bending of the beam which is made of a material (steel) with a porous structure of variable porosity along the height of cross section. The research is limited to the case of an elastic deformation under the assumption that the maximum stress in the beam does not exceed the yield stress of the material. It is known that Young's modulus is a function of material porosity.

The porosity is assumed to be variable along the height of the cross section. Therefore, Young's modulus is also a function of the height coordinate of the beam cross section.

The problem of bending is reduced to the problem of bending of a beam which is made of a heterogeneous material with a variable elastic characteristic along the height of cross section and variable yield stress.

According to Hooke's law, at the tension-compression state of bent beam, the law of stress variation along the height of cross section is determined, which makes it possible to calculate the value of the bending moment.

The aim of the study is to select the distribution law of both Young's modulus and, hence, porosity along the height of beam cross section in order to obtain the greatest possible bending moment under restrictions on the stress and porosity.

A numerical solution of the problem corroborates that the bending moment is 63% higher at rationally chosen porosity than that at average porosity. The results of calculations indicate an optimization of the porosity distribution over the cross section.

Keywords: porosity, pure bending, beam.

GAVRILOV Danila Yur'evich (Saratov State Technical University named after Yuri Gagarin, Saratov, Russian Federation)

E-mail: gavrilovdy@rambler.ru

#### REFERENCES

1. Kashtalyan Yu.A. (1981) *Kharakteristiki uprugikh materialov pri vysokikh temperaturakh* [Characteristics of elastic materials at high temperatures]. Kiev: Naukova dumka.
2. Belov S.V. (1981) *Poristye metally v mashinostroenii* [Porous metals in mechanical engineering]. Moscow: Mashinostroenie.