

**А.Н. Тырсин, А.А. Сурина****МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСКА В МНОГОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ***Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-06-00048).*

Описан подход к моделированию и исследованию риска многомерных стохастических систем. Он основан на гипотезе, которая состоит в том, что риском можно управлять за счет изменения вероятностных свойств компонент системы. При этом систему моделируют в виде случайного вектора. Показано, что данный подход позволяет формулировать оптимизационные задачи минимизации риска. Приведены примеры управления риском для модельных гауссовских случайных векторов.

**Ключевые слова:** риск; стохастическая система; случайный вектор; модель; нормальное распределение.

В последние годы резко возросли масштабы и частота природных катаклизмов, техногенных катастроф, террористических актов и экономических потрясений. Но создание систем, обладающих устойчивостью по отношению к природным, техногенным и преднамеренным катастрофам, невозможно без разработки соответствующего теоретического аппарата в области анализа риска, а также практических методов и средств. Поэтому проблематика исследований в области анализа риска в настоящее время становится одной из актуальных.

В широком смысле под риском понимают возможную опасность какого-либо неблагоприятного исхода. Обычно моделирование риска сводится к выделению опасных исходов, количественному заданию последствий от их наступления и оцениванию вероятностей этих исходов [1. С. 37–43]. При этом вклад компонент многомерной системы объединяют и рассматривают уже одномерную систему как случайную величину [1. С. 148–156; 2. С. 82–87]. Но вопрос взаимного влияния опасных ситуаций, вызванных разными элементами многомерной системы, малоисследован, обычно им пренебрегают, считая разные опасные исходы взаимно независимыми, и также пренебрегают вероятностью их одновременного наступления. Для относительно простых объектов, когда можно априори указать все опасные исходы, при наличии статистической информации или экспертных оценок о шансах их появления в целом данный подход дает приемлемые на практике результаты. Во многих случаях здесь удастся накопить статистический материал для оценивания вероятностей наступления опасных исходов, а форму взаимосвязи между элементами системы считают достаточно простой и описываемой, например, с помощью логико-вероятностных моделей риска [3, 4].

Однако у сложных систем структура взаимодействия между элементами значительно усложняется и часто не может быть описана с помощью логико-вероятностных моделей. Понятия опасных исходов также могут размыться, делая невозможным их конкретное выделение.

Таким образом, несмотря на большое количество исследований в области риска, взаимному влиянию на безопасность сложных многомерных систем ее элементов и различных факторов уделяется недостаточно внимания. Во многих случаях, когда нет возможности явно связать разные факторы риска в виде логико-вероятностной модели, их корреляция при расчете риска не учитывается. Поэтому представляется актуальной научная проблема построения моделей, позволяющих оценивать риск многомерных стохастических систем, элементы которых коррелированы между собой.

**1. Модель риска в многомерных стохастических системах**

Рассмотрим один возможный подход к моделированию риска в многомерных стохастических системах [5]. Имеем некоторую многомерную стохастическую систему  $S$ . Будем считать адекватной ма-

тематической моделью представление этой системы в виде непрерывного случайного вектора [6]. Каждая компонента случайного вектора описывает поведение элемента системы. Взаимосвязанность элементов учтем с помощью коррелированности компонент случайного вектора. Если имеем слишком большую размерность системы, то ее можно сократить. Это можно выполнить, например, с помощью факторного анализа [7. С. 178–237]. В результате имеем модель системы  $S$  в виде случайного вектора  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$  с плотностью вероятности  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ .

В отличие от известного подхода, основанного на выделении конкретных опасных ситуаций [1], будем задавать геометрические области неблагоприятных исходов. Формально эти области могут выглядеть произвольным образом в зависимости от конкретной задачи и определяются на основе имеющейся априорной информации.

Опишем предлагаемый подход, используя распространенную концепцию нежелательных событий как больших и маловероятных отклонений случайной величины относительно математического ожидания. Тогда опасными ситуациями будем считать большие и маловероятные отклонения выборочных значений  $x_{ij}$  любой из компонент  $X_j$  относительно математических ожиданий  $\mu_j = E[X_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Вероятность неблагоприятного исхода для каждой из компонент  $X_j$  без учета влияния других компонент зададим как

$$P(D_j) = P(X_j \in D_j), \quad D_j = \{x : |x - \mu_j| > A_j \sigma_j\},$$

где  $\sigma_j$  – среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X_j$ ,  $A_j$  – заданный пороговый уровень.

Учтем взаимное влияние компонент на появление неблагоприятных исходов в виде величины расстояния исхода относительно точки математических ожиданий всех компонент  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ . Тогда для случайного вектора  $\mathbf{X}$  вероятность неблагоприятного исхода будет равна

$$P(D) = P(\mathbf{X} \in D), \quad D = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) : \sum_{j=1}^m \frac{(x_j - \mu_j)^2}{A_j^2 \sigma_j^2} > 1 \right\}. \quad (1)$$

Заметим, что в (1) область  $D$  неблагоприятных исходов представляет собой внешнюю область  $m$ -осного эллипсоида, у которого полуоси по каждой из координат равны  $A_j \sigma_j$  соответственно, т.е. по каждой  $j$ -й оси эта область соответствует одномерному случаю  $D_j$ . Очевидно, когда исход не лежит на одной из осей, то событие  $D$  может реализоваться и при отсутствии рискованных отклонений по всем компонентам (возможны ситуации  $\mathbf{X} \in D$  и  $\forall j X_j \notin D_j$ ).

Задав функцию последствий от опасных ситуаций в виде  $g(\mathbf{x})$ , получим модель для количественной оценки риска

$$r(\mathbf{X}) = \int \int \dots \int_{R^m} g(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

причем для определенности можно считать, что  $\forall \mathbf{x} \notin D \quad g(\mathbf{x}) = 0$ .

Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда вектор  $\mathbf{X}$  имеет совместное нормальное распределение с плотностью вероятности

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right\}, \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\Sigma}$  – ковариационная матрица,  $\mathbf{a}$  – вектор математических ожиданий.

Зададим размерность вектора  $\mathbf{X}$  от 1 до 5. В [8] введен коэффициент тесноты совместной линейной корреляционной связи компонент случайного вектора  $\mathbf{X}$ , равный

$$D_e(\mathbf{X}) = 1 - |\mathbf{R}_{\mathbf{X}}|^{1/m},$$

где  $|\mathbf{R}_{\mathbf{X}}|$  – определитель корреляционной матрицы случайного вектора  $\mathbf{X}$ . Очевидно, что коэффициент  $0 \leq D_e(\mathbf{X}) \leq 1$ . Рассмотрим предельные случаи:  $D_e(\mathbf{X}) = 0$  (независимость компонент  $X_j$ ),  $D_e(\mathbf{X}) = 1$  (линейная зависимость компонент). Результаты расчета вероятности неблагоприятного исхода (1) приведены на рис. 1. Для наглядности примем  $A_1 = A_2 = \dots = A_m = A$ .

Анализ графиков на рис. 1 говорит о следующем. Увеличение размерности  $m$  и тесноты корреляционной связи между компонентами случайного вектора  $\mathbf{X}$  приводит к резкому росту вероятности неблагоприятного исхода. Причем на рост вероятности неблагоприятного исхода увеличение размерности влияет значительно сильнее, чем увеличение тесноты корреляционной связи.

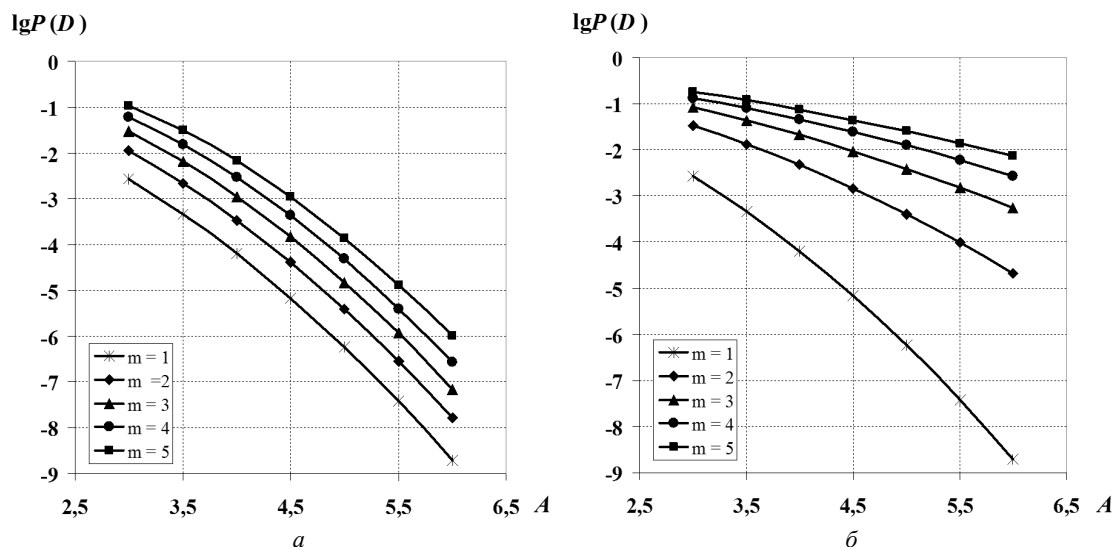


Рис. 1. Зависимости  $\lg P(D)$  от порогового уровня  $A$ :  $a - D_e(\mathbf{X}) = 0$ ;  $b - D_e(\mathbf{X}) = 1$

В качестве иллюстрации на рис. 2 покажем, как меняется с ростом значений  $A$  отношение вероятности  $P(D)$  при коррелированности и некоррелированности компонент случайного вектора  $\mathbf{X}$  размерности  $m = 5$ .

Из этого рисунка видим, что с ростом  $A$  вероятность неблагоприятного исхода у коррелированных систем ( $D_e(\mathbf{X}) \rightarrow 1$ ), по сравнению с некоррелированными ( $D_e(\mathbf{X}) \rightarrow 0$ ), резко возрастает. В частности при  $A = 6$  вероятность, а значит, и риск неблагоприятного исхода более чем в 7 000 раз выше у коррелированной системы по сравнению с некоррелированной.

Таким образом, при моделировании риска в стохастических системах нужно учитывать как фактор многомерности, так и тесноту корреляционных связей.

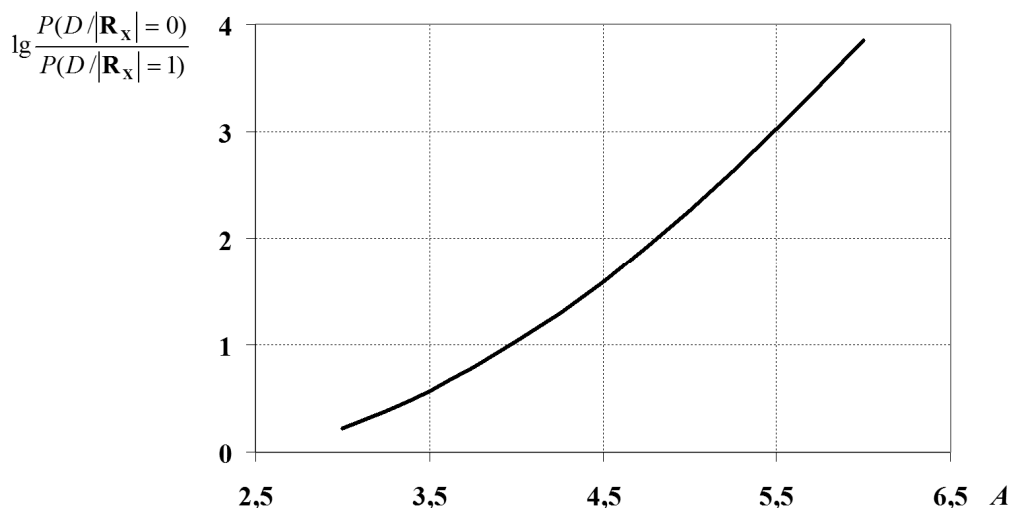


Рис. 2. Отношение вероятности  $P(D)$  при коррелированности и некоррелированности компонент случайного вектора  $\mathbf{X}$  размерности  $m = 5$

Данный подход к моделированию риска позволяет на практике осуществлять управление стохастической системой с целью снижения рисков. Суть такого управления состоит в следующем.

Рассмотрим некоторую  $m$ -мерную гауссовскую стохастическую систему  $S$ . Используем в качестве математической модели этой системы случайный вектор  $\mathbf{X}$  с плотностью вероятности (2).

Задав функцию последствий от опасных ситуаций  $g(\mathbf{x})$  и введя ограничения  $G(\Sigma)$  и  $H(\mathbf{a})$  на допустимые значения параметров плотности  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , сформулируем задачу минимизации риска

$$\begin{cases} r(\mathbf{X}) = \int \int \dots \int_{R^m} g(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \rightarrow \min_{\Sigma, \mathbf{a}}, \\ \Sigma \in G(\Sigma), \mathbf{a} \in H(\mathbf{a}). \end{cases} \quad (3)$$

Варьируя элементы ковариационной матрицы и вектора математических ожиданий случайного вектора  $\mathbf{X}$ , решив задачу (3), получим минимально возможный риск функционирования системы.

## 2. Модельные примеры управления риском для гауссовских случайных векторов

Рассмотрим примеры управления риском для гауссовских случайных векторов.

**Пример 1.** С целью наглядности рассмотрим двумерный гауссовский случайный вектор с плотностью вероятности

$$p_{X_1, X_2}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1-a_1, x_2-a_2)},$$

где  $Q(y_1, y_2) = \frac{1}{1-\rho^2} \left( \frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \right)$ ,  $y_i = x_i - a_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\rho$  – коэффициент корреляции между случайными величинами  $X_1$  и  $X_2$ . Зададим для определенности нулевые математические ожидания и единичные дисперсии. Очевидно, что оси симметрии эллипса рассеяния имеют углы  $45^\circ$  и  $135^\circ$ .

Зададим область неблагоприятных исходов, например, в виде круга единичного радиуса с центром в точке  $(A \cos \theta, A \sin \theta)$ :

$$D = \{(x_1, x_2) : (x_1 - A \cos \theta)^2 + (x_2 - A \sin \theta)^2 \leq 1\}, \quad A = 4.$$

Отметим, что это не противоречит введенной в (1) области неблагоприятных исходов, а лишь является некоторым частным случаем, показывающим на модельном примере, как можно снижать риск для ситуаций, когда неблагоприятные исходы могут находиться также и в относительной близости от области средних значений переменных.

Смоделируем управление риском за счет поворота оси симметрии эллипса рассеяния, который достигается при изменении отношения дисперсий  $\sigma_1^2 / \sigma_2^2$ . Пусть для определенности  $\rho = 0,9$ . Для упрощения моделирования вместо изменения дисперсий будем менять угол поворота  $\theta$  в диапазоне от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ . Очевидно, что максимальная вероятность  $P(D) = P(\mathbf{X} \in D)$  будет, если  $\theta = 45^\circ$ . Результаты расчета приведены на рис. 3.

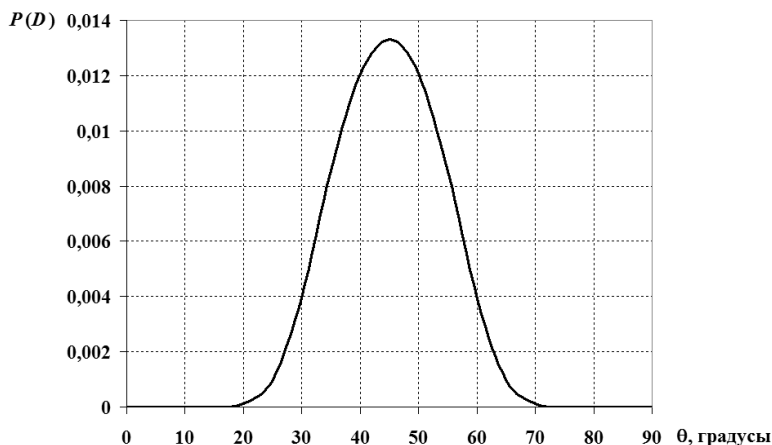


Рис. 3. Расчет вероятности неблагоприятного исхода  $P(D)$  в зависимости от угла поворота  $\theta$  при  $\rho = 0,9$

Далее зафиксируем угол поворота  $\theta = 45^\circ$ , но будем изменять коэффициент корреляции  $\rho$ . Результаты расчета приведены на рис. 4.

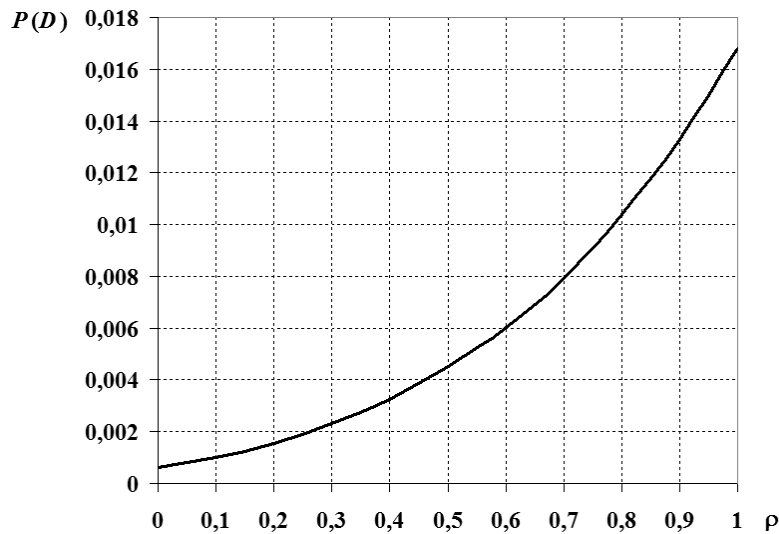


Рис. 4. Расчет вероятности неблагоприятного исхода  $P(D)$  в зависимости от коэффициента корреляции  $\rho$  при  $\theta = 45^\circ$

Смоделируем теперь случай изменения среднего значения одной из случайных величин, например  $X_1$ . Для удобства будем смещать по оси абсцисс центр области  $D$  на величину  $\Delta a_1$ . Результаты расчета представлены на рис. 5.

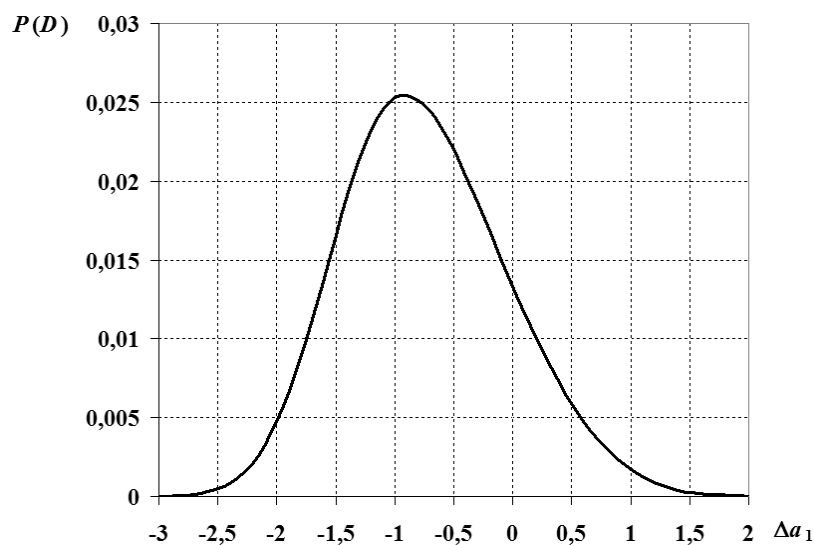


Рис. 5. Расчет вероятности неблагоприятного исхода  $P(D)$  в зависимости от смещения первой координаты центра круга  $D$  при  $\rho = 0,9$  и  $\theta = 45^\circ$

Из графиков на рис. 3–5 видим, что управление на основе задачи (3) позволяет значительно уменьшить вероятность неблагоприятного исхода, а значит, сократить риск функционирования многомерной системы.

В общем случае произвольного распределения компонент случайного вектора  $\mathbf{X}$  достаточно точно оценить совместную плотность вероятности по малой выборке данных затруднительно. Поэтому вместо задачи (3) минимизации риска здесь нужно использовать приближенные методы. Они могут быть по-

строены по следующей схеме. Во-первых, задаем область неблагоприятных исходов  $D = \bigcup_{k=1}^K D_k$  и функцию последствий от опасных ситуаций  $g(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in D$ . Затем вместо плотности вероятности  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  строим некоторую оценочную функцию и на ее основе минимизируем риск по аналогии с задачей (3).

Это можно сделать по-разному. Один из подходов основан на использовании кластерного анализа для выявления наиболее вероятных областей значений случайного вектора  $\mathbf{X}$ . Далее приближенно описывается случайный вектор  $\mathbf{X}$  как дискретная случайная величина в виде набора областей  $G_l$  и соответствующих им вероятностей  $P(G_l)$ ,  $l = 1, \dots, L$ . Затем оценивается риск как

$$r(D) = \sum_{i=1}^L P(G_i) \int_{G_i \cap D} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Другой приближенный метод основан на построении уравнения регрессии

$$\phi(x_1, \dots, x_{m-1}) = E[X_m / X_1 = x_1, \dots, X_{m-1} = x_{m-1}].$$

В частном линейном случае имеем: прямую  $x_2 = b_0 + b_1 x_1$  (для  $m = 2$ ); плоскость  $x_3 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$  (для  $m = 3$ ); гиперплоскость  $x_m = b_0 + \sum_{i=1}^{m-1} b_i x_i$  (для  $m > 3$ ).

Тогда задача (3) минимизации риска может быть представлена как задача построения поверхности  $\phi(x_1, \dots, x_{m-1})$ , наиболее удаленной от области  $D$  для допустимых значений случайного вектора  $\mathbf{X}$ . Проиллюстрируем это на примере.

**Пример 2.** Пусть  $m = 2$  и область  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$  (рис. 6). Считаем, что линия регрессии имеет вид прямой  $x_2 = b_0 + b_1 x_1$ . Эта линия пересекает область  $D_2$ . Минимизацию риска можно в данном случае осуществить по-разному: 1) изменить угол наклона (коэффициент  $b_1$ ) за счет изменения отношения дисперсий  $\sigma_1^2 / \sigma_2^2$  (прямая  $x_2 = b_0 + b_1(\alpha x_1)$ ); 2) выполнить параллельный сдвиг линии регрессии с помощью изменения средних значений случайных величин (прямая  $x_2 = b_0 + b_1(x_1 - \gamma)$ ); 3) уменьшить коэффициент корреляции (пересечение прямой с областью  $D_2$  будет вне допустимых значений случайного вектора  $\mathbf{X}$ ).

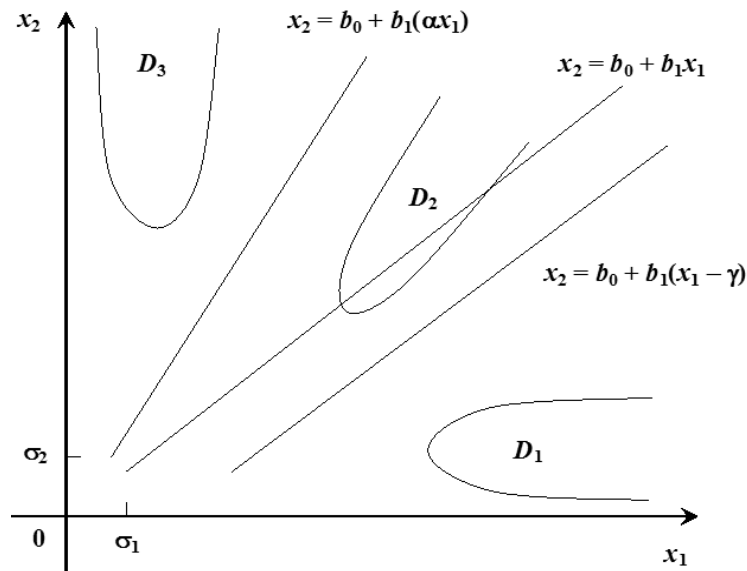


Рис. 6. Пример снижения риска для двумерной стохастической системы

### Заключение

Предложен новый подход к исследованию риска многомерных стохастических систем различной природы. В его основе лежит:

– моделирование стохастической системы в виде многомерной случайной величины;  
– управление риском на основе его минимизации, используя в качестве управляющих переменных числовые характеристики случайного вектора.

Для корректного применения описанной модели риска для сложных систем необходимо в качестве ее компонент использовать существенные факторы, которые объективно отражают причинно-следственные закономерности, протекающие в этих системах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вишняков Я.Д., Радаев Н.Н. Общая теория рисков. 2-е изд., испр. М. : Академия, 2008. 368 с.
2. Акимов В.А., Лесных В.В., Радаев Н.Н. Риски в природе, техносфере, обществе и экономике. М. : Деловой экспресс, 2004. 352 с.
3. Рябинин И.А., Черкесов Г.Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. М. : Радио и связь, 1981. 264 с.
4. Соложенцев Е.Д. Сценарное логико-вероятностное управление риском в бизнесе и технике. 2-е изд. СПб. : Бизнес-пресса, 2004. 432 с.
5. Тырсин А.Н. О моделировании риска в многомерных стохастических системах // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2015. Т. 22, вып. 1. С. 89–90.
6. Тырсин А.Н., Соколова И.С. Энтропийно-вероятностное моделирование гауссовских стохастических систем // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 1. С. 88–102.
7. Дубров А.М., Мхитарян В.С., Трошин Л.И. Многомерные статистические методы. М. : Финансы и статистика, 2003. 352 с.
8. Pena D., Rodriguez J. Descriptive Measures of Multivariate Scatter and Linear Dependence // Journal of Multivariate Analysis. 2003. V. 85. P. 361–374.

**Тырсин Александр Николаевич**, д-р техн. наук. E-mail: at2001@yandex.ru

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (г. Екатеринбург)

**Сурина Альфия Адгамовна**. E-mail: dallila87@mail.ru

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (г. Челябинск)

Поступила в редакцию 30 июня 2016 г.

*Tyrsin Alexander N., Surina Alfiya A.* (Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, South Ural State University (National Research University), Russian Federation).

**Modeling of risk in multidimensional stochastic systems.**

**Keywords:** risk; stochastic system; random vector; model; normal distribution.

DOI: 10.17223/19988605/39/9

In this paper a new approach to modeling and research of risk of multidimensional stochastic systems of various natures is offered. The hypothesis that the risk can be operated due to change of probabilistic properties a component of multidimensional stochastic system is the cornerstone of the offered risk model. At the same time the multidimensional stochastic system is modelled in the form of a random vector with components generally mutually correlated.

The problem of risk minimization for multidimensional stochastic system is formulated. The special case of risk minimization of Gaussian stochastic systems where the operating variables are numerical characteristics of a random vector (a covariance matrix and a vector of expectations) is considered. For arbitrary distributions of the random vector components the approximate algorithms of decrease the risk based on use of the multidimensional statistical analysis methods are proposed. The cluster analysis and the multidimensional regression analysis can be carried to these methods. For Gaussian random vectors calculations of risk for cases uncorrelated and correlated components are given.

Now at research of complex multidimensional systems risk, they do not allocate in an explicitly their components. As showed modeling, unaccounted in an explicit form multidimensionality of system and mutual correlation of its components can lead to significant underestimation of the actual risk.

The paper gives examples of calculations for multidimensional Gaussian random vectors. Dimensions were taken from 1 to 5. The results of calculation of probability of dangerous outcome depending on numerical characteristics of a multidimensional Gaussian random variable (a covariance matrix and a vector of expectations) are given. Different versions of areas of dangerous outcomes are considered.

For correct application of the described risk model for the composite stochastic systems, it is necessary to use as its components essential factors which objective reflect the cause and effect regularities proceeding in these systems.

## REFERENCES

1. Vishnyakov, Ya.D. & Radaev, N.N. (2008) *Obshchaya teoriya riskov* [General theory of risks]. 2nd ed. Moscow: Akademiya.
2. Akimov, V.A., Lesnykh, V.V. & Radaev, N.N. (2004) *Riski v prirode, tekhnosfere, obshchestve i ekonomike* [Risks in the nature, technosphere, society and economics]. Moscow: Delovoy ekspres.

3. Ryabinin, I.A. & Cherkosov, G.N. (1981) *Logiko-veroyatnostnye metody issledovaniya nadezhnosti strukturno-slozhnykh sistem* [Logical-and-probabilistic methods of research of reliability of structurally complex systems]. Moscow: Radio i svyaz'.
4. Solozhentsev, E.D. (2004) *Stsenarnoe logiko-veroyatnostnoe upravlenie riskom v biznese i tekhnike* [Scenario logic and probabilistic management of risk in business and technology]. 2nd ed. St. Petersburg: Biznes-pressa.
5. Tyrsin, A.N. (2015) O modelirovanii riska v mnogomernykh stokhasticheskikh sistemakh [About the risk modeling in multidimensional stochastic systems]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki*. 22(1). pp. 89–90. (In Russian).
6. Tyrsin, A.N. & Sokolova, I.S. (2012) Entropy-probabilistic modeling of Gaussian stochastic systems. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 24(1). pp. 88–102. (In Russian).
7. Dubrov, A.M., Mkhitarian, V.S. & Troshin, L.I. (2003) *Mnogomernye statisticheskie metody* [Multivariate statistical methods]. Moscow: Finansy i statistika.
8. Pena, D. & Rodriguez, J. (2003) Descriptive Measures of Multivariate Scatter and Linear Dependence. *Journal of Multivariate Analysis*. 85. pp. 361–374. DOI: 10.1016/S0047-259X(02)00061-1