

УДК 514.8, 621.8
DOI 10.17223/19988621/47/4

Н.Р. Щербаков, А.А. Щёголева

КАСАНИЕ ОДНОПОЛОСТНЫХ ГИПЕРБОЛОИДОВ ВРАЩЕНИЯ КАК АКСОИДОВ ГИПОИДНОЙ ПЕРЕДАЧИ

Однополостные гиперboloиды вращения являются базовыми поверхностями так называемой гипоидной передачи. Такие механизмы предназначены для передачи вращения между скрещающимися валами и характеризуются повышенной нагрузочной способностью, плавностью хода и бесшумностью работы. Получены условия касания таких гиперboloидов по прямолинейной образующей; доказано, что при заданных величинах смещения осей гиперboloидов и передаточного отношения параметры базовых поверхностей определяются однозначно.

Ключевые слова: *однополостный гиперboloид вращения, смещение осей, передаточное отношение.*

Линейчатые поверхности, фигурирующие в названии статьи, лежат в основе так называемых гипоидных передач, занимающих важное место в большом многообразии зубчатых передаточных механизмов. Главная особенность гипоидной передачи – скрещающиеся оси вращения входной и выходной деталей (традиционные названия этих деталей – «шестерня» и «колесо» соответственно). Такое расположение осей позволяет обеспечить плавность хода, бесшумность работы и повышенную нагрузочную способность механизма. Базовыми поверхностями (*аксоидами*) гипоидной передачи являются однополостные гиперboloиды вращения. Вследствие сложности изготовления, раньше на практике гиперboloиды заменялись конусами. В последние годы, с появлением компьютерных технологий и современных станков с программным управлением, стало возможным проектирование и изготовление гипоидных передач, зубья которых нарезаются на заготовках в форме гиперboloидов. Геометрические аспекты моделирования гипоидной передачи – нахождение условий, когда возможно качение гиперboloидов с касанием по прямолинейной образующей при вращении их вокруг своих осей с соответствующим отношением скоростей. Эти условия на параметры гиперboloидов

$$1) \frac{x^2 + y^2}{a_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} = 1, \quad 2) \frac{x^2 + y^2}{a_2^2} - \frac{z^2}{c_2^2} = 1,$$

($a_1 \neq a_2, c_1 \neq c_2$) известны и приведены, например, в [1–3], а в [4] показано, что для выполнения *комплексного* движения одного аксоида по другому (качение и смещение одного аксоида по другому вдоль общей прямолинейной образующей) должно выполняться условие

$$a_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + c_2^2.$$

В данной работе рассмотрен случай чистого качения гиперboloидов с $a_1 \neq a_2$ и перпендикулярными осями и доказано, что такое качение возможно только при $c_1 = c_2$ (этот факт приведен в [5, с. 209, 286, 287] без строгого доказательства). Эту

ситуацию нельзя получить как частный случай комплексного движения, поскольку, как видно из приведенного выше условия этого движения, при $c_1 = c_2$ получаем $a_1 = a_2$.

Рассмотрим случай, когда аксоидами гипоидной передачи являются однополостные гиперboloиды вращения с взаимно перпендикулярными скрещивающимися осями. Пусть ось аксоида колеса направлена по оси OZ , а ось аксоида шестерни параллельна оси OX . Для того чтобы аксоиды касались по прямолинейной образующей, необходимо, очевидно, чтобы эти поверхности имели по крайней мере одну общую точку. Этого можно добиться, сместив аксоид шестерни в направлении оси OY на величину

$$Sm = a_1 + a_2, \quad (1)$$

где a_1 и a_2 – радиусы горловых линий аксоидов шестерни и колеса соответственно. Тогда обе горловые линии, расположенные в перпендикулярных плоскостях, проходят через точку $A(0, -a_2, 0)$ – рис 1.

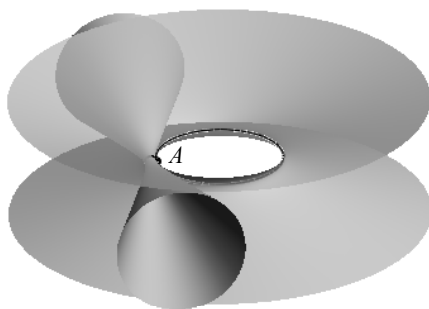


Рис. 1. Расположение аксоидов гипоидной передачи со смещением аксоида шестерни на величину Sm . Обе горловые линии проходят через точку A

Fig. 1. Arrangement of axoids of the hypoid gear with a displacement of the gear-wheel axoid by the quantity Sm . Both the striction lines pass through the point A

Уравнение аксоида шестерни запишем в виде

$$\frac{(y + Sm)^2 + z^2}{a_1^2} - \frac{x^2}{c_1^2} = 1, \quad (2)$$

а уравнение аксоида колеса как

$$\frac{x^2 + y^2}{a_2^2} - \frac{z^2}{c_2^2} = 1. \quad (3)$$

Рассмотрим условия касания гиперboloидов (2) и (3) по прямолинейной образующей. Поскольку точка A принадлежит обеим горловым линиям этих поверхностей, нужно потребовать, чтобы направляющий вектор прямолинейной образующей гиперboloида (2), проходящей через точку A , был коллинеарен направляющему вектору прямолинейной образующей гиперboloида (3), проходящей через эту же точку.

Как известно из курса аналитической геометрии [6, с. 85], направляющие вектора двух прямолинейных образующих гиперboloида вида (3), проходящих через

точку $(x_0, y_0, 0)$ горловой окружности $x^2 + y^2 = a^2$, имеют вид $\{\mp y_0, \pm x_0, c_2\}$. Отсюда получаем векторы двух прямолинейных образующих гиперboloида (3), проходящих через точку его горловой линии $A(0, -a_2, 0)$:

$$\{\pm a_2, 0, c_2\}. \quad (4)$$

Для гиперboloида (2), с учетом того, что его ось перпендикулярна оси гиперboloида (3), получаем векторы двух прямолинейных образующих, проходящих через точку его горловой линии $A'(0, -a_1, 0)$:

$$\{\pm c_1, 0, a_1\}. \quad (5)$$

Здесь, естественно, не учтен параллельный сдвиг аксоида шестерни на величину Sm , как не влияющий на координаты определяемых векторов. После этого сдвига точка A' совпадает с точкой A .

Условия коллинеарности 4 пар векторов из (4), (5)

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \pm a_2 & 0 & c_2 \\ \pm c_1 & 0 & a_1 \end{pmatrix} = 1$$

приводят к единственному соотношению между параметрами гиперboloидов, когда эта коллинеарность возможна:

$$a_1 a_2 = c_1 c_2. \quad (6)$$

Таким образом, при выполнении условия (6), прямолинейная образующая гиперboloида шестерни (2) с направляющим вектором $I_1(c_1, 0, a_1)$ совпадает с прямолинейной образующей гиперboloида колеса (3) с направляющим вектором $I_2(a_2, 0, c_2)$ (конечно, если обе эти образующие взяты в общей точке A горловых линий гиперboloидов). Однако этого условия (6) недостаточно, чтобы гиперboloиды касались друг друга в точках этой общей прямолинейной образующей, т.е. имели в этих точках общие касательные плоскости. Последнее будет иметь место (как указано в [5, с. 287]), только если $c_1 = c_2$. Докажем это (в [5] доказательство не приводится).

Обозначим через γ_k угол между общей прямолинейной образующей гиперboloидов и осью вращения шестерни (параллельна оси OX), а через Γ_k – угол между этой образующей и осью вращения колеса (ось OZ). Передаточное отношение i гипоидной передачи равно отношению синусов этих углов [1, с. 70]:

$$i = \frac{\sin \gamma_k}{\sin \Gamma_k}. \quad (7)$$

Так как оси аксоидов перпендикулярны, а вектор общей прямолинейной образующей лежит в плоскости, параллельной этим осям, то $\gamma_k + \Gamma_k = \frac{\pi}{2}$, то есть $\sin \Gamma_k = \cos \gamma_k$. Учитывая координаты вектора общей прямолинейной образующей $-I_1(c_1, 0, a_1)$, находим

$$\cos \gamma_k = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + a_1^2}}, \quad \sin \gamma_k = \frac{a_1}{\sqrt{c_1^2 + a_1^2}}.$$

В итоге из (7) получаем

$$i = \frac{a_1}{c_1}. \quad (8)$$

С другой стороны, передаточное отношение i равно отношению радиусов окружностей сечения гиперболоидов шестерни (до сдвига) и колеса сферой некоторого радиуса R с центром в начале координат (основная теорема теории зацеплений). Обозначим эти радиусы r_1 (для шестерни) и r_2 (для колеса) и выразим эти величины через параметры гиперболоидов и радиус сферы. Уравнения окружностей сечения для колеса имеют вид

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r_2^2, \\z &= \sqrt{R^2 - r_2^2}.\end{aligned}$$

Подставляя правые части этих уравнений в (3), получаем

$$\frac{r_2^2}{a_2^2} - \frac{R^2 - r_2^2}{c_2^2} = 1,$$

откуда
$$r_2^2 = (R^2 + c_2^2) \frac{a_2^2}{c_2^2 + a_2^2}. \quad (9)$$

Аналогично, для радиуса окружности сечения гиперболоида шестерни (до сдвига) сферой радиуса R получаем

$$r_1^2 = (R^2 + c_1^2) \frac{a_1^2}{c_1^2 + a_1^2}. \quad (10)$$

Теперь поделим (10) на (9), заменим в левой части $\frac{r_1}{r_2}$ на i , а правую часть преобразуем с учетом (6). В результате имеем

$$i^2 = \frac{(R^2 + c_1^2) a_1^2}{(R^2 + c_2^2) c_1^2}. \quad (11)$$

Отсюда в силу (8) следует, что $c_1 = c_2$. На рис. 2 изображены гиперболоиды шестерни и колеса, ограниченные сферой радиуса R и касающиеся по прямолинейной образующей.

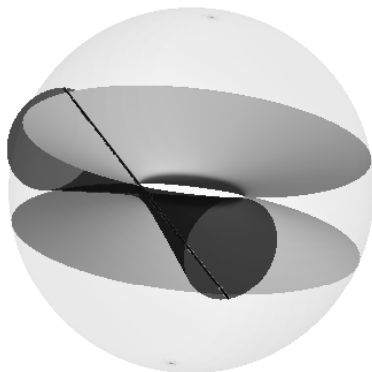


Рис. 2. Касание аксоидов гипоидной передачи по прямолинейной образующей
Fig. 2. Tangency of axoids of the hypoid gear along a rectilinear generator

Обозначим

$$c_1 = c_2 = c, \quad (12)$$

тогда соотношение (6) принимает вид

$$a_1 a_2 = c^2, \quad (13)$$

а соотношение (11), с учетом (12) и (13), примет следующий вид:

$$i^2 = \frac{a_1}{a_2}. \quad (14)$$

Теперь из (1), (14) и (13) можно выразить a_1 , a_2 и c через i и Sm :

$$a_1 = \frac{i^2 Sm}{i^2 + 1}, \quad a_2 = \frac{Sm}{i^2 + 1}, \quad c = \frac{i Sm}{i^2 + 1}.$$

Таким образом, доказана

Теорема. Параметры a_1 , a_2 , c однополостных гиперболоидов вращения, являющихся аксоидами гипоидной передачи, полностью определяются величинами i (передаточное отношение) и Sm (расстояние между перпендикулярными осями).

Из соотношения (14) получаем

Следствие. Отношение радиусов горловых окружностей аксоидов гипоидной передачи равно квадрату передаточного отношения.

Это утверждение доказано другим способом в [1, с. 71].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильдгабер Э. Основы зацепления конических и гипоидных передач М.: Машгиз, 1946, 173 с.
2. Радзевич С.П. Векторное представление зубчатых пар. Часть 1 // Теория механизмов и машин. 2008. Т. 6. № 2. С. 74–81. URL: http://tmm.spbstu.ru/12/radzevich_12.pdf
3. Nosko P., Shyshov V., Ratov D., Fill P., Lysenko A. Helical gear train load capacity criterion // Teka. 2010. V. 14. No. 1. P. 182–190.
4. Rachkovskaya, G.S., Kharabayev, Yu.N. Geometric modeling and computer graphics of kinematic ruled surfaces on the base of complex movingone axoid along another (one-sheet hyperboloid of revolution as fixed and moving axoids) // Proceedings of the 17th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision 2009, Plzen, Czech Republic, 2009. P. 31–34. URL: http://wscg.zcu.cz/DL/wscg_DL.htm (доступ свободный).
5. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981. С. 285.
6. Делоне Б.Н., Райков Д.А. Аналитическая геометрия. Т. 2. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 516 с.

Статья поступила 25.02.2017 г.

Shcherbakov N.R., Shchegoleva A.A. (2017) TANGENCY OF ONE-SHEETED HYPERBOLOIDS AS AXOIDS OF THE HYPOID GEARING. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 37–42

DOI 10.17223/19988621/47/4

One-sheeted hyperboloids of revolution are basic surfaces (axoids) of the input and output details of hypoid gears occupying a prominent place in the large variety of gear trains. The main feature of the hypoid gear is the skew axes of rotation. Such arrangement of the axes allows one to provide the smoothness of movement, quietness of the operation, and higher load capacity of the mechanism. In this work, geometrical aspects of modeling the hypoid gear with perpendicular axes are considered, namely, (i) for parameters of the hyperboloids, the condition providing the existence of a common rectilinear generator passing through a common point of their striction

lines has been found; (ii) using this condition, an original proof of the following well-known fact has been obtained: rolling of hyperboloids with tangency along a rectilinear generator when they rotate about their axis with the corresponding ratio of velocities is possible only if the imaginary axes of the rotating hyperbolas forming the hyperboloids are equal; (iii) it has been proved that, at given displacements of the axes and gearing ratio, parameters of the hyperboloids are determined uniquely.

Keywords: one-sheeted hyperboloids of revolution, displacement of axes, gearing ratio.

SHCHERBAKOV Nikolay Romanovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: nrs@math.tsu.ru

SHCHEGOLEVA Anastasija Andreevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: nschegoleva@sibmail.com

REFERENCES

1. Wildhaber E. (1948) *Osnovy zatsepleniya konicheskikh i gipoidnykh peredach* [Foundations of conical and hypoid gearing]. Moscow: Mashgiz.
2. Radzevich S.P. (2008) Vektornoe predstavlenie zubchatykh par. Chast 1 [Vector representation of gear pairs]. *Teoriya mekhanizmov i mashin*. V. 6. No. 2. pp. 74–81. http://tmm.spbstu.ru/12/radzevich_12.pdf
3. Nosko P., Shyshov V., Ratov D., Fill P., Lysenko A. (2010) Helical gear train load capacity criterion. *Teka*. 14(1). pp. 182–190.
4. Rachkovskaya G.S., Kharabayev Yu.N. (2009) Geometric modeling and computer graphics of kinematic ruled surfaces on the base of complex moving one axoid along another (one-sheet hyperboloid of revolution as fixed and moving axoids). *Proceedings of the 17-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision 2009, Plzen, Czech Republic, 2009*. pp. 31–34. URL: http://wscg.zcu.cz/DL/wscg_DL.htm
5. Hilbert D., Cohn-Vossen S. (1938) *Anschauliche Geometrie*. Berlin: Verlag von Julius Springer.
6. Delone B., Raykov D. (1949) *Analyticheskaya geometriya* [Analytical geometry]. V. II. Moscow; Leningrad: GOSTEKHIZDAT