

## МЕХАНИКА

УДК 539.374

DOI 10.17223/19988621/47/5

Д.В. Гоцев, Н.С. Перунов

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ПОРИСТЫМ НАПОЛНИТЕЛЕМ

Построена математическая модель, описывающая напряженно-деформированное состояние двухслойного неоднородного цилиндрического тела, находящегося под действием равномерно сжимающих нагрузок с учетом пористой структуры внутреннего слоя. Построение модели проводилось в рамках плоской деформации. Определена зависимость внешних сжимающих нагрузок, при которых начальная пористость материала достигает во всем слое своего нулевого значения; выведены аналитические выражения для нахождения напряженно-деформированных состояний в каждом слое. В качестве условий совместности на границе раздела слоев выбирались условия непрерывности радиальной компоненты напряжений и перемещений.

**Ключевые слова:** пористые материалы, неоднородное цилиндрическое тело при сжатии, напряженно-деформированное состояние.

При добыче полезных ископаемых должно быть пройдено большое количество вертикальных и горизонтальных шахтных стволов, которые являются долговременными и дорогостоящими инженерными сооружениями, жизненно важными для функционирования шахты в целом. Состояние горных выработок в зависимости от их назначения должно удовлетворять различным требованиям, основным из которых является обеспечение безопасных условий для работающих людей. В связи с этим возникают требования по проведению укрепительных работ горных выработок и подземных сооружений, то есть создание крепежных конструкций – крепей. Крепи могут быть монолитными или многослойными. Разрушение крепи подземной конструкции может произойти в результате следующих двух ситуаций: 1) достижение напряженно-деформированным состоянием (далее НДС) критических значений, соответствующих разрушению материалов конструкции; 2) достижение напряженно-деформированным состоянием критических значений, соответствующих потере устойчивости (отказу) крепи.

Решение первой задачи основано на сравнении найденного (в аналитическом или численном виде) НДС с предельными характеристиками, соответствующими разрушению материала конструкции. Во втором случае начальным этапом решения задачи устойчивости является нахождение в аналитическом виде основного НДС конструкции. В связи с этим получение аналитических соотношений, описывающих докритическое НДС в аналитической форме, является актуальной задачей.

В настоящей работе решается задача определения НДС двухслойного цилиндрического тела, находящегося под действием сжимающих нагрузок интенсивностями  $q_b$  и  $q_a$ , равномерно распределенных по внешнему и внутреннему контурам тела соответственно (рис. 1). Материал внешнего слоя будем моделировать упругим сжимаемым телом с параметрами Ламе  $\lambda_1, \mu_1$ . Деформирование материала внутреннего слоя, имеющего пористую структуру, разделим на два этапа [1, 2]. Первый этап – деформирование среды при наличии несжатых пор, второй – деформирование сжатого скелета. На первом этапе в качестве модели материала принимается модель упругого сжимаемого тела с параметрами Ламе  $\lambda_2, \mu_2$ , на втором – модель упругой несжимаемой среды с модулем сдвига  $\mu = \mu_2 + \mu_3$ . Согласно работе [3], в качестве условия полного сжатия пор в некоторой точке среды выбирается условие равенства объемной деформации в этой точке величине  $\varepsilon_0$  – начального раствора пор. Обозначим радиус внешней границы  $b$ , внутренней границы  $a$ , радиус границы контакта слоев –  $c$ .

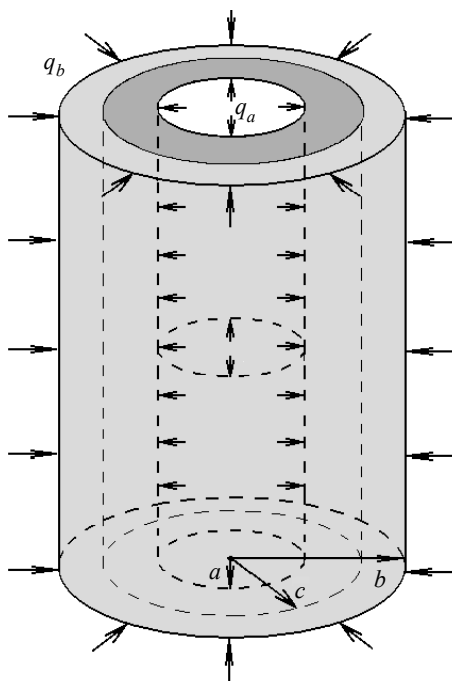


Рис. 1. Постановка задачи  
Fig. 1. Formulation of the problem

На первом этапе деформирования НДС в рамках плоской деформации ( $\varepsilon_z = 0$ ) в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  будем использовать следующие соотношения геометрически линейной теории.

Уравнение равновесия:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0. \quad (1)$$

Соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (2)$$

Закон Гука для внешнего слоя :

$$\sigma_r^{(1)} = (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_r^{(1)} + \lambda_1\varepsilon_\theta^{(1)}, \quad \sigma_\theta^{(1)} = \lambda_1\varepsilon_r^{(1)} + (\lambda_1 + \mu_1)\varepsilon_\theta^{(1)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \lambda_1(\varepsilon_r^{(1)} + \varepsilon_\theta^{(1)}). \quad (3)$$

Связь между напряжениями и деформациями для внутреннего слоя :

$$\sigma_r^{(2)} = (\lambda_2 + 2\mu_2)\varepsilon_r^{(2)} + \lambda_2\varepsilon_\theta^{(2)}, \quad \sigma_\theta^{(2)} = \lambda_2\varepsilon_r^{(2)} + (\lambda_2 + \mu_2)\varepsilon_\theta^{(2)}, \quad \sigma_z^{(2)} = \lambda_2(\varepsilon_r^{(2)} + \varepsilon_\theta^{(2)}). \quad (4)$$

Условие наличия несхлопнутых пор для внутреннего слоя:

$$-(\varepsilon_r^{(2)} + \varepsilon_\theta^{(2)}) < \varepsilon_0. \quad (5)$$

Граничные условия на внешнем и внутреннем контурах запишем соответственно в виде

$$\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=b} = -q_b, \quad \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=a} = -q_a. \quad (6)$$

Здесь в (1) – (6) и далее  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$  – главные компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно,  $u$  – радиальная составляющая вектора перемещений, индекс (1) вверху компонент напряжений, деформаций и перемещений обозначает их принадлежность к внешнему слою, индекс (2) – к внутреннему слою, отсутствие верхних индексов у указанных величин обозначает их принадлежность как к внутреннему, так и к внешнему слоям сферического тела.

Из решения системы (1) – (6) получим следующие НДС:

- для внутреннего слоя

$$u^{(2)} = C_3 r + \frac{C_4}{r}, \quad \varepsilon_r^{(2)} = C_3 - \frac{C_4}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta^{(2)} = C_3 + \frac{C_4}{r^2},$$

$$\sigma_r^{(2)} = 2C_3(\lambda_2 + \mu_2) - 2\mu_2 \frac{C_4}{r^2}, \quad \sigma_\theta^{(2)} = 2(\lambda_2 + \mu_2)C_3 + 2\mu_2 \frac{C_4}{r^2}, \quad \sigma_z^{(2)} = 2\lambda_2 C_3; \quad (7)$$

- для внешнего слоя

$$u^{(1)} = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \varepsilon_r^{(1)} = C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta^{(1)} = C_1 + \frac{C_2}{r^2},$$

$$\sigma_r^{(1)} = 2C_1(\lambda_1 + \mu_1) - 2\mu_1 \frac{C_2}{r^2}, \quad \sigma_\theta^{(1)} = 2C_1(\lambda_1 + \mu_1) + \mu_1 \frac{C_2}{r^2}, \quad \sigma_z^{(1)} = 2\lambda_1 C_1, \quad (8)$$

где константы интегрирования  $C_1, C_2, C_3, C_4$  находятся из следующей системы граничных условий и условий совместности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=a} = -q_a, \\ \sigma_r^{(1)}\Big|_{r=b} = -q_b, \\ \sigma_r^{(1)}\Big|_{r=c} = \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=c}, \\ u^{(1)}\Big|_{r=c} = u^{(2)}\Big|_{r=c}, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(\lambda_2 + \mu_2)C_3 - 2\mu_2 \frac{C_4}{a^2} = -q_a, \\ 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - 2\mu_1 \frac{C_2}{b^2} = -q_b, \\ 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - 2\mu_1 \frac{C_2}{c^2} = 2(\lambda_2 + \mu_2)C_3 - 2\mu_2 \frac{C_4}{c^2}, \\ C_1 c + \frac{C_2}{c} = C_3 c + \frac{C_4}{c}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Решая систему (9), получим

$$C_4 = \frac{1}{(BA-P)} \left( \frac{b^2 c^2 (-q_b + q_a)}{2\mu_1 (c^2 - b^2)} A + \frac{q_b c}{2(\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{-q_a c}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \right),$$

$$C_2 = \frac{b^2 c^2 (q_b - q_a)}{2\mu_1 (c^2 - b^2)} + BC_4,$$

$$C_3 = \frac{1}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \left( -q_a + 2\mu_2 \frac{C_4}{a^2} \right), \quad C_1 = \frac{1}{2(\lambda_1 + \mu_1)} \left( -q_b + 2\mu_1 \frac{C_2}{b^2} \right), \quad (10)$$

$$A = \frac{\mu_1 c}{b^2 (\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{1}{c}, \quad B = \frac{\mu_2 b^2 (c^2 - a^2)}{\mu_1 a^2 (c^2 - b^2)}, \quad P = \frac{c\mu_2}{a^2 (\lambda_2 + \mu_2)} - \frac{1}{c}.$$

Объемная деформация на этом этапе для внутреннего слоя согласно (7) определится в форме

$$\varepsilon_r^{(2)} + \varepsilon_\theta^{(2)} = 2C_3.$$

Тогда условие наличия в теле не полностью сжатых пор запишется в виде

$$-\frac{1}{(\lambda_2 + \mu_2)} \left( -q_a + 2\mu_2 \frac{C_4}{a^2} \right) < \varepsilon_0. \quad (11)$$

Следовательно, схлопывание пор произойдет одновременно во всем внутреннем слое, когда внешняя и внутренняя нагрузки будут удовлетворять условию

$$-\frac{1}{(\lambda_2 + \mu_2)} \left( -q_a + 2\mu_2 \frac{C_4}{a^2} \right) \geq \varepsilon_0. \quad (12)$$

На втором этапе деформирования, то есть при выполнении условия (12), НДС будем моделировать соотношениями (1), (2), присоединяя к ним граничные условия (6), реологические соотношения (3) для внешнего слоя и соотношения

$$s_r = 2\mu\varepsilon_r^{(2)} - 2\mu_3\varepsilon_r^{(0)} + \frac{2}{3}\mu_2\varepsilon_0, \quad s_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta^{(2)} - 2\mu_3\varepsilon_\theta^{(0)} + \frac{2}{3}\mu_2\varepsilon_0, \quad s_z = \frac{2}{3}\mu_2\varepsilon_0 \quad (13)$$

для внутреннего.

Здесь в (13) и далее  $\mu = \mu_2 + \mu_3$ ,  $s$  – девиатор тензора напряжений,  $\varepsilon_r^{(0)}$ ,  $\varepsilon_\theta^{(0)}$  деформации внутреннего слоя на момент полного сжатия пор, которые определяются из соотношений (7), (10), (11) при переходе в (11) к равенству.

Из решения системы (1) – (3), (6), (13) при условии (12) получим следующие НДС:

- для внешнего слоя

$$u^{(1)} = D_3 r + \frac{D_4}{r}, \quad \varepsilon_r^{(1)} = D_3 - \frac{D_4}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta^{(1)} = D_3 + \frac{D_4}{r^2},$$

$$\sigma_r^{(1)} = 2D_3 (\lambda_1 + \mu_1) - 2\mu_1 \frac{D_4}{r^2}, \quad \sigma_\theta^{(1)} = 2D_3 (\lambda_1 + \mu_1) + 2\mu_1 \frac{D_4}{r^2}, \quad \sigma_z^{(1)} = 2\lambda_1 D_3; \quad (14)$$

- для внутреннего слоя

$$\begin{aligned}
 u^{(2)} &= D_1 r + \frac{D_2}{r} - \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{2r\mu} (1 + 4 \ln r), \\
 \varepsilon_r^{(2)} &= D_1 - \frac{D_2}{r^2} + \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{2r^2\mu} (4 \ln r - 3), \quad \varepsilon_\theta^{(2)} = D_1 + \frac{D_2}{r^2} - \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{2r^2\mu} (1 + 4 \ln r), \\
 \sigma_r^{(2)} &= \lambda_2 \varepsilon_\theta + 2\mu \left( D_1 - \frac{D_2}{r^2} \right) - 2\mu_3 C_3^{(0)} + \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{r^2} (4 \ln r - 1), \\
 \sigma_\theta^n &= \lambda_2 \varepsilon_\theta + 2\mu \left( D_1 + \frac{D_2}{r^2} \right) - 2\mu_3 C_3^{(0)} - \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{r^2} (4 \ln r - 1), \\
 \sigma_z^{(2)} &= \lambda_1 \left( 2D_1 - \frac{2\mu_3 C_4^{(0)}}{r^2\mu} \right), \tag{15}
 \end{aligned}$$

где константы  $C_3^{(0)}$ ,  $C_4^{(0)}$  определяются соотношениями (10), в которых среда рассмотрена на момент полного сжатия пор, и имеют вид

$$C_3^{(0)} = -\frac{\varepsilon_0}{2}, \quad C_4^{(0)} = \frac{a^2 (q_a - \varepsilon_0 (\lambda_2 + \mu_2))}{2\mu_2}; \tag{16}$$

константы интегрирования  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$  находятся из следующей системы граничных условий и условий совместности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=a} = -q_a, \\ \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=b} = -q_b, \\ \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=c} = \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=c}, \\ u^{(1)} \Big|_{r=c} = u^{(2)} \Big|_{r=c}, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 \varepsilon_\theta + 2\mu \left( D_1 - \frac{D_2}{a^2} \right) - 2\mu_3 C_3^{(0)} + \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{a^2} (4 \ln a - 1) = -q_a, \\ 2D_3 (\lambda_1 + \mu_1) - 2\mu_1 \frac{D_4}{b^2} = -q_b, \\ \lambda_2 \varepsilon_\theta + 2\mu \left( D_1 - \frac{D_2}{c^2} \right) - 2\mu_3 C_3^{(0)} + \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{c^2} (4 \ln c - 1) = \\ = 2D_3 (\lambda_1 + \mu_1) - 2\mu_1 \frac{D_4}{c^2}, \\ D_1 c + \frac{D_2}{c} - \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{2c\mu} (1 + 4 \ln c) = D_3 c + \frac{D_4}{c}, \end{array} \right.$$

разрешив которую получим константы интегрирования:

$$\begin{aligned}
 D_4 &= \frac{1}{M} \left( \frac{-q_b c}{2(\lambda_1 + \mu_1)} - Q - c \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) TK \right), \\
 D_2 &= K \left( 2\mu_1 D_4 \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) + T \right), \\
 D_1 &= \frac{1}{2(\mu_2 + \mu_3)} \left( -q_a - \frac{\mu_3 C_4^{(0)}}{a^2} (4 \ln a - 1) + 2\mu_3 C_3 - \lambda_2 \varepsilon_0 \right) + \frac{D_2}{a^2}, \\
 D_3 &= \frac{1}{2(\lambda_1 + \mu_1)} \left( -q_b + 2\mu_1 \frac{D_4}{b^2} \right), \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$\text{где } K = \frac{a^2 c^2}{2\mu(c^2 - a^2)}, T = q_a - q_b + \mu_3 C_4 \left( \frac{1}{a^2} (4 \ln a - 1) - \frac{1}{c^2} (4 \ln c - 1) \right),$$

$$Q = \frac{c}{2\mu} \left( -q_a - \mu_3 C_4 \left( \frac{1}{a^2} (4 \ln a - 1) - \frac{1}{c^2} (1 + 4 \ln c) \right) + 2\mu_3 C_3 - \lambda_2 \varepsilon_0 \right),$$

$$M = 2\mu_1 c K \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) - \frac{\mu_1 c}{b^2 (\lambda_1 + \mu_1)} - \frac{1}{c}.$$

Таким образом, НДС двухслойного цилиндрического тела на этапе упругого деформирования пористого материала внутреннего слоя, то есть при реализации условия (11), определяется соотношениями (7), (8), (10), а на этапе упругого деформирования сжатого скелета внутреннего слоя (при выполнении условия (12)) – формулами (15) – (17).

Полученные в данной работе аналитические соотношения, описывающие НДС двухслойного цилиндрического тела при действии сжимающих нагрузок, могут быть использованы в качестве основного докритического состояния при решении задач устойчивости многослойных крепей цилиндрических шахтных стволов горных выработок, находящихся под действием всестороннего равномерного сжатия в случае упругой работы материалов.

При проведении численного эксперимента все соотношения приводились к безразмерному виду, при этом величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к величине  $\mu_1$ , а имеющие размерность длины – к радиусу  $b$ .

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 2 и 3.

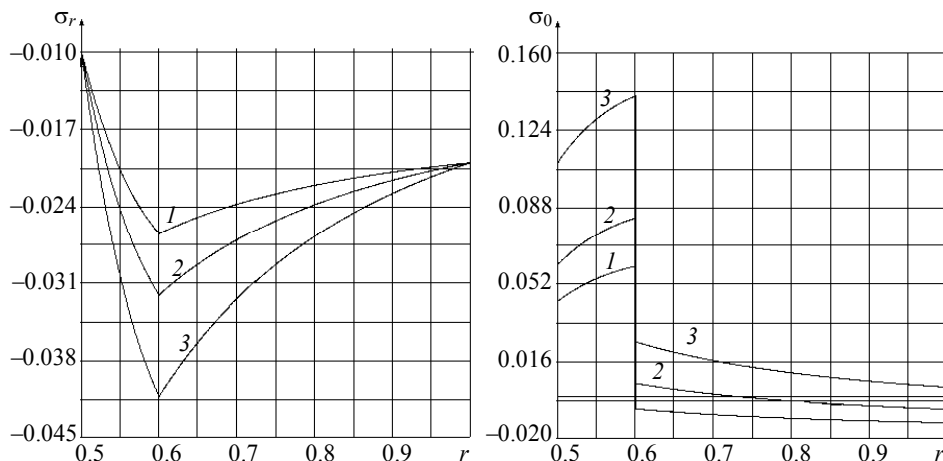
На рис. 2 кривые 1 соответствуют  $\mu_3 = 1.5$ , кривые 2 –  $\mu_3 = 2$ , кривые 3 –  $\mu_3 = 3$ .

На рис. 3 кривые 1 соответствуют  $\lambda_2 = 2$ , кривые 2 –  $\lambda_2 = 4$ , кривые 3 –  $\lambda_2 = 6$ .

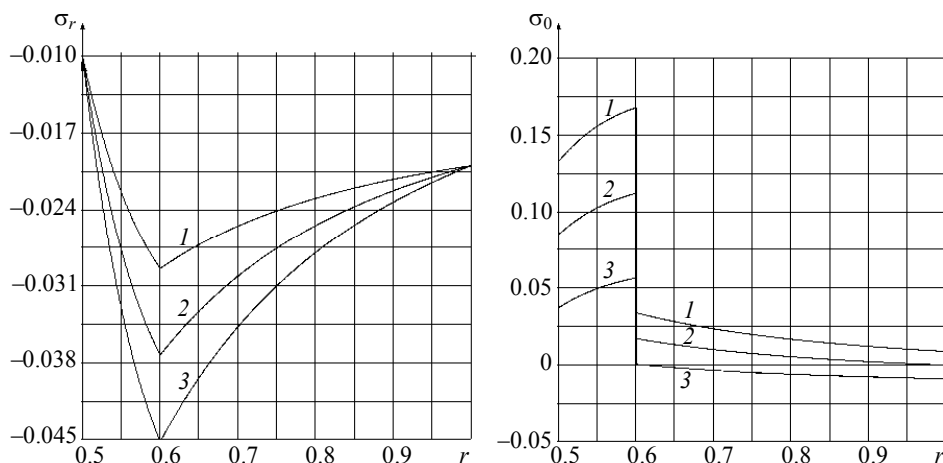
Безразмерные значения других физико-механических и геометрических параметров, если не оговорено особо, брались следующими  $q_a = 0.01$ ,  $q_b = 0.02$ ,  $a = 0.5$ ,  $c = 0.6$ ,  $b = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 0.02$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 5$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $\mu_3 = 3$ .

Таким образом, в работе построена математическая модель для описания напряженно-деформированного состояния двухслойного цилиндрического тела с учетом пористой структуры внутреннего слоя при упругой работе материалов. В рамках предложенного подхода к деформированию пористых сред получены аналитические соотношения, описывающие НДС двухслойного цилиндрического тела, находящегося под действием всестороннего равномерного сжатия, на этапах упругого сжатия пор и упругого деформирования тела с полностью сжатой матрицей. При этом из анализа решений следует, что как при увеличении величины  $\mu_3$ , характеризующего изменения модуля сдвига пористого слоя после полного схлопывания пор, так и с ростом  $\lambda_2$  – параметра Ламе – характеризующего пористый слой на первом этапе деформирования, радиальные сжимающие напряжения увеличиваются.

Выведена зависимость между внешней и внутренней нагрузками, необходимыми для полного сжатия пор во всей области внутреннего слоя.



**Рис. 2.** Зависимость напряжений от координаты при деформировании сжатого скелета  
**Fig. 2.** Addition stresses from the coordinate during the deformation of the compressed skeleton



**Рис. 3.** Зависимость напряжений от координаты при деформировании сжатого скелета  
**Fig. 3.** Addition stresses from the coordinate during the deformation of the compressed skeleton

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 368 с.
2. Гоцев Д.В., Спорыхин А.Н. Метод возмущений в задачах устойчивости подкрепленных горных выработок. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2010. 299 с.
3. Гоцев Д.В., Бунтов А.Е., Перунов Н.С. Математическое моделирование напряженно-деформированных состояний пористых цилиндрических и сферических тел при сжатии с учетом неупругого поведения сжатого скелета // Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы» / Чувашский гос. пед. ун-т, 2015. С. 91–99.

Статья поступила 04.11.2016 г.

Gotsev D.V., Perunov N.S.(2017) MATHEMATICAL MODEL OF THE STRESS-STRAIN STATE OF AN ELASTIC CYLINDRICAL BODY WITH A POROUS FILLER. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 43–50

DOI 10.17223/19988621/47/5

The mathematical model of intense deformed state of two-layer cylindrical body under uniform compressive loads considering the porous structure of inner layer was defined. Building a mathematical model describing the stress field and displacement field for a cylindrical body was carried out considering a plane strain. Deformation of the porous environment caused by evenly distributed squeezing pressure is divided into two stages: deformation of the porous environment and deformation of the squeezed matrix. In the first stage the material model was assumed compressible elastic body model, the second – the model of elastic incompressible medium. As a full compression condition at a certain point of the medium at this point was assumed equality volumetric strain a given value – the initial pore size, characterizing the pore volume of the sample in the non-deformed state. Squeezing pressure, under which the initial porosity of material in the whole layer reaches zero value, is defined. At the first and second stage of the deformation process, the analytical expressions of fields of tension, strain and displacements in the inner and external layer are defined. As the compatibility conditions at the interface between layers selected terms the continuity of the radial component of the stress and displacements. Consider the nature of influence of the elastic constants of the material both internal and external layer on the distribution of the stress field.

Keywords: Keywords: porous materials, heterogeneous cylindrical body under compressive load, the intense deformed state.

*GOTSEV Dmitry Viktorovich* (Doctor of Physics and Mathematics,  
Voronezh State University, Voronezh, Russia)  
E-mail: rbgotsev@mail.ru

*PERUNOV Nikolay Sergeevich* (Voronezh State University, Voronezh, Russia)  
E-mail: perunovnikolays@gmail.com

#### REFERENCES

1. Sadovskaya O.V. (2008) *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh mekhaniki sypuchikh sred* [Mathematical modeling in problems of mechanics of loose environments]. M.: FIZMATLIT.
2. Gotsev D.V. (2010) *Metod vozmucheniy v zadachah ustoichivosti podkreplennih gornih vira-batok* [Metod of indignations in problems of stability of the supported excavations]. Voronezh: Voronezh State University.
3. Gotsev D.V. (2015) *Matematicheskoe modelirovanie naprigenno-deformirovannih sostoiniy poristih chilindricheskix i sfericheskix tel pri sgotii s uchetom neuprugogo povedenia sgotogo skeletal* [Mathematical modeling of stress-strain states porous cylindrical and spherical bodies in compression considering inelastic behavior of compressed skeleton]. *Proceedings of All-Russian Scientific School-Conference «Mechanics Limit State and Related Issues»*. Chuvash State Pedagogical University. pp. 91–99.