

УДК 531.555  
 DOI 10.17223/19988621/47/7

С.А. Королев, А.М. Липанов, И.Г. Русяк

### К ВОПРОСУ О ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ

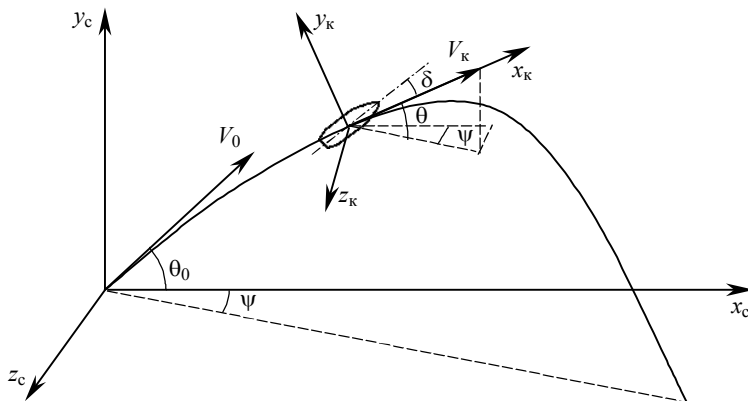
Статья посвящена исследованию возможности повышения точности решения прямой задачи внешней баллистики за счет решения более полной системы уравнений движения метаемого тела (снаряда) и расчета аэродинамических коэффициентов сил и моментов на основе моделирования гидродинамики его обтекания.

**Ключевые слова:** *внешняя баллистика, траектория, аэродинамические коэффициенты, уравнения Навье – Стокса, модель турбулентности, численный метод, точность решения задачи.*

Точность решения прямой задачи внешней баллистики зависит от полноты факторов, учитываемых при моделировании [1–3]. В частности, от учета вращения и колебаний относительно центра масс, точности определения аэродинамических коэффициентов метаемых тел, точности задания метеоусловий, точности используемых численных методов и др. В статье представлена математическая модель внешней баллистики снаряда и методика расчета траектории на основе решения более полной системы уравнений движения, учитывающей вращение и колебания относительно центра масс и использующей аэродинамические коэффициенты сил и моментов, рассчитанные на основе моделирования гидродинамики обтекания снаряда.

#### Методика решения траекторной задачи

Траектория движения снаряда строится в стартовой системе координат  $Ox_c y_c z_c$ , связанной с точкой расположения орудия и ориентированной по направлению стрельбы (рис. 1).



**Рис. 1.** Ориентация стартовой ( $Ox_c y_c z_c$ ) и траекторной ( $Ox_k y_k z_k$ ) систем координат  
**Fig. 1.** Orientation of the launch ( $Ox_c y_c z_c$ ) and flight path ( $Ox_k y_k z_k$ ) coordinate systems

Координаты центра масс снаряда определяются уравнениями [1]

$$\begin{aligned}\frac{dx_c}{dt} &= V_k \cos \theta \cos \psi, \\ \frac{dy_c}{dt} &= V_k \sin \theta, \\ \frac{dz_c}{dt} &= -V_k \cos \theta \sin \psi,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x_c$  – дальность;  $y_c$  – высота полета;  $z_c$  – боковое отклонение;  $\theta$  – угол наклона траектории;  $\psi$  – угол направления;  $V_k$  – скорость центра масс снаряда.

Параметры движения снаряда определяются в траекторной системе координат  $Ox_k y_k z_k$ , связанной с центром масс снаряда и ориентированной по вектору скорости (рис. 1):

$$\frac{dV_k}{dt} = -g \sin \theta - \frac{C_{x_k} q S_M}{m};\tag{2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{V_k} - \frac{C_{y_k} q S_M}{m V_k} + \frac{d\theta_g}{dt};\tag{3}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{C_{z_k} q S_M}{m V_k \cos \theta} + \frac{d\psi_g}{dt}.\tag{4}$$

Здесь  $g$  – ускорение силы тяжести;  $C_{x_k}, C_{y_k}, C_{z_k}$  – коэффициенты составляющих аэ-

родинамической силы по осям траекторной системы координат;  $q = \frac{\rho M^2 a^2}{2}$  – ско-

ростной напор воздуха;  $M$  – число Маха;  $a$  – скорость звука в воздухе;  $S_M = \frac{\pi d^2}{4}$  –

площадь миделевого сечения снаряда;  $d$  – калибр снаряда;  $m$  – масса снаряда;  $\theta_g, \psi_g$  – поправки, связанные с учетом геофизических параметров Земли [4].

Для вращающегося снаряда аксиальная скорость определяется из уравнения

$$\frac{d\omega_x}{dt} = -\frac{m_x q S_M l}{I_x},\tag{5}$$

где  $m_x$  – коэффициент аэродинамического аксиального демпфирующего момента (момента трения);  $l$  – длина снаряда;  $I_x$  – аксиальный момент инерции снаряда.

В процессе движения по траектории под действием различных возмущающих факторов снаряд совершает колебания относительно центра масс. Положение оси симметрии снаряда относительно вектора скорости определяется пространственным углом нутации  $\delta$ . Горизонтальная  $\delta_1$  и вертикальная  $\delta_2$  составляющие угла нутации снаряда определяются из системы дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_1}{dt} &= \frac{\omega_1 - \psi \cos(\theta + \delta_2) - \dot{\theta} \delta_1 \delta_2}{\cos \delta_2}, \\ \frac{d\delta_2}{dt} &= \omega_2 - \psi \sin \theta \delta_1 - \dot{\theta} \cos \delta_1,\end{aligned}\tag{6}$$

Для определения горизонтальной  $\omega_1$  и вертикальной  $\omega_2$  составляющих экваториальной угловой скорости снаряда решается система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{m_1 q S_M l - I_x \omega_x \omega_2}{I_z}, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{m_2 q S_M l + I_x \omega_x \omega_1}{I_z}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $m_1, m_2$  – коэффициенты горизонтальной и вертикальной составляющих аэродинамического момента;  $I_z$  – экваториальный центральный момент инерции снаряда.

Коэффициенты составляющих аэродинамической силы в уравнениях (2) – (4) определяются выражениями

$$\begin{aligned} C_{x_k} &= C_x^a(M, \alpha), \\ C_{y_k} &= -C_y^a(M, \alpha_2) + C_z^a(\bar{\omega}_x, \alpha_1), \\ C_{z_k} &= -C_y^a(M, \alpha_1) - C_z^a(\bar{\omega}_x, \alpha_2), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$  – пространственный угол атаки;  $\alpha_1, \alpha_2$  – горизонтальная и вертикальная составляющие угла атаки;  $\bar{\omega}_x = \frac{\omega_x l}{Ma}$  – безразмерная аксиальная угловая скорость;  $C_x^a(M, \alpha), C_y^a(M, \alpha), C_z^a(\bar{\omega}_x, \alpha)$  – аппроксимационные зависимости коэффициентов силы сопротивления в системе координат, связанной с осью симметрии снаряда, где ось  $x$  направлена вдоль оси симметрии, ось  $y$  – лежит в плоскости сопротивления, образуемой осью симметрии и вектором скорости, при этом ось  $z$  образует правую тройку векторов.

Коэффициент аэродинамического аксиального демпфирующего момента в уравнении (5) и коэффициенты горизонтальной и вертикальной составляющих аэродинамического момента, используемые в системе уравнений (7), рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} m_x &= m_x^a(M, \bar{\omega}_x), \\ m_1 &= m_z^a(M, \alpha_1) + m_y^a(M, \alpha_2, \bar{\omega}_x), \\ m_2 &= m_z^a(M, \alpha_2) - m_y^a(M, \alpha_1, \bar{\omega}_x), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $m_x^a(M, \bar{\omega}_x), m_y^a(M, \alpha, \bar{\omega}_x), m_z^a(M, \alpha)$  – аппроксимационные зависимости коэффициентов составляющих момента аэродинамической силы в системе координат, связанной с осью симметрии снаряда.

Составляющие пространственного угла атаки  $\alpha_1, \alpha_2$  связаны с составляющими угла нутации  $\delta_1, \delta_2$  соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \delta_1 - \varepsilon_{w_1}, \\ \alpha_2 &= \delta_2 - \varepsilon_{w_2}, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_{w_1}, \varepsilon_{w_2}$  – составляющие угла сноса ветром.

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) – (7) применяется метод Рунге – Кутты – Вернера 6-го порядка точности с контролем погрешности интегрирования [5].

### Методика расчета аэродинамических коэффициентов метаемых тел

Для расчета аэродинамических сил и моментов, действующих на снаряд, применен подход, основанный на численном моделировании обтекания снаряда потоком воздуха. При этом решались уравнения Навье – Стокса, осредненных по Фавру (FANS), с использованием полуэмпирической модели турбулентности [6]. Такой подход не требует значительных вычислительных ресурсов, что позволяет рассчитать аэродинамические характеристики обтекания исследуемых тел в широком диапазоне параметров.

Система уравнений Навье – Стокса нестационарного вязкого теплопроводного течения, осредненных по Фавру, имеет вид [7]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} e = -\nabla p \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q},$$

где  $\rho$  – плотность газа;  $\mathbf{v}$  – вектор скорости;  $t$  – время;  $p$  – давление;  $\boldsymbol{\tau}$  – тензор вязких напряжений;  $\mathbf{f}$  – вектор внешних сил, например силы тяжести;

$e = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)} \frac{p}{\rho}$  – полная энергия;  $\gamma$  – показатель адиабаты;  $\mathbf{q}$  – вектор теплового потока.

Рассматривается идеальный газ, для которого справедливо уравнение состояния Менделеева – Клапейрона:

$$p = \rho R T,$$

где  $R$  – удельная газовая постоянная,  $T$  – абсолютная температура.

Для турбулентного течения сжимаемого газа компоненты тензора вязких напряжений находятся с помощью выражения

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij},$$

где  $\mu = \mu_m + \mu_t$  – эффективная вязкость, определяемая как сумма молекулярной и турбулентной составляющих;  $u_i$  – компоненты вектора скорости по координатным направлениям  $x_i$ , осредненные по Фавру;  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  – единичный тензор.

В качестве модели турбулентности выбрана  $(k - \varepsilon)$ -модель, которая с учетом слагаемых, связанных с влиянием эффекта сжимаемости, имеет вид [8]

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu_m + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \mu_t S^2 - Y_M - \rho \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu_m + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \mu_t S^2 - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (11)$$

где, согласно [9], примем  $C_\mu = 0.09$ ,  $C_{1\varepsilon} = 1.44$ ,  $C_{2\varepsilon} = 1.92$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ .

Источниковый член в уравнениях (11), учитывающий сжимаемость, определяется по модели Саркара [10]:

$$Y_M = 2\rho\varepsilon M_t^2,$$

где  $M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}}$  – турбулентное число Маха;  $a = \sqrt{\gamma RT}$  – скорость звука.

Выше через  $S^2$  обозначена сумма

$$S^2 = 2s_{11}^2 + 2s_{22}^2 + 2s_{33}^2 + (s_{12} + s_{21})^2 + (s_{13} + s_{31})^2 + (s_{23} + s_{32})^2,$$

где  $s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  – компоненты тензора скоростей деформации.

Для определения турбулентной составляющей динамической вязкости используется выражение

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Описанный выше подход решения задачи обтекания снаряда реализован с помощью модуля расчета динамики жидкостей и газов Fluent программного пакета ANSYS 15.0.

Исследование аэродинамических характеристик снарядов проводилось в следующем диапазоне изменения параметров: числа Маха  $M = 0.5-5.0$ ; углы атаки  $\alpha = 0-20^\circ$ ; скорости вращения снаряда  $\omega_x = 500-2000$  рад/с. По результатам численного эксперимента для исследуемого метаемого тела с помощью метода наименьших квадратов строились аппроксимационные зависимости для коэффициентов аэродинамической силы и моментов, используемые в выражениях (8), (9).

Аппроксимационные зависимости для коэффициентов аэродинамической силы, с учетом анализа значимости коэффициентов уравнений регрессии имеют вид [3]

$$\begin{aligned} C_x^a(M, \alpha) &= a_{x0} + a_{x1}M + a_{x2}M^2 + a_{x3}M^3 + a_{x4}\alpha^2, \\ C_y^a(M, \alpha) &= a_{y0} + a_{y1}\alpha + a_{y2}\alpha^3 + a_{y3}M\alpha + a_{y4}M^2\alpha, \\ C_z^a(\bar{\omega}_x, \alpha) &= a_{z0} + a_{z1}\alpha + a_{z2}\alpha^2 + a_{z3}\bar{\omega}_x\alpha + a_{z4}\bar{\omega}_x\alpha^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Соответствующие аппроксимационные зависимости для коэффициентов момента записываются как

$$\begin{aligned} m_x^a(M, \bar{\omega}_x) &= (b_{x0} + b_{x1}M + b_{x2}M^2)\bar{\omega}_x, \\ m_y^a(M, \alpha, \bar{\omega}_x) &= (b_{y0} + b_{y1}M + b_{y2}M^2)(\alpha + b_{y3}\alpha^2)\bar{\omega}_x, \\ m_z^a(M, \alpha) &= (b_{z0} + b_{z1}M + b_{z2}M^2)\alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $a_{xi}$ ,  $a_{yi}$ ,  $a_{zi}$ ,  $b_{xi}$ ,  $b_{yi}$ ,  $b_{zi}$  – коэффициенты уравнений регрессии. Погрешность аппроксимации расчетных данных не превышает 1 %.

### Исследование точности решения траекторной задачи

В методике, описанной в [4], используются законы сопротивления воздуха 1943 и 1958 гг., полученные на основе обработки экспериментальных данных для эталонных форм снарядов. Закон сопротивления воздуха 1943 г. справедлив для снарядов, стабилизируемых вращением, а закон сопротивления 1958 г. – для оперенных снарядов. При этом решается система уравнений движения центра масс снаряда. Боковое отклонение в результате действия гироскопических и аэродинамических сил для снаряда задается эмпирической дериационной функцией.

Исследование влияния учитываемых факторов на решение траекторной задачи рассматривалось для трех типов снарядов: осколочно-фугасный вращающийся снаряд калибра 152 мм ( $i_{x43} = 1.0$ ) (ОФ 152 мм); осколочно-фугасный оперенный снаряд калибра 125 мм ( $i_{x58} = 1.0$ ) (ОФ 125 мм); бронебойно-подкалиберный оперенный снаряд калибра 125 мм ( $i_{x58} = 1.7$ ) (БП 125 мм), где  $i_{x43}$ ,  $i_{x58}$  – эмпирические коэффициенты формы, используемые для корректировки законов сопротивления воздуха 1943 и 1958 гг. соответственно, применительно к данному типу снаряда.

На рис. 2 представлены зависимости коэффициента лобового сопротивления  $C_x$  от числа Маха для рассматриваемых снарядов, а также зависимости, построенные по законам сопротивления 1943 г. и 1958 г. Как видно из рис. 2, *а*, расчетная зависимость для осколочно-фугасного снаряда калибра 152 мм качественно согласуется с законом сопротивления 1943 г., при этом в рабочем диапазоне на участке  $0.5 < M < 3.0$  отличие достигает 12–15 %, но для сверхзвукового участка  $M > 3.0$  наблюдается существенное отличие данных зависимостей. Для оперенных снарядов калибра 125 мм (см. рис. 2, *б*, *в*) наблюдается качественное и количественное соответствие расчетных кривых коэффициента  $C_x$  с законом сопротивления 1958 г. При этом в рабочем диапазоне для осколочно-фугасного снаряда  $0.5 < M < 3.0$  расхождение кривых составляет 5–10 %, в рабочем диапазоне для бронебойно-подкалиберного снаряда  $3.0 < M < 5.0$  расхождение кривых 7–10 %.

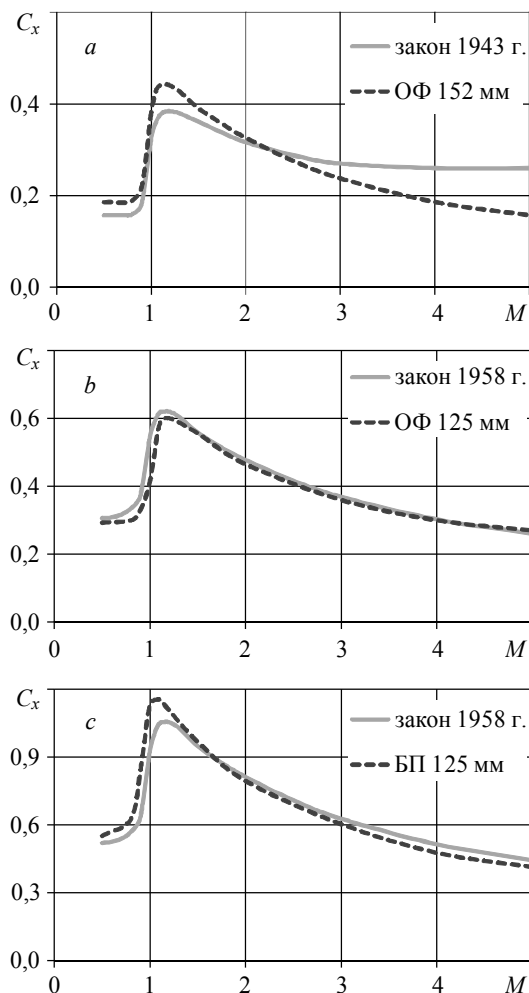
При расчете траектории движения снарядов рассматривались следующие подходы к решению задачи. В первом случае решалась система уравнений движения центра масс снаряда с использованием лобового аэродинамического сопротивления по законам 1943 или 1958 г. и дериационной функции для расчета бокового отклонения в случае вращающегося снаряда. Во втором случае решалась полная система уравнений движения снаряда с учетом колебаний относительно центра масс, при этом использовались зависимости для полного набора аэродинамических коэффициентов (12), (13), полученные на основе моделирования обтекания снаряда.

Для осколочно-фугасного снаряда калибра 152 мм проводились траекторные расчеты для диапазона начальных скоростей  $V_0 = 680–945$  м/с и углов стрельбы  $\theta_0 = 5–52^\circ$ . Результаты расчета параметров траектории ( $X$  – дальность,  $Z$  – боковое отклонение) с использованием различных подходов к решению задачи представлены в табл. 1.

На рис. 3 представлены результаты расчета траекторий снаряда ОФ 152 мм для угла стрельбы  $\theta_0 = 25^\circ$  и начальных скоростей  $V_0 = 680$  и  $945$  м/с.

Анализ полученных результатов показывает, что для скорости  $V_0 = 680$  м/с отклонение по дальности достигает 800 м, а для  $V_0 = 945$  м/с максимальное отклонение составляет лишь 250 м. Этот результат объясняется более полной компенсацией отклонений за счет пересечения зависимостей для коэффициента  $C_x$

(см. рис. 2, *a*) при больших числах Маха. Расчеты показывают, что колебания рассматриваемого снаряда, вызванные начальными возмущениями, затухают. Учет колебаний снаряда относительно центра масс позволяет уточнить результаты расчета. Так, при начальном возмущении  $\delta = 0.5^\circ$ , влияние колебаний снаряда составляет 70–100 м. Отличие бокового отклонения, рассчитанного с помощью рассматриваемых подходов к решению задачи, в зависимости от параметров выстрела, может составлять 200 – 250 м (см. табл. 1).

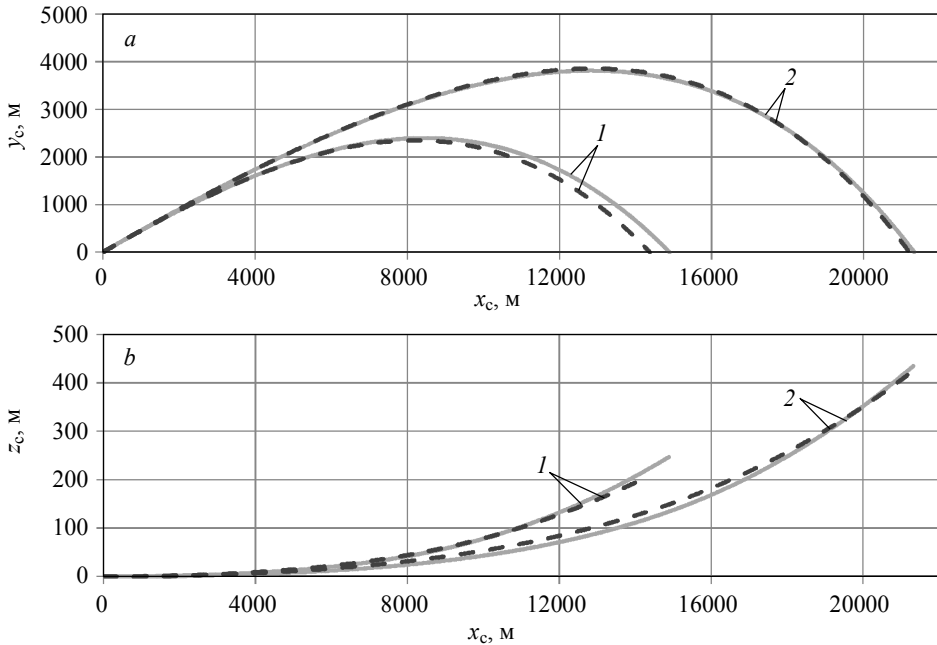


**Рис. 2.** Зависимости коэффициента лобового сопротивления  $C_x$  от числа Маха: *a* – для осколочно-фугасного вращающегося снаряда ( $i_{x43} = 1.0$ ); *b* – для осколочно-фугасного оперенного снаряда ( $i_{x58} = 1.0$ ); *c* – для бронебойно-подкалиберного снаряда ( $i_{x58} = 1.7$ )

**Fig. 2.** Drag coefficient  $C_x$  as a function of the Mach number: in the case of (*a*) high explosive rotating projectile ( $i_{x43} = 1.0$ ), (*b*) high explosive feathered projectile ( $i_{x58} = 1.0$ ), and (*c*) armor-piercing subcaliber projectile ( $i_{x58} = 1.7$ )

Результаты расчета параметров траектории снаряда ОФ 152 мм

Начальные условия	$\theta_0$ , град	5	25	52
		$V_0$ , м/с	680–945	
Уравнения движения центра масс снаряда. Закон сопротивления 1943 г.	$X$ , м	5860–9575	14895–21330	17720–26265
	$Z$ , м	17.2–35.5	247–435	849–1426
Полная система уравнений движения. Расчетная модель сопротивления	$X$ , м	5795–9720	14375–21200	16925–26010
	$Z$ , м	18.7–45.5	208–417	598–1219



**Рис. 3.** Проекция траекторий снаряда ОФ 152 мм на плоскости  $Ox_c y_c$  (а) и  $Ox_c z_c$  (б): 1 – начальная скорость  $V_0 = 680$  м/с; 2 – начальная скорость  $V_0 = 945$  м/с; сплошная линия – закон сопротивления 1943 года; штриховая – расчетная модель сопротивления

**Fig. 3.** Projections of the projectile OF 152 mm trajectory on the plane  $Ox_c y_c$  (a) and  $Ox_c z_c$  (b): 1, initial velocity  $V_0 = 680$  m/s; 2, initial velocity  $V_0 = 945$  m/s; solid line indicates resistance law of 1943; dashed line, computational resistance model

Для осколочно-фугасного оперенного снаряда калибра 125 мм проводились траекторные расчеты для диапазона начальных скоростей  $V_0 = 600$ –870 м/с и углов стрельбы  $\theta_0 = 5$ –25°. Результаты расчета параметров траектории с использованием различных подходов к решению задачи представлены в табл. 2.

На рис. 4 представлены результаты расчета траектории снаряда ОФ 125 мм для угла стрельбы  $\theta_0 = 15^\circ$  и начальных скоростей  $V_0 = 600$  и 870 м/с.

В данном случае различие результатов для всего диапазона параметров по дальности не превосходит 125 м. По боковому отклонению максимальное различие результатов составляет 6 м. Лучшее соответствие результатов, полученных с использованием различных подходов к решению задачи, объясняется более близ-

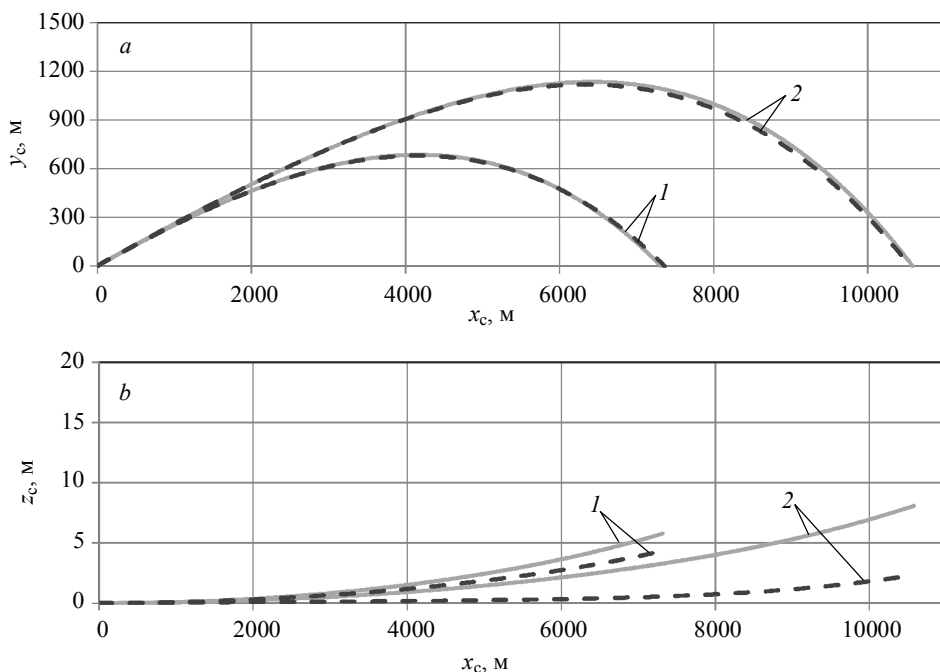


ким расположением соответствующих зависимостей для коэффициента  $C_x$  (см. рис. 2, *b*). При начальном возмущении  $\delta = 0.5^\circ$  влияние колебаний снаряда составляет 20 – 25 м.

Таблица 2

Результаты расчета параметров траектории снаряда ОФ 125 мм

Начальные условия	$\theta_0$ , град	5	15	25
		$V_0$ , м/с	600–870	
Уравнения движения центра масс снаряда. Закон сопротивления 1958 г.	$X$ , м	3910–6470	7365–10655	9380–13040
	$Z$ , м	1.60–2.86	5.78–8.09	9.43–12.17
Полная система уравнений движения. Расчетная модель сопротивления	$X$ , м	3875–6380	7415–10620	9505–13075
	$Z$ , м	0.81–1.28	2.31–4.40	3.07–6.94



**Рис. 4.** Проекция траекторий снаряда ОФ 125 мм на плоскость  $Ox_c y_c$  (*a*) и  $Ox_c z_c$  (*b*): 1 – начальная скорость  $V_0 = 600$  м/с; 2 – начальная скорость  $V_0 = 870$  м/с; сплошная линия – закон сопротивления 1958 года; штриховая – расчетная модель сопротивления

**Fig. 4.** Projections of the projectile OF 125 mm trajectory on the plane  $Ox_c y_c$  (*a*) and  $Ox_c z_c$  (*b*): 1, initial velocity  $V_0 = 600$  m/s; 2, initial velocity  $V_0 = 870$  m/s; solid line indicates resistance law of 1958; dashed line, computational resistance model

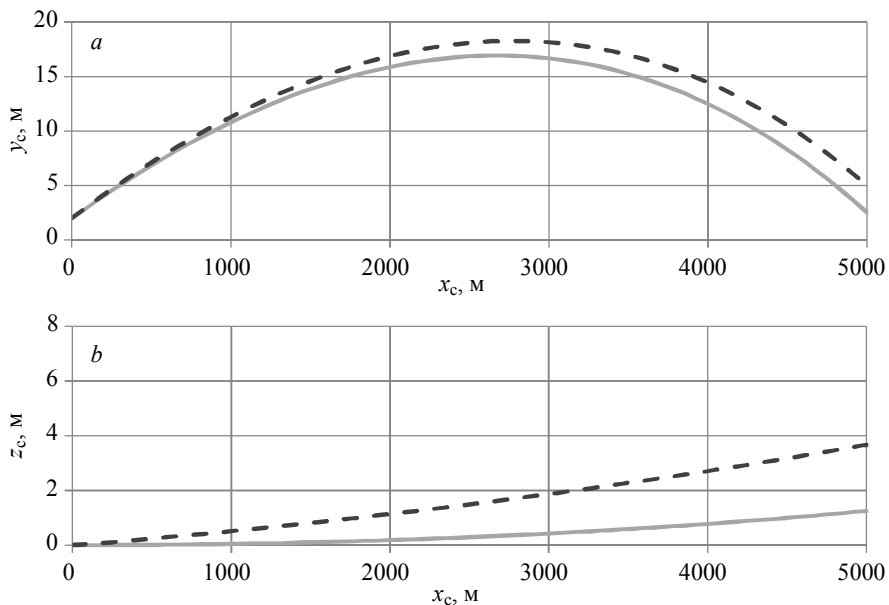
Для бронебойно-подкалиберного снаряда калибра 125 мм проводились траекторные расчеты при начальной скорости  $V_0 = 1700$  м/с на дальность стрельбы  $X = 1000–5000$  м. Результаты расчета параметров траектории ( $Y$  – высота,  $Z$  – боковое отклонение) с использованием различных подходов к решению задачи представлены в табл. 3.

Таблица 3

## Результаты расчета параметров траектории снаряда БП 125 мм

Начальные условия	$X_0$ , м	1000	3000	5000
	$\theta_0$ , град	0.2	0.35	0.6
Уравнения движения центра масс снаряда. Закон сопротивления 1958 г.	$Y$ , м	3.82	3.98	3.90
	$Z$ , м	0.05	0.44	1.34
Полная система уравнений движения. Расчетная модель сопротивления	$Y$ , м	3.82	3.59	3.42
	$Z$ , м	0.04	0.40	1.25

Сравнение результатов расчета, полученных с использованием различных подходов к решению задачи без учета начальных возмущений по высоте и боковой координате, отличается не более чем на 0.5 м (см. табл. 3). Однако при наличии начальных возмущений отклонения как по высоте, так и по направлению увеличиваются. Так, при начальном возмущении  $\delta = 0.2^\circ$ , отличие по высоте и боковому отклонению составляет 1.0–2.5 м, в зависимости от дальности стрельбы. На рис. 5 дано сравнение расчетных траекторий при стрельбе на дальность 5000 м. Анализ результатов расчета траектории бронебойно-подкалиберного снаряда показывает, что влияние начальных возмущений на отклонения по высоте и боковой координате в конечной точке траектории могут быть существенными, что необходимо учитывать при стрельбе по целям прямой наводкой.



**Рис. 5.** Проекция траектории снаряда БП 125 мм на плоскость  $Ox_c y_c$  (a) и  $Ox_c z_c$  (b): сплошная линия – без учета начальных возмущений; штриховая – с учетом начальных возмущений ( $\delta = 0.2^\circ$ )

**Fig. 5.** Projections of the projectile BP 125 mm trajectory on the plane  $Ox_c y_c$  (a) and  $Ox_c z_c$  (b): solid line indicates the case without initial fluctuations; dashed line, the case with initial fluctuations ( $\delta = 0.2^\circ$ )

### Заключение

Методика аэродинамического расчета, предложенная в работе, позволяет получить полный набор коэффициентов аэродинамической силы и момента метаэмого тела и тем самым замкнуть систему уравнений движения без использования эмпирических соотношений. Разработанная методика решения траекторной задачи является более полной, позволяет рассчитывать новые параметры и, в принципе, дает более точные результаты для широкого диапазона параметров стрельбы. Данная методика может быть использована для уточнения траекторных расчетов снарядов, используемых в артиллерии, а также при проектировании новых боеприпасов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Внешняя баллистика. М.: Машиностроение, 2005. 608 с.
2. Русяк И.Г., Карпов А.И., Королев С.А., Карсканов С.А. Расчет траектории движения снаряда в атмосфере с учетом гидродинамики его обтекания // Вопросы оборонной техники. Серия 14. 2015. Вып. 2. С. 130–141.
3. Ivan Rusyak, Vadim Sufiyarov, Stanislav Korolev, Mikhail Ermolaev. Software complex for simulation of internal and external ballistics of artillery shot // International Conference on Military Technologies 2015 (ICMT 2015), Brno, May 19 – 21, 2015: University of Defence, Brno, 2015. P. 9–17. DOI: 10.1109/MILTECHS.2015.7153682.
4. ГОСТ В 24288-80. Снаряды неуправляемые артиллерийские, реактивные, активно-реактивные. Метод расчета траектории полета. М.: Издательство стандартов, 1980. 55 с.
5. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Vol. 1. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 528 p.
6. Королев С.А., Карсканов С.А. Математическое моделирование обтекания тела вращения сверхзвуковым потоком газа // Вестник Удмуртского университета. Серия «Математика. Механика. Компьютерные науки». 2014. №3. С. 123–133.
7. Липанов А.М. Теоретическая гидромеханика ньютоновских сред. М.: Наука, 2011. 551 с.
8. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD. California, 1994. 460 p.
9. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. V. 3. P. 269–289.
10. Sarkar S., Hussaini M.Y. Computation of the sound generated by isotropic turbulence. NASA Contract Report 93-74. NASA Langley Research Center, Hampton, VA, 1993.

Статья поступила 17.03.2017 г.

Korolev S.A., Lipanov A.M., Rusyak I.G.(2017) ON THE ISSUE OF ACCURACY OF THE SOLUTION OF THE DIRECT PROBLEM OF EXTERNAL BALLISTICS. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 63–74

DOI 10.17223/19988621/47/7

The paper is devoted to the possibility to increase the accuracy of the solution of the direct problem of external ballistics by means of solving a more comprehensive system of projectile motion equations and calculating the coefficients of aerodynamic forces and moments based on the hydrodynamic simulation of the flow around the projectile.

The mathematical model of external ballistics presented in this article takes into account rotation of the projectile and oscillation of the latter in relation to the center of mass. Simulation of the flow around the projectile has been performed by solving the Favre averaged Navier–Stokes equations (FANS), using the  $k-\varepsilon$  turbulence model including compressibility. The numerical method has been implemented with the application of the ANSYS Fluent computational fluid dynamics module.

Calculation of aerodynamic characteristics of the projectiles has been carried out in a wide range of parameters: Mach number,  $M = 0.5-5.0$ ; angle of attack,  $\alpha = 0-20^\circ$ ; and rotation speed,  $\omega_x = 500-2000$  rad/s. Based on numerical simulation results, the approximate dependences for coefficients of aerodynamic force and moment have been obtained using the least square method.

The effect of the considered factors on the solution of trajectory problem has been investigated for three types of projectiles: the high explosive rotating projectile, the high explosive feathered projectile, and the armor-piercing subcaliber feathered projectile

Keywords: external ballistics, trajectory, aerodynamic coefficients, Navier-Stokes equations, turbulence model, numerical method, accuracy of the solution.

*KOROLEV Stanislav Anatol'evich* (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation)

E-mail: stkj@mail.ru

*LIPANOV Aleksey Matveevich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Keldysh Institute of Applied Mathematics Russian Academy of Sciences, Moscow, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation)

E-mail: AML35@yandex.ru

*RUSYAK Ivan Grigor'evich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation)

E-mail: primat@istu.ru

#### REFERENCES

1. Dmitrievskiy A.A., Lysenko L.N. (2005) *Vneshnyaya ballistika* [External Ballistics]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Rusyak I.G., Karpov I.A., Korolev S.A., Karskanov S.A. (2015) Raschet traektorii dvizheniya snaryada v atmosfere s uchetom gidrodinamiki ego obtekaniya [Calculation of the trajectory of a projectile in the atmosphere taking into account the hydrodynamics of the external flow]. *Voprosy oboronnoy tekhniki – Questions of defense engineering. Series 14. 2.* pp. 130–141.
3. Rusyak I., Sufiyarov V., Korolev S., Ermolaev M. (2015) Software complex for simulation of internal and external ballistics of artillery shot. *International Conference on Military Technologies 2015 (ICMT 2015)*. University of Defense, Brno. pp. 9–17. DOI: 10.1109/MILTECHS.2015.7153682.
4. GOST B 24288-80 (1980) *Snaryady neupravlyaemye artilleriyskie, reaktivnye, aktivno-reaktivnye. Metod rascheta traektorii poleta* [Unguided artillery projectiles, reactive, active-reactive. The method of calculating the flight trajectory]. Moscow: Publishing of standards.
5. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. (1991) *Solving Ordinary Differential Equations. Vol. 1*. Berlin: Springer-Verlag.
6. Korolev S.A., Karskanov S.A. (2014) Mathematical simulation of supersonic airflow around the rotary body. *Vestnik UdSU. Series "Mathematics. Mechanics. Computer sciences"*. 3. pp. 123–133.
7. Lipanov A.M. (2011) *Teoreticheskaya gidromekhanika n'yutonovskikh sred* [Theoretical Hydromechanics of Newtonian Media]. Moscow: Nauka.
8. Wilcox D.C. (1994) *Turbulence Modeling for CFD*. California.
9. Launder B.E., Spalding D.B. (1974) The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 3. pp. 269–289.
10. Sarkar S., Hussaini M.Y. (1993) Computation of the sound generated by isotropic turbulence. *NASA Contract Report 93-74*. VA, Hampton: NASA Langley Research Center.