

В.И. Смагин

# АДАПТИВНОЕ ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ С НЕИЗВЕСТНЫМ ВХОДОМ

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 17-08-00920.*

Рассматривается задача синтеза адаптивного прогнозирующего управления, построенного на основе слежения за желаемым выходом системы при наличии в описании модели неизвестных параметров и неизвестного входа. Прогнозирование осуществляется на основе вычисления оценок состояний объекта, параметров и неизвестного входа. Рассматривается задача адаптивного управления экономической системой производства, хранения и поставок товара потребителям.

**Ключевые слова:** дискретные системы; прогнозирующее управление; адаптивное управление; неизвестный вход; модель производства.

При синтезе управлений широко используется метод управления динамическими объектами с применением прогнозирующих моделей – Model Predictive Control (МРС) [1]. Область применения МРС охватывает задачи управления технологическими процессами, производственными системами, управления запасами, задачи управления портфелем ценных бумаг [1–6] и др.

В работе рассматривается задача синтеза адаптивного прогнозирующего управления для динамических объектов с неизвестными параметрами и неизвестным входом, при этом применяются методы идентификации неизвестных параметров объекта [7, 8], методы вычисления оценок вектора состояния объекта, использующие оценки неизвестного входа [9–12]. Дано применение метода к задаче синтеза адаптивного прогнозирующего управления производством, хранением и поставками товара с учетом возможного наличия в модели объекта неизвестного входа.

## 1. Постановка задачи

Модель объекта, наблюдений и выхода описывается следующими линейно-разностными уравнениями:

$$x_{t+1} = A(\theta_t)x_t + B(\theta_t)u_t + I r_t + w_t, \quad x_{t|t=0} = x_0, \quad (1)$$

$$\psi_t = Hx_t + v_t, \quad (2)$$

$$y_t = Gx_t, \quad (3)$$

где  $x_t \in R^n$  – состояние объекта;  $u_t \in R^m$  – управляющее воздействие (известный вход);  $\psi_t \in R^l$  – наблюдения;  $r_t \in R^q$  – неизвестный вход;  $y_t \in R^p$  – управляемый выход;  $\theta_t$  – неизвестный вектор;  $A(\theta_t)$ ,  $B(\theta_t)$ ,  $I$ ,  $H$ ,  $G$  – матрицы соответствующих размерностей. Случайные возмущения  $w_t$ , шумы измерения  $v_t$  и вектор начальных условий  $x_0$  подчиняются гауссовскому распределению с характеристиками:

$$M\{w_t\} = 0, \quad M\{v_t\} = 0, \quad M\{w_t w_k^T\} = W \delta_{t,k}, \quad M\{v_t v_k^T\} = V \delta_{t,k}, \quad M\{w_t v_k^T\} = 0,$$

$$M\{x_0\} = \bar{x}_0, \quad M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\} = P_{x_0}.$$

Ограничения на векторы состояния и управления представимы в виде

$$a_1(t) \leq S_1 x_t \leq a_2(t), \quad \varphi_1(x_t, t) \leq S_2 u_t \leq \varphi_2(x_t, t), \quad (4)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – структурные матрицы полного ранга, состоящие из нулей и единиц, определяющие компоненты векторов  $x_t$  и  $u_t$ , на которые накладываются ограничения;  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $\varphi_1(x_t, t)$ ,  $\varphi_2(x_t, t)$  – заданные векторы и вектор-функции соответствующих размерностей.

Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям  $\psi_t$  определить стратегию управления в условиях неполной информации о модели, при которой вектор выхода системы  $y_t$  будет близок к заданному вектору  $\bar{y}_t$ .

## 2. Прогнозирование поведения объекта в условиях неполной информации о модели

Прогнозирование поведения объекта и вектора выхода системы осуществляется с использованием экстраполятора Калмана на основе оценок вектора состояния  $\hat{x}_{t|t}$ , вектора выхода  $\hat{y}_{t|t}$  и оценки вектора неизвестного входа  $\hat{r}_t$ :

$$\hat{x}_{t+1|t} = \hat{A}_t \hat{x}_{t|t-1} + \hat{B}_t u_t + \hat{I}_t r_t + K_t (\psi_t - H \hat{x}_{t|t-1}), \quad \hat{x}_{0|0} = \bar{x}_0, \quad (5)$$

$$\hat{y}_{t+1|t} = G \hat{x}_{t+1|t}, \quad (6)$$

$$K_t = \hat{A}_t P_t H^T (H P_t H^T + V)^{-1}, \quad (7)$$

$$P_{t+1} = W + \hat{A}_t P_t \hat{A}_t^T - \hat{A}_t P_t H^T (H P_t H^T + V)^{-1} H P_t \hat{A}_t^T, \quad P_0 = P_{x_0}, \quad (8)$$

где  $\hat{A}_t = A(\hat{\theta}_t)$  и  $\hat{B}_t = B(\hat{\theta}_t)$  – матрицы, полученные в результате идентификации модели.

Идентификацию модели можно осуществить с помощью фильтра Калмана и модифицированного метода наименьших квадратов.

## 3. Идентификация модели с использованием фильтра Калмана

Идентификацию модели осуществим с помощью фильтра Калмана. В этом случае для идентификации необходимо иметь определенный уровень априорной информации о неизвестном векторе  $\theta_t$ . Предположим, что закон поведения неизвестного вектора задается следующим уравнением:

$$\theta_{t+1} = \Theta_t \theta_t + \tau_t, \quad \theta_{t|t=0} = \theta_0, \quad (9)$$

где  $\Theta_t$  – матрица, определяющая динамику неизвестного вектора в момент времени  $t$ ;  $\tau_t$  – случайная гауссовская величина с нулевым средним и ковариацией  $M\{\tau_t \tau_k^T\} = T_t \delta_{t,k}$ ;  $\theta_0$  – случайный вектор начальных условий с известными характеристиками

$$M\{\theta_0\} = \bar{\theta}_0, \quad M\{(\theta_0 - \bar{\theta}_0)(\theta_0 - \bar{\theta}_0)^T\} = P_{\theta_0}.$$

Будем предполагать, что матрицы  $A(\theta_t)$  и  $B(\theta_t)$  линейно зависят от  $\theta_t$ . Тогда можно представить вектор  $x_{t+1}$  в виде линейной функции от  $\theta_t$ :

$$x_{t+1} = A(\theta_t)x_t + B(\theta_t)u_t + I_t r_t + w_t = \Omega(x_t, u_t)\theta_t + \rho(x_t, u_t) + I_t r_t + w_t. \quad (10)$$

Умножив (10) слева на матрицу  $H$  и добавив  $v_{t+1}$  к левой и правой частям (10), получим

$$\psi_{t+1} = Hx_{t+1} + v_{t+1} = H\Omega(x_t, u_t)\theta_t + H\rho(x_t, u_t) + Hw_t + HI_t r_t + v_{t+1}. \quad (11)$$

Далее, используя алгоритм фильтрации Калмана к модели (9) и каналу наблюдений (11), при этом заменив в (11)  $x_t$  и  $r_t$  на их оценки, получим оценку неизвестного параметра в момент времени  $t+1$ , которая определяется из следующих выражений:

$$\hat{\theta}_{t+1} = \Theta_t \hat{\theta}_t + \bar{K}_t (\psi_{t+1} - H\hat{\Omega}_t \hat{\theta}_t - H\hat{\rho}_t - \hat{r}_t), \quad \hat{\theta}_0 = \bar{\theta}_0, \quad (12)$$

$$\bar{K}_t = \bar{P}_t \hat{\Omega}_t^T (\hat{\Omega}_t \bar{P}_t \hat{\Omega}_t^T + HWH^T + V)^{-1}, \quad (13)$$

$$\bar{P}_t = \Theta_t \bar{P}_t \Theta_t^T + T_t, \quad \bar{P}_{t+1} = (E_n - \bar{K}_t \hat{\Omega}_t) \bar{P}_t, \quad \bar{P}_0 = P_{\theta_0}, \quad (14)$$

где  $\hat{\Omega}_t = \Omega(\hat{x}_{t|t-1}, u_t)$ ,  $\hat{\rho}_t = \rho(\hat{x}_{t|t-1}, u_t)$ . Оценка вектора состояния  $\hat{x}_{t+1|t}$  определяется по формуле

$$\hat{x}_{t+1|t} = A(\hat{\theta}_t) \hat{x}_{t|t-1} + B(\hat{\theta}_t) u_t + \hat{I}_t r_t = \hat{\Omega}_t \hat{\theta}_t + \hat{\rho}_t + \hat{I}_t r_t, \quad (15)$$

где  $\hat{A}_t = A(\hat{\theta}_t)$ ,  $\hat{B}_t = B(\hat{\theta}_t)$ .

Для построения оценок неизвестного входа будем использовать модифицированный метод МНК [9], в основу которого положена минимизация следующего критерия:

$$J(\hat{r}_{t-1}) = \sum_{i=1}^t \left\{ \left\| \psi_i - H\hat{x}_{i|t-1} \right\|_{C_R}^2 + \left\| \hat{r}_{i-1} \right\|_{D_R}^2 \right\}, \quad (16)$$

где  $C_R$  и  $D_R$  – симметричные, положительно определенные матрицы.

Оптимизация критерия до текущего момента времени  $t$  сводится к минимизации критерия в каждый момент времени  $i = \overline{1, t}$ :

$$J(\hat{r}_{t-1}) = \min_{\hat{r}_0} \min_{\hat{r}_1} \dots \min_{\hat{r}_{t-1}} \sum_{i=1}^t \left\{ \left\| \psi_i - H\hat{x}_{i|t-1} \right\|_{C_R}^2 + \left\| \hat{r}_{i-1} \right\|_{D_R}^2 \right\}. \quad (17)$$

Оптимальная оценка неизвестного входа на шаге  $t=1$

$$J(\hat{r}_0) = \min_{\hat{r}_0} \left\{ \left\| \psi_1 - H\hat{x}_{1|0} \right\|_{C_R}^2 + \left\| \hat{r}_0 \right\|_{D_R}^2 \right\}.$$

Учитывая, что  $\hat{x}_{1|0} = Ax_0 + Bu_0 + I\hat{r}_0$ , имеем

$$J(\hat{r}_0) = \min_{\hat{r}_0} \left\{ \left\| \psi_1 - HAx_0 - HBu_0 - H\hat{r}_0 \right\|_{C_R}^2 + \left\| \hat{r}_0 \right\|_{D_R}^2 \right\}. \quad (18)$$

После преобразований получаем

$$J(\hat{r}_0) = \min_{\hat{r}_0} \left\{ \hat{r}_0^T \left( I^T H^T C_R H I + D_R \right) \hat{r}_0 - 2\hat{r}_0^T I^T H^T C_R (\psi_1 - HAx_0 - HBu_0) + \alpha_0 \right\},$$

где  $\alpha_0$  – величина, не зависящая от  $\hat{r}_0$ .

Оптимальная оценка находится из условия

$$\frac{\partial J(\hat{r}_0)}{\partial \hat{r}_0} = 2 \left( I^T H^T C_R H I + D_R \right) \hat{r}_0 - 2I^T H^T C_R (\psi_1 - HAx_0 - HBu_0) = 0,$$

откуда получаем оптимальную оценку неизвестного входа в момент времени  $t=1$ :

$$\hat{r}_0 = S_R (\psi_1 - HAx_0 - HBu_0), \quad (19)$$

где  $S_R = (I^T H^T C_R H I + D_R)^{-1} I^T H^T C_R$ . Подставляя полученное выражение для  $\hat{r}_0$  в (18), вычисляем оптимальное значение критерия в момент времени  $t=1$ :

$$J(\hat{r}_0) = (\psi_1 - HAx_0 - HBu_0)^T M_R (\psi_1 - HAx_0 - HBu_0), \quad (20)$$

где  $M_R = C_R - 2C_R H I S_R + S_R^T (I^T H^T C_R H I + D_R) S_R$ .

В момент времени  $t=2$  оптимальная оценка неизвестного входящего сигнала находится исходя из оптимизации следующего критерия:

$$J(\hat{r}_1) = \min_{\hat{r}_0} \min_{\hat{r}_1} \left\{ \left\| \psi_2 - H\hat{x}_{2|1} \right\|_{C_R}^2 + \left\| \hat{r}_1 \right\|_{D_R}^2 + \left\| \psi_1 - H\hat{x}_{1|0} \right\|_{C_R}^2 + \left\| \hat{r}_0 \right\|_{D_R}^2 \right\}.$$

Выражение для  $J(\hat{r}_1)$  может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned} J(\hat{r}_1) &= \min_{\hat{r}_1} \left\{ \left\| \psi_2 - H\hat{x}_{2|1} \right\|_{C_R}^2 + \left\| \hat{r}_1 \right\|_{D_R}^2 + J(\hat{r}_0) \right\} = \\ &= \min_{\hat{r}_1} \left\{ \left\| \psi_2 - H\hat{x}_{1|0} - HBu_1 - H\hat{r}_1 \right\|_{C_R}^2 + \left\| \hat{r}_1 \right\|_{D_R}^2 + \left\| \psi_1 - HAx_0 - HBu_0 \right\|_{M_R}^2 \right\} = \\ &= \min_{\hat{r}_1} \left\{ \hat{r}_1^T \left( I^T H^T C_R H I + D_R \right) \hat{r}_1 - 2\hat{r}_1^T I^T H^T C_R (\psi_2 - H\hat{x}_{1|0} - HBu_1) + \alpha_1 \right\}, \end{aligned}$$

где  $\alpha_1$  – величина, не зависящая от  $\hat{r}_1$ . Дифференцируя по  $\hat{r}_1$ , по аналогии с операциями, проведенными на первом шаге, имеем

$$\hat{r}_1 = S_R (\psi_2 - H\hat{x}_{1|0} - HBu_1), \quad (21)$$

$$J(\hat{r}_1) = (\psi_2 - H\hat{x}_{1|0} - HBu_1)^T M_R (\psi_2 - H\hat{x}_{1|0} - HBu_1). \quad (22)$$

Для последующих шагов применяя метод математической индукции, получим

$$\hat{r}_t = S_R (\psi_{t+1} - H\hat{x}_{t|t-1} - HBu_t). \quad (23)$$

## 5. Синтез адаптивного управления

Реализуем прогнозирование поведения объекта и выхода системы с использованием следующих формул:

$$\hat{x}_{t+i|t} = \left( \prod_{k=1}^{i-1} \hat{A}_{t+i-k} \right) \hat{x}_{t+1|t} + \left( \prod_{l=1}^{k-1} \hat{A}_{t+i-l} \right) \hat{B}_{t+i-k} u_{t+i-k|t} + \left( \prod_{l=1}^{k-1} \hat{A}_{t+i-l} \right) I \hat{r}_{t+i-k}, \quad (24)$$

$$\hat{y}_{t+i|t} = G_{t+i} \left( \prod_{k=1}^{i-1} \hat{A}_{t+i-k} \right) \hat{x}_{t+1|t} + \sum_{k=1}^{i-1} G_{t+i} \left( \prod_{l=1}^{k-1} \hat{A}_{t+i-l} \right) \hat{B}_{t+i-k} u_{t+i-k|t} + \sum_{k=1}^{i-1} G_{t+i} \left( \prod_{l=1}^{k-1} \hat{A}_{t+i-l} \right) I \hat{r}_{t+i-k}, \quad (25)$$

где  $u_{t+k|t}$  – управление, используемое для прогнозирования.

Уравнения для прогнозируемых векторов состояния и выхода представляются в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} \hat{X}_t &= \hat{\Psi} \hat{x}_{t+1|t} + \hat{P} U_t + \hat{S} \hat{R}_t, \\ \hat{Y}_t &= \hat{\Lambda} \hat{x}_{t+1|t} + \hat{\Phi} U_t + \hat{Q} \hat{R}_t, \end{aligned} \quad (26)$$

где векторы  $\hat{X}_t, \hat{Y}_t, U_t, \hat{R}_t$  имеют вид

$$\hat{X}_t = \begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1|t} \\ \vdots \\ \hat{x}_{t+N|t} \end{bmatrix}, \quad \hat{Y}_t = \begin{bmatrix} \hat{y}_{t+1|t} \\ \vdots \\ \hat{y}_{t+N|t} \end{bmatrix}, \quad U_t = \begin{bmatrix} u_{t+1|t} \\ \vdots \\ u_{t+N|t} \end{bmatrix}, \quad \hat{R}_t = \begin{bmatrix} \hat{r}_{t+1|t} \\ \vdots \\ \hat{r}_{t+N|t} \end{bmatrix},$$

матрицы  $\hat{\Psi}_t, \hat{\Lambda}_t, \hat{S}, \hat{Q}$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_t &= \begin{bmatrix} E_n \\ \hat{A}_{t+1} \\ \hat{A}_{t+2} \hat{A}_{t+1} \\ \vdots \\ \prod_{k=1}^{N-1} \hat{A}_{t+N-k} \end{bmatrix}, \quad \hat{\Lambda}_t = \begin{bmatrix} G_{t+1} \\ G_{t+2} \hat{A}_{t+1} \\ G_{t+3} \hat{A}_{t+2} \hat{A}_{t+1} \\ \vdots \\ G_{t+N} \prod_{k=1}^{N-1} \hat{A}_{t+N-k} \end{bmatrix}, \\ \hat{S} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{A}I & I & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \hat{A}^{N-2}I & \hat{A}^{N-3}I & \dots & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ GI & 0 & 0 & \dots & 0 \\ G\hat{A}I & GI & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ G\hat{A}^{N-2}I & G\hat{A}^{N-3}I & \dots & GI & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

В случае  $M < N$  матрицы  $\hat{P}_t$  и  $\hat{\Phi}_t$  вводятся следующим образом:

$$\hat{P}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{B}_{t+1} & 0 & \dots & 0 \\ \hat{A}_{t+2} \hat{B}_{t+1} & \hat{B}_{t+2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ \left( \prod_{k=1}^{M-1} \hat{A}_{t+M-k+1} \right) \hat{B}_{t+1} & \left( \prod_{k=1}^{M-2} \hat{A}_{t+M-k+1} \right) \hat{B}_{t+2} & \dots & \hat{B}_{t+M} \\ \left( \prod_{k=1}^M \hat{A}_{t+M-k+2} \right) \hat{B}_{t+1} & \left( \prod_{k=1}^{M-1} \hat{A}_{t+M-k+1} \right) \hat{B}_{t+2} & \dots & \hat{A}_{t+M+1} \hat{B}_{t+M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left( \prod_{k=1}^{N-2} \hat{A}_{t+N-k} \right) \hat{B}_{t+1} & \left( \prod_{k=1}^{N-3} \hat{A}_{t+N-k} \right) \hat{B}_{t+2} & \dots & \left( \sum_p^{N-M-1} \prod_{k=1}^p \hat{A}_{t+N-k} \right) \hat{B}_{t+M} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Phi}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ G\hat{B}_{t+1} & 0 & \dots & 0 \\ G\hat{A}_{t+2}B_{t+1} & G\hat{B}_{t+2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ G\left(\prod_{k=1}^{M-1}\hat{A}_{t+M-k+1}\right)\hat{B}_{t+1} & G\left(\prod_{k=1}^{M-2}\hat{A}_{t+M-k+1}\right)\hat{B}_{t+2} & \dots & G\hat{B}_{t+M} \\ G\left(\prod_{k=1}^M\hat{A}_{t+M-k+2}\right)\hat{B}_{t+1} & G\left(\prod_{k=1}^{M-1}\hat{A}_{t+M-k+1}\right)\hat{B}_{t+2} & \dots & G\hat{A}_{t+M+1}\hat{B}_{t+M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G\left(\prod_{k=1}^{N-2}\hat{A}_{t+N-k}\right)\hat{B}_{t+1} & G\left(\prod_{k=1}^{N-3}\hat{A}_{t+N-k}\right)\hat{B}_{t+2} & \dots & G\left(\sum_p^{N-M-1}\prod_{k=1}^p\hat{A}_{t+N-k}\right)\hat{B}_{t+M} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

При  $M = N$ :

$$\hat{P}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{B}_{t+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{A}_{t+2}\hat{B}_{t+1} & \hat{B}_{t+2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \left(\prod_{k=1}^{N-2}\hat{A}_{t+N-k}\right)\hat{B}_{t+1} & \left(\prod_{k=1}^{N-3}\hat{A}_{t+N-k}\right)\hat{B}_{t+2} & \dots & \hat{B}_{t+N-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Phi}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ G\hat{B}_{t+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ G\hat{A}_{t+2}\hat{B}_{t+1} & G\hat{B}_{t+2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ G\left(\prod_{k=1}^{N-2}\hat{A}_{t+N-k}\right)\hat{B}_{t+1} & G\left(\prod_{k=1}^{N-3}\hat{A}_{t+N-k}\right)\hat{B}_{t+2} & \dots & G\hat{B}_{t+N-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Синтез управления осуществляется на основе минимизации критерия

$$J(\hat{x}_{t+1|t}, U_t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \|\hat{y}_{t+k|t} - \bar{y}_{t+k}\|_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \|u_{t+k|t} - u_{t+k-1|t}\|_D^2,$$

который можно записать в следующем виде:

$$J(\hat{x}_{t+1|t}, U_t) = \frac{1}{2} U_t^T F_t U_t + U_t^T f_t + \alpha_t, \quad (30)$$

где  $\alpha_t$  – слагаемое, не зависящее от управления,

$$F = \Phi^T \bar{C} \Phi + \bar{D}, \quad f = \Gamma \begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1|t} \\ \hat{R}_t \\ \bar{Y}_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Du_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \Phi^T \bar{C} \Lambda & \Phi^T \bar{C} \hat{Q} & -\Phi^T \bar{C} \end{bmatrix}, \quad \bar{Y}_t = \begin{bmatrix} \bar{y}_{t+1|t} \\ \vdots \\ \bar{y}_{t+N|t} \end{bmatrix},$$

матрицы  $\bar{C}$  и  $\bar{D}$  имеют вид

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & C & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & C \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} 2D & -D & 0 & \vdots & 0 \\ -D & 2D & -D & \vdots & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & -D & 2D & -D \\ 0 & \dots & 0 & -D & 2D \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Окончательно адаптивное управление примет вид

$$u_{t+1|t}^* = (E_n \ 0 \ \dots \ 0)U_t^*,$$

где  $U_t^*$  определяется численно на основе оптимизации критерия (30) с учетом ограничений (4).

## 6. Применение алгоритма к задаче управления системой производства, хранения и поставок товара потребителям

Рассмотрим задачу управления производством, хранением и поставками товаров потребителям [4]. Модель объекта с дополнительно включенными неизвестными составляющими возмущений имеет вид

$$\begin{aligned} q_{t+1} &= \bar{A}(\theta)q_t + b_t + \varphi_t + \xi_t, \quad q_0 = \bar{q}_0, \\ z_{t+1} &= z_t + \bar{B}(\theta)\omega_t + d_t - \varphi_t + \zeta_t, \quad z_0 = \bar{z}_0, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $q_t \in R^s$ ,  $q_{i,t}$  – количество товара  $i$ -го типа у потребителя в момент времени  $t$  ( $t = \overline{1, T}$ ,  $i = \overline{1, s}$ );  $z_{i,t}$  – количество товаров  $i$ -го типа на складе производителя;  $\omega_{i,t}$  – объем производства товаров  $i$ -го типа;  $\varphi_{i,t}$  – объем поставок товаров  $i$ -го типа;  $b_t$ ,  $d_t$  – неизвестные составляющие возмущений;  $\xi_t$ ,  $\zeta_t$  – векторные гауссовские случайные последовательности ( $M\{\xi_t\} = 0$ ,  $M\{\zeta_t\} = 0$ ,  $M\{\xi_t \xi_k^T\} = \Sigma \delta_{t,k}$ ,  $M\{\zeta_t \zeta_k^T\} = \Xi \delta_{t,k}$ ,  $M\{\xi_t \zeta_k^T\} = 0$ );  $\bar{A}(\theta)$  и  $\bar{B}(\theta)$  – матрицы;  $\theta_t$  – неизвестный постоянный вектор.

В каждый момент времени  $t$  должны выполняться ограничения

$$z_{\min} \leq z_t \leq z_{\max}, \quad 0 \leq \omega_t \leq \omega_{\max}, \quad 0 \leq \varphi_t \leq z_t.$$

Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям определить стратегию управления производством, хранением и поставками товара, обеспечивающую количество товара у потребителя  $q_t$ , близкое к заданному вектору  $\bar{q}$ , при неполной информации о параметрах модели.

Моделирование проводится для следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ -0,25 & \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \theta_3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}, \quad z_{\min} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad z_{\max} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}, \quad \omega_{\max} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,9 \end{bmatrix}, \quad z_0 = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \quad q_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ V &= \text{diag}\{0,0005; 0,0005; 0,0005; 0,0005\}, \quad \bar{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,02 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0,05 \\ 0,03 \end{bmatrix}, \\ \omega_0 &= \varphi_0 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,9 \\ 0,3 \end{bmatrix}, \quad \theta_0 = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \text{diag}\{2; 2; 2; 2\}, \\ T &= 60, \quad M = N = 4, \quad P_{x_0} = E_4, \quad \bar{P}_{t_0} = E_4, \quad H = E_4, \quad W = 0, \quad T = 0, \quad \Theta_t = E_3, \quad T_\tau = 0, \quad R = E_3. \end{aligned} \quad (33)$$

Результаты численного моделирования алгоритма адаптивного управления, использующего оценки параметров  $\theta$  и  $r$ , приведены в виде графиков переходных процессов на рис. 1–3.

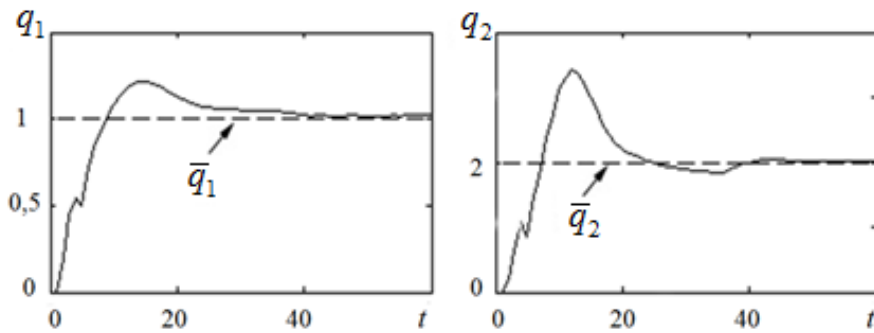


Рис. 1. Динамика изменения количества товаров у потребителя  
(пунктирная линия – заданный уровень количества товара у потребителя,  
сплошная – количество товара у потребителя)

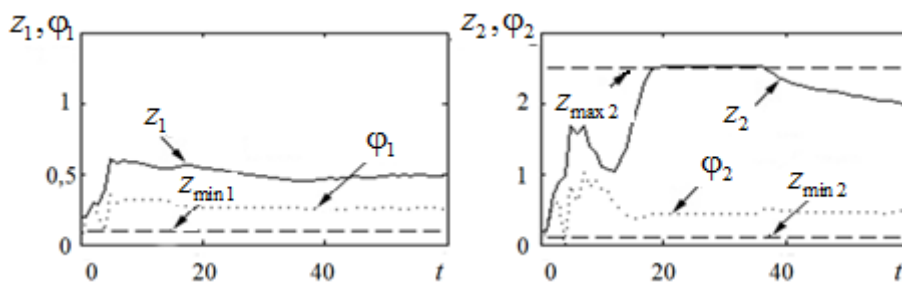


Рис. 2. Динамика изменения количества товаров на складе и объемов поставок (сплошная линия – количество товара на складе производителя, точки – объем поставок товаров, пунктирная линия – ограничения)

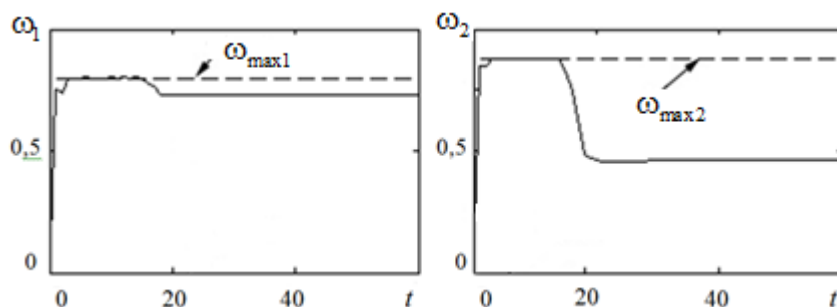


Рис. 3. Процессы изменения объемов производства товаров (сплошная линия – объем производства товара, пунктирная – ограничения)

Результаты моделирования показали, что дополнение алгоритмов адаптивного управления, использующих идентификацию неизвестных параметров, процедурами оценивания неизвестного входа позволяет реализовать цель управления экономическим объектом в условиях неполной информации о модели объекта.

### Заключение

Разработаны алгоритмы синтеза адаптивного прогнозирующего управления дискретным объектом в условиях неполной информации о параметрах модели и при наличии в модели объекта неизвестного входа.

Дано применение алгоритма адаптивного прогнозирующего управления к экономической системе производства, хранения и поставок товаров потребителям.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Maciejowski J.M. Predictive control with constraints. Upper Saddle River (NJ) : Prentice Hall, 2002. 331 p.
2. Перепелкин Е.А. Прогнозирующее управление экономической системой производства, хранения и поставок товаров потребителям // Экономика и математические методы. 2004. Т. 40, № 1. С. 125–128.
3. Киселева М.Ю., Смагин В.И. Управление производством, хранением и поставками товаров на основе прогнозирующей модели выхода системы // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 2 (7). С. 24–30.
4. Приступа М.Ю., Смагин В.И. Прогнозирующее управление дискретными системами с неизвестным входом и его применение к задаче управления экономическим объектом // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1 (18). С. 5–15.
5. Smagin V.I., Koshkin G.M., Kim K.S. Locally Optimal Inventory Control with Time Delay in Deliveries and Incomplete Information on Demand // Proceedings Second International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management. February 15–18, 2016. Beer Sheva, Israel, 2016. P. 570–574.
6. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозирующей моделью системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2006. № 12. С. 71–85.

7. Astrom K., Eykhoff P. System identification. A survey // Automatica. 1971. V. 7. P. 123–162.
8. Рубан А.И. Идентификация и чувствительность сложных систем. Томск : Изд-во Томск. ун-та, 1982. 302 с.
9. Janczak D., Grishin Yu. State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming // Control and Cybernetics. 2006. No. 4. P. 851–862.
10. Hsieh C-S. On the optimality of two-stage Kalman filtering for systems with unknown inputs // Asian Journal of Control. 2010. No. 4. P. 510–523.
11. Witczak M. Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems. Chapter 2. Unknown input observers and filters. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer International Publishing, Switzerland, 2014. P. 19–56.
12. Смагин В.И. Оценивание состояний нестационарных дискретных систем при неизвестном входе с использованием компенсаций // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 7. С. 122–127.

**Смагин Валерий Иванович**, д-р техн. наук, профессор. E-mail: vsm@mail.tsu.ru  
Национальный исследовательский Томский государственный университет

Поступила в редакцию 15 апреля 2017 г.

*Smagin Valery I.* (National Research Tomsk State University, Russian Federation).

**Adaptive model predictive control discrete systems with unknown input.**

**Keywords:** discrete systems; model predictive control; adaptive control; unknown input; production model.

DOI: 10.17223/19988605/40/3

The model of the object, observations and output is described by the following linear difference equations:

$$x_{t+1} = A(\theta_t)x_t + B(\theta_t)u_t + I r_t + w_t, \quad x_{t|t=0} = x_0,$$

$$\psi_t = Hx_t + v_t,$$

$$y_t = Gx_t,$$

where  $x_t \in R^n$  is the state of the object,  $u_t \in R^m$  is the control (known input),  $\psi_t \in R^l$  is the observations vector,  $r_t \in R^q$  is an unknown input,  $y_t \in R^p$  is the controlled output,  $\theta_t$  is an unknown parameter vector,  $A(\theta_t)$ ,  $B(\theta_t)$ ,  $I$ ,  $H$ ,  $G$  are matrices. The random perturbations  $w_t$ , the measurement noise  $v_t$ , and the vector of initial conditions  $x_0$  are not correlated to each other and obey a Gaussian distribution with characteristics:

$$M\{w_t\} = 0, M\{v_t\} = 0, M\{w_t w_k^T\} = W \delta_{t,k}, M\{v_t v_k^T\} = V \delta_{t,k}, M\{w_t v_k^T\} = 0,$$

$$M\{x_0\} = \bar{x}_0, M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\} = P_{x_0}.$$

Restrictions on the state and control vectors are representable in the form

$$a_1(t) \leq S_1 x_t \leq a_2(t), \quad \varphi_1(x_t, t) \leq S_2 u_t \leq \varphi_2(x_t, t),$$

where  $S_1$  and  $S_2$  are structure matrices of full rank consisting of zeros and ones defining the components of the vectors  $x_t$  and  $u_t$ , on which constraints are imposed;  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $\varphi_1(x_t, t)$ ,  $\varphi_2(x_t, t)$  are the given vectors and vector-functions.

Based on the minimization of the criterion

$$J(\hat{x}_{t+1|t}, U_t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \|\hat{y}_{t+k|t} - \bar{y}_{t+k}\|_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \|u_{t+k|t} - u_{t+k-1|t}\|_D^2$$

algorithms for the synthesis of adaptive predictive control of a discrete object under conditions of incomplete information about the parameters of the model and in the presence of an unknown input in the model of the object are considered.

The application of the algorithm of adaptive predictive control to the economic system of production, storage and delivery of goods to consumers is given.

## REFERENCES

1. Maciejowski, J.M. (2002) *Predictive control with constraints*. Prentice Hall.
2. Perepiolkin, E.A. (2004) Forecast-making control of an economic system of production, storage and deliveries of goods to consumers. *Ekonomika i matematicheskie metody – Economics and Mathematical Methods*. 40(1). pp. 125–128. (In Russian).
3. Kiseleva, M.Yu. & Smagin, V.I. (2009) Control of goods production, storage and delivery based on prediction model systems output. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(7). pp. 24–30. (In Russian).
4. Pristupa, M.Yu. & Smagin, V.I. (2012) Model predictive control discrete systems with unknown input and its application to control problem of economic object. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(18). pp. 5–15. (In Russian).
5. Smagin, V.I., Koshkin, G.M. & Kim, K.S. (2016) Locally optimal inventory control with time delay in deliveries and incomplete information on demand. *Proceedings Second International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management*. Beer Sheva, Israel. February 15–18, 2016. pp. 570–574.

6. Dombrovsky, V.V., Dombrovsky, D.V. & Lyashenko, E.A. (2006) Model predictive control of systems with random dependent parameters under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 67(12). pp. 1927–1939. DOI: 10.1134/S000511790612006X
7. Astrom, K. & Eykhoff, P. (1971) System identification. A survey. *Automatica*. 7. pp.123-162. DOI: 10.1016/0005-1098(71)90059-8
8. Ruban, A.I. (1982) *Identifikatsiya i chuvstvitel'nost' slozhnykh sistem* [Identification and sensitivity of complex systems]. Tomsk: Tomsk State University.
9. Janczak, D. & Grishin, Yu. (2006) State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming. *Control and Cybernetics*. 4. pp. 851–862.
10. Hsieh, C-S. (2010) On the optimality of two-stage Kalman filtering for systems with unknown inputs. *Asian Journal of Control*. 4. pp. 510–523. DOI: 10.1002/asjc.205
11. Witczak, M. (2014) *Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems. Chapter 2. Unknown input observers and filters*. Switzerland: Springer International Publishing. pp. 19–56.
12. Smagin, V.I. (2015) State estimation for nonstationary discrete systems with unknown input using compensations. *Russian Physics Journal*. 58(7). pp. 1010–1017. DOI: 10.1007/s11182-015-0602-x